



ҚАЗАҚСТАН МАТЕМАТИКТЕРІНІҢ БІРІНШІ КОНГРЕСІ ПЕРВЫЙ КОНГРЕСС МАТЕМАТИКОВ КАЗАХСТАНА THE FIRST CONGRESS OF MATHEMATICIANS OF KAZAKHSTAN

ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ СБОРНИК ТЕЗИСОВ CONFERENCE ABSTRACTS





Қазақстан математиктерінің
бірінші Конгресі
Тезистер жинағы



Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі
Ғылым комитеті
Түркі әлемінің математикалық қоғамы
Қазақстан математикалық қоғамы
М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті
Математика және математикалық моделдеу институты
Ақпараттық және есептеу технологиялары институты
Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машина жасау институты
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ҚАЗАҚСТАН МАТЕМАТИКТЕРІНІҢ БІРІНШІ КОНГРЕСІ

ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ

ӘОЖ 51
КБЖ 22.1, 22.2
В1

Редакторлар: Д. Ж. Ахмед-Заки, А. Е. Әбілқасымова, Ж. М. Бектемесов, М. А. Бектемесов, В. В. Вербовский, Б. Т. Жұмағұлов, С. И. Кабанихин, Т. Ш. Кальменов, С. Е. Касенов, М. А. Садыбеков, Д. Сураган, Б. Б. Тельтаев, Н. М. Темирбеков, А. К. Тулешов, О. Н. Тұрар.

Қазақстан математиктерінің бірінші конгресі. Тезистер жинағы. — Алматы: Математика және математикалық моделдеу институты, 2026. — 868 б. — қаз., рус., eng.

ISBN 978-601-08-6034-6

Математика және математикалық моделдеу институты, Түркі әлемінің математикалық қоғамы, Қазақстан математикалық қоғамы, М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Ақпараттық және есептеу технологиялары институты, Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машина жасау институты, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Қазақстан, конференцияның ұйымдастырушылары бола отырып, 2026 жылы өткен Қазақстан математиктерінің бірінші конгресіне қатысушылардың баяндамаларының қысқаша аннотацияларын қамтитын осы Тезистер жинағын ұсынады.

Бұл конгрестің мақсаты — Қазақстанның және басқа да елдердің математиктерін іргелі және қолданбалы зерттеулер бойынша біріктіру, соның ішінде жасанды интеллектті дамытудағы қолданбалары мен математиканы оқытудың әдістемесін қамтиды.

ISBN 978-601-08-6034-6

©ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық моделдеу институты

Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі
Ғылым комитеті
Түркі әлемінің математикалық қоғамы
Қазақстан математикалық қоғамы
М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті
Математика және математикалық моделдеу институты
Ақпараттық және есептеу технологиялары институты
Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ҚАЗАҚСТАН МАТЕМАТИКТЕРІНІҢ БІРІНШІ КОНГРЕСІ
ПЕРВЫЙ КОНГРЕСС МАТЕМАТИКОВ КАЗАХСТАНА
THE FIRST CONGRESS OF MATHEMATICIANS OF
KAZAKHSTAN

ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ
СБОРНИК ТЕЗИСОВ
CONFERENCE ABSTRACTS

Қазақстан математиктерінің бірінші конгресі

Бағдарламалық комитет

Тең төрағалар:

— ҚР ҰҒА академигі Б. Т. Жұмағұлов, Қазақстан математикалық қоғамының төрағасы

— ҚР ҰҒА академигі Т. Ш. Кальменов

Ұйымдастыру комитеті

Тең төрағалар:

— Д. Ж. Ахмед-Заки, Басқарма төрағасы — М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университетінің ректоры

— М. А. Садыбеков, Математика және математикалық моделдеу институтының бас директоры

Хатшы

— М. Манарбек

Жергілікті ұйымдастыру комитеті

Төраға:

— Е. И. Иманғалиев, Басқарма мүшесі, М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университетінің академиялық мәселелер жөніндегі проректоры

Первый Конгресс математиков Казахстана

Программный комитет

Сопредседатели:

— Академик НАН РК Б. Т. Жұмағұлов, председатель Казахстанского математического общества

— Академик НАН РК Т. Ш. Кальменов

Организационный комитет

Сопредседатели:

— Д. Ж. Ахмед-Заки, Председатель правления — ректор Южно-Казахстанского университета имени М. Ауэзова

— М. А. Садыбеков, Генеральный директор Института математики и математического моделирования

Секретарь

— М. Манарбек

Локальный организационный комитет

Председатель:

— Е. И. Иманғалиев, Член правления, проректор по академическим вопросам Южно-Казахстанского университета имени М. Ауэзова

Содержание

Тезис доклада академика НАН РК Б.Т. Жумагулова	29
М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университетінің тарихы	31
История Южно-Казахстанского университета имени М. Ауэзова	33
History of M. Auezov South Kazakhstan University	35
Сәуірлік конференция Апрельская конференция April Conference	37
Академик Национальной академии наук Республики Казахстан Тынысбек Шарипович Кальменов	39
Абдылдаева Э. Ф. Численный анализ сходимости приближенных решений задачи слежения при нелинейной оптимизации колебательных процессов	51
Акишев Г. Неравенство разных метрик Никольского для целых функций экспоненциального типа в пространстве Лебега со смешанной несимметричной нормой . .	52
Алексеева Л.А., Канымгазиева И.А. Вибротранспортные решения уравнений Максвелла для подвижных источников излучения при досветовых скоростях	55
Аликулов Ё.К. Краевая задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области	56
Аллаков И., Имамов О.Ш. О решении некоторых аддитивных задач типа Варинга–Гольдбаха.	58
Алтынбек Д.Н., Турметов Б.Х. Об одной нелокальной задаче для эллиптического уравнения с инволюцией	60
Аркабаев Н.К. О разрешимости нелокальной задачи для одного гиперболического уравнения четвёртого порядка	62
Аттаев А.Х. О начальных задачах для нагруженных гиперболических уравнений . .	64
Аубакирова Г.А., Садыбеков М.А. Об обратной задаче для уравнения Пуассона в круге	64
Ахметшин А.Д. Краевая задача для одного уравнения в частных производных с переменными коэффициентами и дробной производной Лиувилля	65
Балгимбаева Ш.А., Жанабилова А.К. Функциональные пространства, связанные с пространствами Морри, на многомерном торе: интерполяция	67
Балтабай Д.С., Каратаева Д.С. Критерий осцилляторности для одного класса квазилинейных разностных уравнений второго порядка	68
Баротов Б.Х., Кожанов А.И. Интегро-дифференциальные уравнения высокого порядка с вырождением	69
Басаров С.Ж., Тлеуханова Н.Т. Кубатурная формула для аппроксимационных пространств по системе Хаара	70
Бектал Ж.А. Спектральный анализ лапласиана на однородном дереве и его ортогональное разложение	72
Бейсебаева А.Ж. Екінші ретті өзіне-өзі түйіндес емес инволюциялы дифференциалдық операторы бар псевдопараболалық теңдеу үшін кері есеп	73
Бименов М.А. Азғындалған гиперболалық теңдеу үшін параметрлік бейлокал есептер	74
Гадзова Л.Х. Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами	75
Данабекова М., Садыбеков М.А. О задаче типа Самарского – Ионкина для волнового уравнения	76
Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно-возмущенных краевых задач с кратным чисто мнимым спектром для матрицы жордановой структуры .	77
Зикиров О.С. нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения третьего порядка	79

<i>Иманбаев Н.С.</i> Безусловная базисность корневых функций оператора кратного дифференцирования на отрезке со спектральным параметром в одном краевом условии	80
<i>Иманқұл Т.Ш., Бейсенқали А.</i> Цилиндрлік фазалық кеңістіктегі динамикалық жүйелердің басқарымдылық мәселері	81
<i>Ившин М.С.</i> Об одной задаче оптимального управления для уравнения диффузии дробного порядка	83
<i>Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш., Абсоатова Х.Г.</i> Краевая задача для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром	84
<i>Кадирбек А.</i> Регулярные самосопряженные задачи для уравнения Геллерстедта	85
<i>Кальменов Т.Ш.</i> Регулярные самосопряженные задачи для уравнения Лапласа	87
<i>Кальменов Т.Ш., Садыбеков М., Кадирбек А.</i> Об одном интегральном представлении решения смешанной задачи Коши для уравнения теплопроводности	88
<i>Кангужсин Б.Е.</i> Идентификация граничных условий для дифференциальных уравнений на графах-деревьях	89
<i>Кангужсин Б.Е., Кайырбек Ж.А.</i> Полнота систем корневых функций дифференциальных операторов третьего порядка с общими граничными условиями	90
<i>Каримов К.Т., Муродова М.Р.</i> Краевая задача типа Дирихле-Неймана для уравнения эллиптического типа с тремя сингулярными коэффициентами в области, ограниченной двумя параллельными слоями в первом октанте	92
<i>Керимбеков А., Берикжанов Р. Е., Шаршекеев У.</i> О разрешимости задачи синтеза оптимального управления при нелинейной оптимизации тепловых процессов	94
<i>Кожанов А.И.</i> Пространственно-нелокальные краевые задачи для эволюционных уравнений высокого порядка	95
<i>Кожанов А.И., Ашурова Г.Р.</i> Обратная задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и интегральным условием	96
<i>Кожанов А.И., Бжеумихова О.И.</i> Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с инволютивным отклонением аргумента	97
<i>Кожанов А. И., Маманазаров Д.С.</i> О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для параболических уравнений четвертого порядка	98
<i>Козыбаев Д.Х.</i> Некоторые примеры не локально-конечных коалгебр	99
<i>Конисбаева К.Т.</i> Сингулярлы ауытқыған интегро-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы	99
<i>Копжасарова А.А., Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т.</i> Периодическую и антипериодическую задачу для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом	100
<i>Кошанов Б.Д., Турганбек У., Ерхан А.Ж.</i> О разрешимости одной краевой задачи для тригармонического уравнения в шаре	102
<i>Кулпешов Б.Ш.</i> О связи алгебр бинарных формул с числом счетных моделей теории	103
<i>Култаев Т.Ч., Маматжасымова А.Т., Зулпуев А.М., Бексариева Ж.Ж.</i> О некоторых математических моделях в экономике	105
<i>Қайратқызы А., Жапсарбаева Л.К.</i> О разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Нортон-Бейли	107
<i>Лес А.К.</i> Граничное условие потенциала Гельмгольца	109
<i>Малышев С.Б.</i> Предгеометрии, индуцированные алгебрами бинарных изолирующих формул	110
<i>Мамазиева Э.А., Жолдошова Ч.Б.</i> Построение решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром	111
<i>Мамбетов Ж.И., Абдакимова Г.К.</i> Построение решения начальной задачи для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка	112
<i>Мирзаев И., Гайназаров С.М.</i> Численное моделирование воздействия плоской упругой волны на искусственно выделенную параллелепipedную область	113
<i>Муканов А.Б.</i> Теоремы типа Лоренца в классах Липшица	115

<i>Муратбекова У.А., Сәрсенбі Ә.М.</i> Төртінші ретті инволюциялы теңдеу үшін Дирихле есебінің Грин функциясы	116
<i>Нарбекова Н.М.</i> Төртінші ретті таза инволюциялы өз өзіне түйіндес емес оператордың базисі	118
<i>Омаров М.Т., Шаяхметова Б.К.</i> Теорема Эфроса для оператора Вольтерра с ядром райта	119
<i>Оспанов К.Н.</i> Условия корректности одной задачи для эллиптического уравнения с неограниченными коэффициентами	120
<i>Псху А.В.</i> Нелокальная по времени краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области	120
<i>Рамазанов М.И., Танин А.О.</i> Нелокальная краевая задача для уравнения теплопроводности с подвижной линией наблюдения	122
<i>Расулов А.Б.</i> О некоторых эллиптических системах уравнений на плоскости с сильными особенностями в младших коэффициентах	123
<i>Роговой А.В.</i> О разрывных решениях одной краевой задачи со смещением для однородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе	124
<i>Сайрам Н.Н., Садыбеков М.А.</i> Двухточечные нелокальные задачи для оператора двукратного дифференцирования со спектральным параметром в краевом условии. Анализ случаев	125
<i>Сайфуллаева Б.А., Турметов Б.Х.</i> О начально-краевой задаче для уравнения Бенни-Люка с инволюцией	126
<i>Сакабеков А., Мадалиева С.</i> О нестационарной двумерной системе моментных уравнений и макроскопических граничных условиях на подвижной границе	127
<i>Шалхар А.Ә.</i> Инволюциясы бар полигармониялық теңдеудің бейлокал аналогы үшін Навье типіндегі шеттік есептің шешімділігі	128
<i>Сартабанов Ж.А.</i> Методы и основы теории многопериодических систем с оператором дифференцирования по диагонали	129
<i>Серовайский С.Я.</i> Математическое моделирование. Два взгляда на один мост	131
<i>Солдатов А.П.</i> Двумерные сингулярные интегралы и обобщенные интегралы типа Коши в весовых пространствах Гельдера	132
<i>Тахиров Ж.О.</i> О теоретических и экспериментальных результатах с тепловыми импульсами нефурьеровской теплопроводности	132
<i>Таласбаева Ж.Т.</i> Алгоритмическое обучение подпространств в вычислимых векторных пространствах: роль отношения линейной зависимости	133
<i>Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К., Жахина Р.У.</i> Классификация вырожденных гипергеометрических систем, полученных из полной системы Лауричелла	134
<i>Тасмамбетов Ж.Н., Айтенова Г.М., Узакбаева Г.А.</i> Исследование свойств нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем	136
<i>Терсенов А.С., Сафаров Р.Ч.</i> О радиально симметричных решениях для эллиптического уравнения с $p(x)$ -лапласианом	137
<i>Токибетов Ж.А., Абдурахитова Г.Е.</i> К обобщению четырехмерной системы Моисила-Теодореско	138
<i>Толеуов Т.Ж.</i> Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің қолданыстары	139
<i>Туленбаев К.С., Туленбаев К.М.</i> О существовании решений краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений недивергентного вида	141
<i>Тургумбаев М.</i> О компактности сингулярного интеграла в обобщенных пространствах Морри	142
<i>Турметов Б.Х., Алтынбек Д.Н.</i> О начально-краевой задаче для гиперболического уравнения с инволюцией	143
<i>Турсунов Д.А., Кожобекова П.Ж., Мамытов А.О.</i> Разрешимость одного класса обратных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка	145

<i>Усманов К.И., Назарова К.Ж.</i> О разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с инволюцией	146
<i>Хайруллин Е.М., Ажибекова А.С.</i> Об одной граничной задаче, содержащей частные производные высокого порядка, уравнения теплопроводности в многомерном пространстве для полосы	148
<i>Хубиев К.У.</i> О задаче типа Франкля для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа	150
<i>Якунин С.А., Криворотько О.И.</i> Мультиагентное прогнозирование временных рядов: среднее поле и оператор на основе нейросети	151
<i>Abdyrakhimov N.T., Koilyshov U.K.</i> Solution of two-phase problems for the heat equation with non-local boundary conditions	153
<i>Abek A.N., Gogatishvili A.</i> Boundedness of generalized fractional maximal functions in generalized weight Lorentz spaces	154
<i>Absamatova A., Kenzhebekova G.</i> On an equivalent embedding for generalized discrete Riesz potentials	156
<i>Aliiev A.R., Gasimova G.M., Rzayev E.S.</i> On a method of proof of the completeness of derivative chains for a fourth-order polynomial operator pencil	157
<i>Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh.</i> On algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories: piecewise monotonic-to-left case	158
<i>Altybay A., Ruzhansky M.</i> Heat Equation driven by mixed local-nonlocal operators with non-regular space-dependent coefficients	160
<i>Altynbekkyzy Ainash, Tokmagambetov N.S.</i> Necessary conditions for solvability of q -fractional boundary value problems	161
<i>Apakov Yu.P., Ibrokhimov Kh.K.</i> On the construction of a solution to a boundary value problem with a time-asymmetric condition for the viscous-transonic equation in a semi-infinite domain	163
<i>Arepova G.D., Alexeyeva L.A., Ishan A.</i> Vibration transport solution of the two dimensional Klein-Gordon-Fock equation	165
<i>Ashyralyev Allaberen, Ashyraliyev Maksat</i> An Operator-Theoretic Approach to the Well-posedness of Advection-Diffusion Equations	166
<i>Ashyralyev Allaberen, Ashyraliyev Maksat, Soykan Urun Ezgi</i> Stability Analysis for Advection-Diffusion Equations and Their Numerical Approximations	167
<i>Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A., Zambarnaya T.S.</i> On an example of non-orthogonality of 1-types in linearly ordered theories	168
<i>Baizhanov B., Tazabekova N., Zambarnaya T.</i> Orthogonality of 1-types and the number of countable models of linearly ordered theories	169
<i>Barmagambetov S.M., Koilyshov U.K.</i> Solutions to Multilayer Heat Conduction Problems with Nonlocal Boundary Conditions	171
<i>Ashurov R.R., Baxriddinova N.A.</i> Inverse problem for Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type fractional equation with the Caputo derivative	173
<i>Bazarkhanov D.B.</i> Approximation numbers of some classes of Fourier series operators	174
<i>Begimqulov F.Kh.</i> A Boundary Value Problem for a Nonlocal Mixed-Type Equation with Involution and a Degeneracy Line	175
<i>Bizhanova G.I.</i> The compatibility conditions in the boundary value problems for the parabolic equations	176
<i>Bokayev N., Gogatishvili A., Kuzeubayeva N., Ünver T.</i> Reduction theorems and characterization of weighted inequalities for a discrete supremal operator including the discrete Hardy operator	178
<i>Borikhanov M.</i> Comparison principle for nonlinear fractional diffusion equation	179
<i>Botirov M.A., Kholikova M.S.</i> Sequence of meromorphic connections in Riemann sphere. Some properties of k -differentials in Riemann surfaces	180
<i>Boymurodov S.I.</i> Ergodic Measures for Hénon-Sibony Maps	181

<i>Bukanay N.U., Mirzakulova A.E., Assanova A.T.</i> Cauchy problem for a singularly perturbed integro-differential equation	183
<i>Chigambayeva D.K.</i> Interpolation theorem for local Morrey-type spaces of periodic functions	185
<i>Dzhalilov A.A., Abdusalomov X.Sh.</i> Block Structure of Markov Partitions for the Golden-Mean Tent Map	186
<i>Dzhalilov A.A., Kakhkhov M.J.</i> Limit Theorems and Distributional Structure of a Non-linear MA(1) processes	188
<i>Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A.</i> Null Lagrangians in free Novikov algebras	189
<i>Dzhumadil'daev A.S.</i> Leibniz algebras, Transposed Poisson algebras and their weak versions	190
<i>Ergashev M.A.</i> Killing vector fields in the Sol space	191
<i>Esfahani A.</i> Non-radial solutions of Boussinesq equation	193
<i>Fayziev Yu.E., Jumaeva Sh.F.</i> A boundary-initial value problem for fractional differential equations with sequential caputo derivatives	194
<i>Fayziev Yu.E., Sadullaeva Sh.Sh.</i> On a nonlocal problem for a fractional differential equation of the Boussinesq type with Hilfer derivative	195
<i>Gabdizhanov A., Kakharman N., Shyntemirov N.</i> Moduli of Smoothness and Growth Properties of the Hartley Transform	196
<i>Gabdizhanov A., Kakharman N., Shyntemirov N.</i> Modified Cauchy Problem for an Euler-Poisson-Darboux-Type Equation with Nonlocal Boundary Conditions	197
<i>Gogatishvili A., Karshygina G.</i> Estimates for integral majorants on the cones of monotone functions	198
<i>Guterman Alexander</i> Growth of the length function for non-associative algebras	199
<i>Hakimova M.A., Rasulova M.A.</i> Description of translation-invariant ground states for the $(m + 1)$ -state Chui-Weeks Model	200
<i>Ilyasova R.A.</i> Two periodic Gradient Gibbs measures on Cayley trees	201
<i>Imomaliyev J.N.</i> Exponential Bounds in One-Sided Determinantal Processes	204
<i>Jalilov O.R.</i> Random Products of Positive L_1 - Contractions and Asymptotic Difference Estimates	206
<i>Jenaliyev M.T.</i> On the fundamental system of smooth solenoidal functions in the cubic domain	207
<i>Jumadildayev Medet</i> k -disjoint perfect matchings in complete multipartite graphs	209
<i>Kalidolday A.K.</i> Marcinkiewicz-type interpolation theorem on net spaces	210
<i>Kadirkulov B.J., Uzaqbaeva D.E.</i> The method of potentials for the heat equation with involution	211
<i>Kadylkhanuly Y.</i> Solvability of the initial-boundary value problem for a nonlocal pseudo-hyperbolic equation	211
<i>Kairzhan Adilbek</i> A Hamiltonian Dysthe equation for water waves.	212
<i>Kal'menov T.Sh., Kydyrbaikyzy A.</i> On a regular problem for the heat equation in an arbitrary domain	213
<i>Kanetov B.E., Saktanov U.A., Kanetova D.E.</i> Selection principles in ordered uniform spaces	214
<i>Karazym M.</i> Existence of traveling wave solutions for the nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation	215
<i>Karimov Sh.T., Mamajonova R.A.</i> Initial-boundary value problem for a fractional-order beam vibration equation involving the Bessel operator	216
<i>Karimov Sh.T., Muydinov I.M.</i> The Cauchy Problem for a higher-order hyperbolic equation involving the Bessel operator with respect to time	218
<i>Kashkynbayev A.</i> Synchronization of Neural Networks Under Stochastic Deception Attacks Using Markov Switched Control and Its Application to Image Encryption	219
<i>Kassabek S.A.</i> Two-Dimensional Axisymmetric Two-Phase Stefan Model for Ultrafast Laser-Induced Melting	220
<i>Kazakbaeva K.B., Ruziev M.Kh.</i> Boundary value problem for a degenerate elliptic equation with singular coefficient in a vertical strip	221

<i>Kenenbayev E.</i> On Deriving Partial Differential Equations from Functional Relations . . .	222
<i>Kenenbayeva G.M.</i> Effects and Phenomena: Definitions, Categories, and Algorithms . . .	224
<i>Khankhasaev V.N., Munyaev S.I.</i> The third boundary value problem for a hyperbolic-parabolic equation with a variable thermal conductivity coefficient and a nonlinear radiation source	227
<i>Kharin S.N.</i> Isothermal coordinate method for solving Stefan-type electro contact problems	228
<i>Kharin S.N., Kavokin A.A., Kassabek S.A.</i> On the asymptotic representation of the solution of the heat exchange problem in electrical contacts under the Kohler effect . .	229
<i>Kholikova M.S., Eraliyeva O.M.</i> Transversally Cantor-like geodesics for meromorphic connections in Riemann surfaces	230
<i>Khudaibergenova S.B., Kadirbayeva Zh.M.</i> An efficient numerical approach for solving a problem for impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition	232
<i>Khushvaktov N.Kh.</i> The Cauchy problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina type fractional equation	233
<i>Koshanov B.D.</i> Fredholm solvability of a fourth-order elliptic equation with normal derivative boundary conditions on domains with non-compact piecewise smooth boundary	234
<i>Koshkarbayev N.</i> Numerical simulation of Korteweg-de Vries equation with moving Boundaries	235
<i>Kosmakova M.T., Akhmanova D.M., Tuleutaeva Zh.M.</i> On a Solution to a BVP for a loaded Time-Fractional Equation	236
<i>Kuanysh S.K., Bakirova E.A.</i> A stable and convergent method of lines for Fredholm-type parabolic integro-differential equations	238
<i>Kuanysh S.K., Isakova N.B., Abdimanapova P.B.</i> Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations	239
<i>Kuanyshov N.</i> Mixing Inequality for Homotopy Distance	240
<i>Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V.</i> On pseudo-uncountably-categorical structures and theories	242
<i>Kulpeshov B.Sh., Netaliyeva Ye.K.</i> On strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width	244
<i>Kuzeubayeva N.</i> On equivalent inequalities for discrete Hardy-type operators	246
<i>Kashkynbayev A., Ganesan S., Serikova T., Nuriyev Zh.</i> Finite-Time Output-Feedback Dissipative Observer for Delayed Uncertain Impulsive Fractional-Order Memristive Neural Networks	247
<i>Mamanov M.K., Yuldashev T.K.</i> Optimal control problem for an impulsive systems of functional-differential equations	247
<i>Mambetov S.A.</i> Inverse source problems for time-fractional diffusion with a singular involution operator	249
<i>Mamyrov A.O., Beisenbayeva K.S., Markhabatov N.D.</i> Model-theoretic properties of directed graphs	250
<i>Manarbek M., Tleukhanova N. T., Musabayeva G. K.</i> Bochkarev’s inequalities in the Anisotropic grand Lorentz Spaces	250
<i>Matin D.T., Akhazhanov T.B., Adilkanov A.N.</i> Pre-compactness of sets in the discrete Morrey space	251
<i>Melikuzieva D.M., Khamitov A.A.</i> Solving a Fourth-Order Equation in a Half-Infinite Domain using Green’s Function	252
<i>Meskhi A.</i> Extrapolation in Grand Banach Function Spaces	253
<i>Mukhamadiev F.G., Artykova Zh.A., Yuldashev T.K.</i> Density-type properties of the space of the solutions of an ordinary differential equation	254
<i>Mukhambetzhana M.A., Temirlan I.</i> On Estimates of weighted norms of series with respect to multiplicative systems with generalized monotone coefficients	256

<i>Muratova Kh.A.</i> Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the characteristic sequence $(n \mid m - 1, 1)$ and nilindex $n + m$	258
<i>Mussabayeva G. K.</i> On the Fourier Transform of Functions from the Mixed-Metric Lorentz Space $L_{2,\bar{r}}$	261
<i>Mussina N.M., Tungushbayeva I.O., Yeshkeyev A.R.</i> On the connection between holographic of hybrid Jonsson theories and their centers	262
<i>Mutalip R.</i> Automorphisms of free braided nonassociative algebras of rank 2	263
<i>Naimanova A.Zh.</i> The influence of the turbulence model on the high-speed reactive and non-reactive flows	263
<i>Nuraliyeva N.SH., Abduraimova Sh.T.</i> Multipoint Bitsadze-Samarskii problem for an elliptic equation in an infinite domain	264
<i>Nuraliyeva N.SH., Marubjonova M.M.</i> A three-parameter nonlocal problem involving the Integral condition for the subdiffusion equation	266
<i>Nurlybekuly T.</i> Convergence of noncommutative L_1 -martingales	268
<i>Orazbayev A., Zaighum M.A.</i> Generalized potential operators in weighted grand Herz spaces	269
<i>Ospanov M.N.</i> Unique solvability of a semi-periodic boundary value problem for a nonlinear third-order partial differential equation	270
<i>Pankov P.S., Tagaeva S.B.</i> Artificial intellect's senses and applying in mathematics	270
<i>Peretyat'kin M.G.</i> A definability property for isostone weak auto-free interpretations . . .	272
<i>Pell B., Kalizhanova A., Tursynkozha A., Dengi D., Kashkynbayev A., Kuang Y.</i> Modeling Tumor-Immune Dynamics: Synergistic Combination Treatment and the Role of Dynamic PD-L1 Regulation	273
<i>Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A.</i> Description of $G_k^{(2)}$ -periodic ground states for the four-state Potts-SOS model	274
<i>Rahmatullaev M.M., Usmonaliyev D.I.</i> Periodic ground states for the Ising-SOS model . .	276
<i>Rasulov A.S., Raimova G.M.</i> Application Markov branching process to the Solution of Nonlinear Kinetic Boltzmann Equation	278
<i>Rasulova M.K., Khalilova M.A.</i> Local behavior of geodesics of meromorphic connections around the poles of order two	279
<i>Sadybekov M.A., Koilyshov U.K., Beisenbayeva K.A.</i> Solution of a Sturm-type boundary value problem for a fractional parabolic equation with a discontinuous coefficient . .	280
<i>Sarsenaly D.S., Temirkhanova A.M.</i> The Oscillatory of one class of the High-Order Sturm-Liouville difference equation	281
<i>Salaeva D.S., Kuldoshev K.K.</i> On the Functional Properties of the α -Subharmonic Measure $\omega_\alpha^*(z, K, D)$	282
<i>Slyamkhan M.M.</i> Some lower bounds for the first eigenvalue of the fractional laplacian . .	283
<i>Sobirov Z.A., Norkulova R.B.</i> Cauchy problem for the time-fractional Korteweg-de Vries equation	284
<i>Sobirov Z. A., Kulaev R. Ch., Turemuratova A. A.</i> Initial-boundary value problem for the space-time fractional diffusion equation with edge-dependent spatial fractional order on metric graphs	285
<i>Suleimanova S.Sh.</i> Analytical representation of the electric field in the problem of electron plasma dynamics with an arbitrary degree of degeneracy	286
<i>Suragan D.</i> On Geometric Lower Bounds for the Polyharmonic Dirichlet Spectrum	288
<i>Tashpulatov S.M.</i> Spectra of the energy operator of the one-magnon systems in the Heisenberg ferromagnet with impurity and nearest neighbor interactions and with one-ion anisotropii	289
<i>Tleubergenov M.I., Vassilina G.K., Azhymbaev D.T.</i> On the inverse problem of variational calculus for a system of first-order differential equations with degenerate diffusion . .	291
<i>Tobakhanov N.N.</i> A note on lifespan estimates for higher-order parabolic equations	293
<i>Torebek B.T.</i> Parabolic problems whose Fujita critical exponent is not given by scaling . .	294

<i>Tulendinova A., Ghorbanalizadeh A., Zaighum M.A.</i> Vainikko Operator on Grand Morrey Sequence Spaces	294
<i>Tungushbayeva I.O.</i> On existentially prime theories	295
<i>Turaev R.K., Yuldashev T.K., Pirmatov A.Z.</i> On Hutchinson population model for differential equations with maxima	295
<i>Turdieva N.R.</i> Combinatorial Structure of Markov Partitions for Algebraic Tent Maps . .	297
<i>Tleukhanova N.T. Ussentay A.B.</i> The O’Neil–Type inequalities for Besov–Morrey spaces .	299
<i>Verbovskiy V.V.</i> On decidability of pure linear orderings of Morley o-rank 1	300
<i>Verbovskiy V.V.</i> On the local strict order property inside a cut in ordered structures . .	300
<i>Verbovskiy V.V., Yershigeshova A.D.</i> Pure linear orderings of Morley o-rank 1 and o-degree 3 and 4	301
<i>Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Zhumabekova G.E.</i> On the perfection of Jonsson theories under stability and locally E -finitely basedness conditions	302
<i>Yeshkeyev A.R., Zhumabekova G.E., Duisenbekova G.S.</i> The property of positive fragments of almost Δ -Jonsson sets	304
<i>Yeshkeyev A.R., Zhumabekova G.E., Nuraly A.B.</i> The connection between a K_T -normal Jonsson theory and an arbitrary fragment of its almost Jonsson set	305
<i>Yeshkeyev A.R., Popova N.V., Issaeva A.K.</i> Fractal Models and Fractal Theories	307
<i>Yeskermessuly A.</i> Very weak solutions to the Schrödinger equation for Sturm–Liouville operator with singular coefficients	309
<i>Yessirkegenov N.A.</i> Stability of L^p -Poincaré and Heisenberg–Pauli–Weyl inequalities with applications to spectral gaps	310
<i>Yuldashev T.K., Shermamatov Zh.Zh.</i> Optimal control problem in inverse boundary regime for a pseudoparabolic equation	310
<i>Zahir Z., Dinasyl T.</i> Estimation for Discrete Hardy–Littlewood Maximal Operator on Discrete Weighted Morrey Spaces	312
<i>Zaighum M.A., Nursultanov E.D., Suragan D.</i> On Besov’s Problem	313
<i>Zhailybayev R.E.</i> On the Stability of a Finite Difference Scheme for Time–Space Fractional Diffusion–Wave Equations	313
<i>Zhakhayev B.</i> Distributive lattices of varieties of assosymmetric algebras	315
<i>Zhangabergenova N.S., Temirkhanova A.M.</i> On weighted estimates for certain quasilinear operators	315
<i>Zhantassova B.B., Orumbayeva N.T., Amangeldi A., Zhaksylyk A.</i> On a solution of the periodic boundary value problem for a hyperbolic equation with a fractional derivative	316
<i>Zhapparova S.D.</i> Solution of the Dirichlet problem for the heat equation with a discontinuous coefficient and general conjugation conditions	318
<i>Zheentaeva Zh.K., Zhakypova A.A.</i> Category of dynamic systems with special solutions (with dominance)	319
<i>Zhoraev A.H., Isaev D.B.</i> Category of topological spaces with movement of stretched objects	320
<i>Zhumatov S.S.</i> Stability of control systems with differentiable nonlinearity in the vicinity of a program manifold	321
<i>Zunzunov R.T., Khudoyorov A.A.</i> On a boundary value problem for a mixed-type equation of the second kind in an unbounded domain	323
<i>Слямқанова А.М., Жаңсарбаева Л.К., Кастро Кастилья А.К.</i> Салмақтық Соболев кеңістіктеріндегі кубтық Шредингер теңдеуінің шешімдерінің тегістігі	324
<i>Жайдақбаева Д.К., Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.</i> Асимптотическое решение сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с нестабильным спектральным значением	325
<i>Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф., Сапаков Д.А.</i> О методе регуляризации для сингулярно возмущенной дифференциальной системы с параметрическим усилением и с быстро осциллирующей неоднородностью	327

<i>Керимбеков А., Берикканов Р.Е.</i> Оптимизация тепловых процессов: задача синтеза и уравнение Беллмана	329
<i>Егоров И.Е., Сафонов С.В.</i> Вторая краевая задача с интегральным граничным условием по времени для уравнения смешанного типа второго порядка	330
<i>Ashyralyev Charyyar</i> Source identification in an integral-type nonlocal problem for a reverse parabolic equation	331
СITech-2026	332
<i>Абдиев К.С., Алпысбаева А.А.</i> Информатика мұғалімінің құзыреттіліктері: кәсіби стандарт контекстіндегі заманауи талаптар	333
<i>Абишова Г.Б., Заурбеков Н.С.</i> Білім алушылардың жеке оқыту траекторияларын құруға арналған жасанды интеллект негізіндегі интеллектуалды ақпараттық жүйе әзірлеу	335
<i>Абугалиева К.С., Малгаждаров Е.А., Темирбеков Н.М.</i> Стокс теңдеулері үшін спектрлік есептердің сандық шешімдері	336
<i>Алпысова А.С., Малгаждаров Е.А., Акаев А.М.</i> Графическое представления элементарных функций в четырехмерной математике	337
<i>Әбілдаева Ж.Т., Ускенбаева Р.К., Кальпеева Ж.Б., Дәуітбаева А.О., Турлугулова Н.А., Есіркепова А.У.</i> Топтық сатып алулар мен бюджетті оңтайлы болжау және бақылау мәселелерін шешудің машиналық оқыту әдістері мен дәстүрлі тәсілдерінің талдауы	338
<i>Әлімгазы А.С., Тамабай Д.О.</i> Қала атмосферасындағы ластаушы қоспалардың таралуын сандық модельдеу	340
<i>Әмірбеков А.А., Ибашова А.Б., Әмірбекұлы А.</i> Основные положения использования искусственного интеллекта в образовании	341
<i>Базарбаева Ү.Қ., Қалданов Б.Б.</i> Мектеп информатикасындағы «Ақпарат және ақпараттық үдерістер» бөлімін оқытуда инфографиканы қолдану	342
<i>Базарбаева Ү.Қ., Шекербекова Ш.Т., Арынова Г.С.</i> Болашақ информатика мұғалімдеріне ақпараттық үдерістерді оқытуда жасанды интеллект құралын пайдалану	343
<i>Бидайбеков Е.Ы.</i> Білім берудің парадигмалық ауысуы хақында	345
<i>Chung R.</i> New Climate Economics as Driver of Clean Energy Transition for Net Zero 2050	347
<i>Елубаева Д.Д.</i> Подготовка учителя информатики к использованию ассистивных технологий в условиях инклюзивного образования: потенциал программ микроквалификаций	348
<i>Шакирова С.Б., Жабаев Е.Х.</i> Робототехника оқытуда виртуалды симуляциялық орталардың дидактикалық мүмкіндіктері	350
<i>Закирова А.Б., Ахаева Ж.Б.</i> Инновационная технология обучения высшей математике с использованием искусственного интеллекта для повышения карьерных перспектив ит-кадров	351
<i>Жусипов И.</i> Интеграция ИИ-адаптивных методов в подготовку ИТ-специалистов: результаты экспериментального внедрения	353
<i>Қалданов Б.Б., Бидайбеков Е.Ы., Уразымбетов М.С.</i> Электрондық иерархиялық құрылымдар негізінде оқу мазмұнын құрылымдау және цифрлық оқу ресурстарын қалыптастыру	354
<i>Кабулова А.А., Касенов С.Е.</i> Конвекция–диффузия–реакция теңдеуін нейрожелілер негізінде шешу	356
<i>Қамила А.Ә., Қудайбергенов А.К.</i> Машиналық оқыту әдістерін пайдалана отырып бұрғылау бағанасының тұрақтылығын талдау	358
<i>Кенес А.К., Ахметжанов М.А.</i> Жанармайды сақтау және тарату процестерін бақылау және оңтайландыру үшін мұнай базасының цифрлық егізін әзірлеу.	359
<i>Копжасарова Ж.Б., Кемельбекова Ж.С.</i> Білім беруде генеративті жасанды интеллектті (GenAI) қолдану: артықшылықтары, тәуекелдері және заманауи технологиялар	360

<i>Құлданбаева А.Ж., Каржаубаев К.К.</i> Больцман торлы әдісі арқылы Куэтта ағынындағы диффузиялық үрдісті сандық зерттеу	362
<i>Құдайбергенова А.Қ., Даркенбаев Д.К.</i> Машиналық оқыту алгоритмдері негізінде су тасқынына байланысты төтенше жағдайларды болжауды модельдеу	363
<i>Қуанова А., Бидайбеков Е.Ы., Ревшенова М.И.</i> Орта мектепте робототехниканы оқытуда RoboBil мобильді қосымшасының мүмкіндіктері	364
<i>Курина Г.А.</i> О разных подходах к асимптотическому решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи управления с закреплёнными концами	365
<i>Криворотько О.И., Мартыненко А.С.</i> Диффузионная аппроксимация динамики распределений в агент-ориентированной модели экономики с банковским сектором	367
<i>Латинов Н.К., Махаров Т.А.</i> Искусственный интеллект в образовании: стратегии внедрения и управления рисками	368
<i>Малгаждаров Е.А., Жаксылыкова Ж.Р., Темирбеков Н.М.</i> Оценка точности метода фиктивных областей для уравнений Навье - Стокса на основе построенного точного решения	370
<i>Махаров Т.А., Латинов Н.К.</i> Использование цифровых образовательных технологий в высшем образовании как фактор повышения качества обучения	371
<i>Мұсират Е., Ошанова Н.Т., Камалова Г.Б., Салғожя И.Т.</i> Педагогтердің цифрлық технологиялар саласында үздіксіз кәсіби дамуына арналған адаптивті микробіліктілік платформасын әзірлеудің тұжырымдамалық алғышарттары	373
<i>Мұханова Т.Г., Тамабай Д.О.</i> Вейвлет базистерін қолдана отырып галеркин әдісі арқылы Бюргерс теңдеуінің жуық шешімін зерттеу	374
<i>Нурбекова А.Ж.</i> Жасанды интеллект технологиясын тиімді пайдалануда 4к құзыреттілігін игерудің маңыздылығы	375
<i>Нурбекова Ж.К., Кемелбек М.Н.</i> Білімді басқаруға арналған агенттік RAG: іздеу, дәлелділік тексеруі және контентті жаңарту	377
<i>Нурбекова Ж.К., Сағимбаева А.Е., Жаксылыков А.Е.</i> GENAI дәуірінде болашақ IT мамандарының программалау дағдыларын бағалау әдістері	379
<i>Оразалы Д.Е., Берденова Б.А.</i> Нығыздалған белсендірілген көмірге көмірқышқыл газының адсорбциясын модельдеу	381
<i>Өміртай Қ.А., Бекетаева А.О.</i> Сипаттамаларға негізделген айыппұлдық функциялар әдісімен каналдағы көпкомпонентті дыбыстан жоғары газ ағынын модельдеу	382
<i>Пірімжанов Н.А., Темирбеков Н.М., Касенов С.Е.</i> Метод Random Forest для прогноза концентрации золота	383
<i>Сабраев Қ.Ж., Бидайбеков Е.Ы., Жабаев Е.Х.</i> Программалауды оқытуда жасанды интеллект құралдарын қолданудың ерекшеліктері	384
<i>Сайбеков Н., Калдарбек Е., Кудайберген М., Амреева А.</i> Реконструкция медицинских изображений: от классического преобразования Радона к методам глубокого обучения в низкодозовой компьютерной томографии	386
<i>Тахиров Ж.О., Анваржонов Б.Б.</i> О численных исследованиях уравнений реакции-диффузии с условиями Стефана	387
<i>Темирбеков Н.М., Керимакын А.</i> Уравнения Навье–Стокса–Бринкмана в цилиндрических координатах. Определение слабого решения начально–краевой задачи	389
<i>Темирбеков Н.М., Муратова А.К.</i> Численное решение уравнений Навье–Стокса методом конечных элементов на вычислительной платформе FEniCS	390
<i>Темирбеков Н.М., Гавриленко О.Д., Худайберген Б.Б., Темирбекова Л.Н., Сейтмуратова З.И.</i> Алгоритм обучения полносвязной нейронной сети с обратным распространением ошибки	391
<i>Тлеулесова А.М.</i> Интеграция интеллектуальных обучающих систем в преподавание высшей математики в многоязычной среде: опыт и количественная оценка эффективности	392

<i>Темирбекова Л.Н., Гавриленко О.Д., Темирбеков Н.М.</i> Прогнозное моделирование литиевой минерализации на основе геоданных и методов машинного обучения в калба-нарымской металлогенической зоне	394
<i>Туткушева Ж.С., Отаров Х.Т.</i> Детерминированный метод глобальной оптимизации для задачи нелинейной регрессии	395
<i>Тұрашова Ш.П., Даубаев З.Н.</i> Болашақ информатика мұғалімдерінің IoT саласындағы құзыреттерін қалыптастыру құралы ретінде IoT Board білім беру жинағы негізінде «ақылды үй» электрондық практикумын әзірлеу	396
<i>Тұрғынбаева А.А., Керімақын А., Ерланбек Ә.Е.</i> Жасанды интеллект әдістерін пайдалану арқылы үй жиһаздарына арналған e-commerce ақпараттық жүйесін модельдеу	398
<i>Abzhapparova A.B., Karzhaubayev K.K.</i> Numerical study of the settling patterns of solid particles using LBM	399
<i>Akhmedova D. D.</i> Lotka–Volterra Operators on the Simplex S^5 with Bipartite Interaction Graphs	400
<i>Aliev F.A., Hajiyeveva N.S.</i> A new eigenvector-based method for the matrix algebraic Riccati equation	402
<i>Artykbaev A.</i> Development of the Geometric Theory Related to Solving the Elliptic Monge–Ampère Equation.	403
<i>Baranov N.A.</i> Identification of vortex wake parameters using lidar measurement data	404
<i>Rasulov M.S., Kholboev B.M.</i> A chemotactic-competition system with free boundary	405
<i>Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A.</i> Algorithmic Construction of Homogeneous Fixed-Point Cards in Six-Species Discrete Lotka–Volterra Systems	406
<i>Eshmamatova D.B., Ochilova N.K.</i> Computation and Analysis of Weak Solutions for Non-linear Degenerate Elliptic Equations	408
<i>Eyniyev R.I.</i> Machine Learning and Deep Learning Methods for Decision-Making in Educational Non-Player Characters on Cardiovascular Disease	410
<i>Izeyev S.N., Zhakebayev D.B.</i> The Black–Scholes Mathematical Model in Option Pricing Problems	412
<i>Karimov Sh.T., Islamov E.R.</i> An Operator-Spline Approach for the Numerical Solution of Boundary Value Problems for the Euler–Poisson–Darboux Equation with Singular Coefficients	414
<i>Khudaibergen B.B., Temirbekov A.N., Kasenov S.E.</i> Spatial Generalization of Machine Learning in Mineral Prospectivity Modeling	416
<i>Kerimkhulle S., Adalbek A.</i> Multidimensional Markov Modeling of Investment Effects in the Kazakhstan Economy	417
<i>Khudaibergen B.B., Temirbekov A.N.</i> Numerical solution of computational hydrodynamics problems using the FEniCS software package	419
<i>Khudaibergen B.B., Temirbekov N.M., Temirbekov A.N., Kasenov S.E.</i> Probabilistic Modeling of Gold Mineralization Using Deep Learning: A Case Study of the Western Kalba Region	420
<i>Kulatay A.A., Zhaisanova D.S.</i> Mathematical Modeling of Adaptive Processes in High-Load Educational Environments Based on Aqyl Battle	421
<i>Parovik R.I.</i> A neural network method for solving the fractional Lane–Emden equation based on orthogonal Laguerre polynomials	423
<i>Polatov A.M., Ikramov A.M., Adambaev U., Wei G., Jumaniyozov S. P.</i> Numerical Solving a Dynamic Coupled Thermoelasticity Problem	424
<i>Sarsembayeva T.S., Oskembayeva A.A.</i> Development of an AI Agent for Navigation of Academic Policy Documents: Case Study of Al-Farabi Kazakh National University	425
<i>Shamshiev A.</i> R_2^1 – The parabola and similar properties of a cycle in the semi-Euclidean plane	427

<i>Smakhanova A., Kassymova A., Dzhalbirova Zh., Madelkhanova A.</i> Development of a business process model for university educational activities	429
<i>Solijanov K.A.</i> Degenerate Dynamics and Stability Analysis of a Discrete Lotka–Volterra Model on S^4	430
<i>Soltangeldinova M.K., Mansurova M.E., Sakypbekova M.ZH.</i> Image analysis-based approach for plant condition monitoring	432
<i>Srazh A.S., Rysbauly B., Satybaldina A.N.</i> The Inverse Heat Conduction Problem in a Multilayer Cylindrical System	433
<i>Shynggyskyzy A., Karzhaubayev K.K.</i> Numerical modeling of Taylor-Green vortex decay using the lattice Boltzmann method	434
<i>Tamabay D.O., Seitova A.S., Seitova A.S.</i> Mathematical Modeling of Surface Geochemical Fields via Fredholm Integral Equations	435
<i>Tamabay D.O., Mukhanova T.G., Sarsenbayeva A.Y.</i> Adaptive Wavelet Galerkin Approximation of the Burgers Equation	436
<i>Tanashova M.E.</i> Data Preprocessing and Spatial Problem Formulation for Interpolation and Extrapolation of Gold Concentration	437
<i>Temirbekov N.M., Zhumagulov B.T., Omariyeva D.A.</i> Modeling of Two-Phase Nonequilibrium Filtration Using Stabilized Finite Element Methods	438
<i>Xakimova D.A.</i> Computational Analysis of Invariant Sets and Stability in a Discrete Lotka–Volterra SI_1I_2V Epidemic Model	440
<i>Xamrakulov B.X.</i> Finite-difference model of the two-dimensional filtration equation by the Samarskii method	442
<i>Zhumali A.S., Karzhaubayev K.K., Zhakebayev D.B.</i> Numerical simulation of convective heat transfer in flows laden with finite-size buoyant particles	443
<i>Zafarli I.Z.</i> Fundamentals of using modern information technologies in cyber systems	444

Кері және қисынды емес есептер Обратные и некорректные задачи Inverse and Ill-Posed Problems 446

<i>Абдираманов Ж.А., Муканбеткалиева А.А.</i> Численное моделирование колебаний плоской мембраны методом конечных разностей	447
<i>Абдираманов Ж.А., Диханбаева Д.Ж.</i> Численное решение смешанной задачи для полулинейного волнового уравнения в неограниченной области с использованием DtN-граничных условий	448
<i>Азизбеков Э.И., Мегралиев Я.Т.</i> Нелокальная обратная краевая задача для параболического уравнения с дробной производной по времени	450
<i>Алдашев С.А., Кабанихин С.И., Бектемесов М.А.</i> Неоднозначная разрешимость смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гипербола-эллиптических уравнений в моделях глиомы	452
<i>Амонов Б.Б.</i> Задача с неполным условием смещения для уравнения смешанного типа.	454
<i>Аширбаева А.Ж., Каримова Г.А.</i> Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка со степенными особенностями	456
<i>Аширбаева А.Ж., Туленбаева Р.А., Дыйканов Д.Д.</i> Использование метода дополнительного аргумента для решения обратной задачи	457
<i>Есенәлі А.Б., Папышев А.А.</i> Абель интегралдық теңдеуін қолдану арқылы проекциялық деректер бойынша геометриялық пішінді қалпына келтіру есебі	458
<i>Байкен Ж., Айтжанов С.Е.</i> Псевдогиперболалық теңдеу үшін кері есептің шешімділігі	460
<i>Баканов Г.Б., Мелдебекова С.К.</i> Оценки устойчивости дискретных аналогов задач интегральной геометрии	461
<i>Бекешов Т.О., Токторбаев А.М.</i> О существовании обобщенного решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных 1- порядка	461

<i>Бекешов Т.О., Асанов А.</i> Система неклассических интегральных уравнений Вольтерра 1- рода	463
<i>Бектемесов Ж.М., Султан Б.Б.</i> Обратная задача в моделировании роста опухоли: применение модели гомпертца	464
<i>Бердышев А.С., Марат А.Е.</i> Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболического типа третьего порядка	466
<i>Васиева Х.Г.</i> Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков	467
<i>Даулетбай М.Н., Касенов С.Е., Тлеулесова А.М.</i> Вариационный метод оптимизации для решения двумерной обратной магнитотеллурической задачи	469
<i>Джамалов С.З.</i> Прямые и обратные задачи для многомерного уравнения смешанного типа высокого порядка	471
<i>Джумагулов Н.Н., Шияпов Қ.М.</i> Математическое моделирование и анализ динамики интерфейса двухфазного потока в пористой среде	472
<i>Доцанова М.К., Касенов С.Е., Тлеулесова А.М.</i> Екі камералы медицина-биологиялық кері есебі үшін сәйкестендіруді зерттеу	473
<i>Жолдас Н.А., Мансурова М.Е.</i> Математические и машинно-обучающие методы выявления стресс-подобных физиологических состояний по данным носимых сенсоров	474
<i>Жұмабек Е.Б., Қаныбек Ө.К., Амреева А.М.</i> Қалалардағы атмосфералық ауаның сапасын болжау үшін машиналық оқыту әдістерін қолдану тиімділігін зерттеу	475
<i>Звонарева Т.А., Криворотько О.И.</i> Численное решение прямой и обратной задач оптимального контроля эпидемий с учетом возрастных особенностей	476
<i>Каримов К.Т., Олимова Д.С.</i> Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами и с двумя плоскостями изменения типа	478
<i>Касенов С.Е., Саханова Ж.А.</i> Применение метода Ландвебера к обратной задаче электродинамики	480
<i>Касенов С.Е., Тлеулесова А.М., Бакытбекова Б.Д., Луценко Я.Г.</i> Итерационный метод Ландвебера для обратной задачи акустики	482
<i>Касенов С.Е., Тлеулесова А.М., Асанова Р.А.</i> Численное решение обратной задачи термоакустики с применением QFT и градиентного метода	483
<i>Кожанов А.И.</i> Коэффициентные обратные задачи временного типа для параболических и квазипараболических уравнений	485
<i>Кожанов А.И., Жалгасова К.А.</i> Задачи идентификации внешнего воздействия комбинированного вида для гиперболических уравнений первого порядка	485
<i>Кожобеков К.Г., Сопуев А.А.</i> Краевые задачи для уравнения смешанного параболического типа третьего порядка с разрывными и интегральными условиями склеивания	486
<i>Кожобекова П.Ж., Сабиржанов М.Т.</i> Сравнительный анализ эффективности точечного и распределенного теплового воздействия на неоднородную биологическую ткань	488
<i>Максумова Ж.К., Тлеулесова А.М., Касенов С.Е., Бектемесов Ж.М., Тугенбаева Ж.С.</i> Сызықты емес реакция-диффузия теңдеуі үшін тура есепті шешудің сандық әдістері	489
<i>Маматов Ж. А., Кожанов А. И.</i> Разрешимость краевых задач для многомерных ультрапараболических уравнений четвертого порядка	490
<i>Мирсабуров М., Маматмұминов Д.Т.</i> Обобщенная задача Геллерстедта с аналогом условия Франкля	491
<i>Мирсабуров М., Тураев Р.Н., Мирзаев Ф.С.</i> О единственности решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа с различными порядками вырождения	493

<i>Мирсабурова Д.Т.</i> Задачи Геллерстедта-Моисеева с данными на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. . .	494
<i>Рустамова М.Р., Мадрахимова З.С.</i> Краевая задача для уравнения смешанного типа с вырождением типа и порядка	495
<i>Сабиржанов М.Т., Кожобекова П.Ж.</i> О применимости методов Векуа и Отельбаева к краевым задачам для полигармонических уравнений	497
<i>Сатыбаев А.Дж., Кокозова А.К., Анищенко Ю.В., Курманалиева Г.С.</i> Численные методы решения обратных задач волновых процессов	499
<i>Солтанбекова Қ.Қ., Касенов С.Е.</i> Бірөлшемді Пеннес тендеуінің тура есебін сандық әдіспен шешу	500
<i>Сопуев А., Жээнбаев Н.А.</i> Краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка	502
<i>Султанов М.А., Мисилов В.Е., Сарсенов Б.Т.</i> Алгоритм численного решения обратной задачи нахождения правой части для двумерного эллиптического уравнения	504
<i>Тоқтагулов Н.Е.</i> Гравиметрияның екіөлшемді кері геометриялық есебіндегі функционалдың дифференциалдық қасиеттерін зерттеу	505
<i>Фармонов Ш.Р.</i> Задача с нелокальными условиями для уравнения смешанного типа второго рода с двумя линиями вырождения	506
<i>Фаязов К.С., Худайбергенов Я.К.</i> Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных смешанного типа второго порядка с двумя линиями вырождения	507
<i>Шпади Ю.Р.</i> Применение преобразования Лапласа к обратной задаче теплопроводности в области с подвижной границей	509
<i>Abdiramanov Zh.A., Berdyshev A.S.</i> Comparative Analysis and Practical Guidelines for Solving Time-Fractional Hyperbolic Equations with Memory	510
<i>Armankyzy Z., Mansurova M.E., Sarsembayeva T.S.</i> Optimization of Neural Network Models for Biometric Identification on Edge IoT Devices	511
<i>Asanov A., Kadenova Z.A., Bekeshova D.A.</i> One Class of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the First Kind on a Semi-Axis	513
<i>Ashurov R.R., Yamamoto M.</i> Uniqueness for an Inverse Problem of Determining Order and Temporal Factor of the Source for Subdiffusion Equation	514
<i>Assanova A.T., Sabalakhova A.P.</i> Identification Parameter Problem for a Family Evolution Equations with Functional Term	514
<i>Babaev M.M.</i> Optimal Control Problem for a Fifth-Order Partial Differential Equation . .	516
<i>Begmatov Akh.Kh., Ismoilov A.S., Bozorov A.A.</i> Classification of Weak and Strong Ill-Posedness in Integral Geometry with Conical Integration Geometry	517
<i>Bektemessov ZH., Balgabay A.</i> Generative Neural Networks as Operators in Inverse Problems of Tumor Growth Dynamics	518
<i>Bektemessov Zh.M., Turarbek A.T., Sotsialova U.K., Nurgali A.A.</i> Mathematical Modeling of Fakes Spread in Social Networks	520
<i>Boranbek K., Kazhymkan A.</i> Finite Element Method for the Brinkman Model	522
<i>Botirov M.A., Kholikova M.S.</i> Sequence of meromorphic connections in Riemann sphere. Some properties of k-differentials in Riemann surfaces	523
<i>Djumayozov U.Z., Rakhmonova R.A., Abdirakhmonova M.N.</i> Poisson-Type Equations for Thermoelastic Strains with Boundary Conditions	525
<i>Felde I., Mosavi A., Mansurova M.E.</i> ANN Supporting Determination of Transient Heat Transfer Coefficients	526
<i>Felde I., Mosavi A., Mansurova M.</i> FWA Based Approach for Solution Complex IHCP Problems	527
<i>Ibraimova A.K., Shiyapov K.M., Sakhabayeva A.M., Rysbay M.A.</i> Numerical Methods for Solving Non-Stationary Wave Tasks in Porous-Elastic Media	528
<i>Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.</i> Mathematical Foundations of Ultrasound Tomography .	529

<i>Kassabek S.A., Rayev Zh.</i> Heat polynomials method for solving inverse Cauchy–Stefan problems	530
<i>Kerimkhulle S., Adalbek A.</i> Multidimensional Markov Modeling of Investment Effects in the Kazakhstan Economy	532
<i>Khompysh Kh.</i> Inverse source problems for Navier-Stokes equations	533
<i>Khompysh Kh., Mukhambetkaliyev M.B., Shazyndayeva M.</i> Inverse Boundary Problem for a Linear Pseudoparabolic Equation	534
<i>Mamanazarov A.O.</i> An Inverse Source Problem for a Time-Fractional Pseudo-Parabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity	535
<i>Rysbayeva N.B.</i> Nonlinear Haller Equation of Moisture Transfer: Difference Problem, a Priori Estimates, Convergence of Difference Problem, Inverse Problem	537
<i>Sattarov A. M.</i> The Central Extension of a Given Algebra	538
<i>Seilbekov B.N.</i> On the Solution of an Inverse Problem for a Fourth-Order Hyperbolic Equation with Complex-Valued Parameters	539
<i>Shakir A.G.</i> An Inverse Problem for Pseudoparabolic Equation with Memory Term and Damping	540
<i>Shishlenin M.A., Kabanikhin S.I.</i> Ill-Posed Continuation Problems of Mathematical Physics	541
<i>Shiyapov K.M., Kuanova N.S.</i> Development of Computational Algorithms for Numerical Simulation of Leaching Processes	542
<i>Shiyapov K.M., Sakhabayeva A.M., Gubaidullina D.R.</i> Modeling and Reconstruction of Parameters of a Viscoelastic Medium	543
<i>Shiyapov K.M., Yussupova A.E., Turganbek K.Zh.</i> Numerical Study of Wave Stability in a Porous Medium	545
<i>Sigalovsky M.</i> An Ill-Posed Inverse Problem for Hidden Cognitive Dynamics from Locomotion Time Data	547
<i>Sotsialova U.K., Bektemessov ZH.M.</i> Parameter Identification and Regularization in the Logistic Model of Tumor Growth	548
<i>Usmonov D.A.</i> Goursat Type Problem for a Degenerate Barenblatt–Zheltov–Kochina Type Equation with a Regularized Prabhakar Fractional Derivative	549
<i>Yergaliyev M.</i> Inverse Problems for the Burgers Equation in a Degenerate Domain	550

Ғылыми жасанды интеллект Научный искусственный интеллект Scientific Artificial Intelligence 551

<i>Атаниязова А.С., Қайырбекова А.Ж.</i> Қашықтықтан зондтау деректері мен машиналық оқыту негізінде су нысандарының экологиялық жағдайын бақылаудың автоматтандырылған кешенді жүйесін әзірлеу	552
<i>Жұмағалиева М.Ж., Ерқос А.</i> Медициналық деректерді өңдеуге арналған машиналық оқыту әдісін әзірлеу және көмекші кеңес ақпаратын ұсыну	553
<i>Камбаров Д.Б.</i> Өндірістегі биоқауіпсіздікті қамтамасыз етуде жасанды интеллект негізіндегі жүйелерді қолдану	554
<i>Күрішбай Н.А., Шаяхметова А.С.</i> Биосигналдарды мультимодальды талдау және Байес қорытындысы негізінде аллергиялық реакцияларды ерте болжаудың интеграцияланған жүйесін әзірлеу	555
<i>Құрметқан Т., Мамырбаев Ө.Ж.</i> Сұрақ-жауап жүйелеріндегі білім қайшылықтарын азайту әдістерін зерттеу	556
<i>Мазаков Т.Ж., Дузбаев Т.Т.</i> Нан-тоқаш өнімдерін пісіру процесін математикалық модельдеу	559
<i>Мәткерім Б., Қасымбек Н.М., Қабдығалиев Н.Қ., Нажибаева М.Т.</i> MDH қолдана отырып CG әдісі үшін параллель алгоритмді әзірлеу	560
<i>Мусагулова Г.Ш., Байшоланова Қ.С.</i> Гибридті интеллектуалды кірістілікті болжау жүйесі: фундаменталды факторларды және нейрожелілік түзетуді интеграциялау	561

<i>Омархалиева Н.Г., Тукеев У.А.</i> Түрік тілінде сөйлеуді тану және мәтінді қорытындылаудың нейрондық модельдерін жасау және зерттеу	563
<i>Сайлау А.Ж., Мансурова М.Е., Оспан Ә.Ф.</i> Қазақ тіліне арналған трансформерлік модельдерді компрессиялық-саналы оңтайландыру: дистилляция және квантизацияның математикалық негіздері	564
<i>Самбетбаева А.К.</i> YOLOv11 архитектурасы негізінде жол төсемінің зақымдануын нақты уақыт режимінде жоғары дәлдікпен анықтау	566
<i>Сыдығалы А., Атаниязова А.</i> Спутниктік деректер мен машиналық оқытуды қолдана отырып, ауа сапасын бақылау жүйесінің модулін өзірлеу	568
<i>Тлетай Ш.Т., Амирханова Г.А.</i> Нан зауытында өнім мен ингредиент қорларын предиктивті аналитика негізінде басқаруды оңтайландыру	569
<i>Азатбекулы Н., Муханбет А.А., Дарибаев Б.С., Иманкулов Т.С.</i> Параметрически эффективные гибридные квантовые PINN для решения уравнения Бакли–Леверетта	571
<i>Анетбаев А.А., Ахмедов Д.Ш.</i> Модифицированный алгоритм реализации детектора FAST для выделения ключевых точек на цифровых изображениях местности . .	572
<i>Ахметова Ә.Б., Өксікбаев Е.Е.</i> Применение жидких нейронных сетей для задачи ориентации автономного робота	574
<i>Аширбаева А.Ж., Садыкова Г.К., Сапиев Ж.Ә.</i> Миграционные процессы в Кыргызстане и их прогнозирование	576
<i>Бекеле С.Д., Иманкулов Т., Кенжебек Е.</i> Идентификация отношения вязкостей в модели Бакли–Леверетта с помощью PINN	577
<i>Дәруіш С.З., Утегенова А.У.</i> Алгоритмы машинного обучения для прогнозирования загрязнения территорий районов падения отделяющихся частей ракет-носителей	578
<i>Жилкибаева С.К., Утенов М.У., Жунисбекова Д.А.</i> Математические методы и интеллектуальные алгоритмы анализа динамических нагрузок звеньев манипуляторов в задачах промышленной робототехники	580
<i>Закирова А.Б., Ахаева Ж.Б.</i> Инновационная технология обучения высшей математике с использованием искусственного интеллекта для повышения карьерных перспектив ИТ-кадров	581
<i>Иманкулов Т., Кенжебек Е., Бекеле С.Д., Ахмед-Заки Д.</i> Физически информированные KAN сети для решения задачи вытеснения нефти	583
<i>Исмаилов Б.Р., Исмаилов Х.Б., Сулеймен О.М.</i> О роли искусственного интеллекта в математическом моделировании промышленных процессов	585
<i>Кемелбеков Н.К., Рахимова Д.Р.</i> Математические модели прогнозирования временных рядов на основе трансформерной архитектуры	586
<i>Кенжебек Е., Иманкулов Т., Бекеле С.Д., Ахмед-Заки Д.</i> Физически-информированная нейросеть для двухфазной фильтрации в модели Бакли–Леверетта	587
<i>Маатов К.М., Мамбетов Ж.И.</i> Оптимизация структуры посевных площадей с использованием ms excel solver и алгоритмов машинного обучения	588
<i>Мустафин М.Б., Муханбет А.А., Касымбек Н.М.</i> Сравнительный анализ эффективности параллельных алгоритмов машинного обучения на многопроцессорных и GPU-архитектурах	589
<i>Мухаммеджанова Д.М.</i> Математическое моделирование безопасности медицинских данных с учётом AI-обнаружения и ресурса реагирования	590
<i>Өксікбаев Е.Е., Ахметова Ә.Б.</i> Интеллектуальные мультиагентные системы для обработки больших данных	591
<i>Сапаргали Алмаз, Айбагаров Серик, Муханбет Аксултан</i> Глубокое обучение с подкреплением для энергоэффективного управления интеллектуальными зданиями	593
<i>Сарбасова А.Ә.</i> Математическая модель и алгоритм автоматизированного сопоставления дисциплин колледжа и образовательных программ вуза на основе методов искусственного интеллекта	594

<i>Сулейменова Мадина</i> Машинное обучение для прогнозирования риска сердечно-сосудистых заболеваний и преждевременного сердечно-сосудистого старения на основе клинико-лабораторных и анкетных данных: прототип системы CARDIO RISK KZ	596
<i>Темірбеков Н.М., Керімақың А.</i> Уравнения Навье–Стокса–Бринкмана в цилиндрических координатах. Определение слабого решения начально–краевой задачи . . .	597
<i>Тұрар О.Н., Мұстафин М.Б.</i> Физически информированные нейронные сети для адаптивной генерации сеток с использованием уравнения диффузии	598
<i>Шайхиева Ж.</i> Локальная RAG-архитектура для гиперперсонализации в финтехе . . .	600
<i>Шаяхметов Н.М., Әліұлы А., Сулейменова А.К.</i> Гибридный подход к моделированию центробежных насосов: интеграция физически-информированных нейронных сетей (PINNs) и традиционного гидродинамического моделирования	601
<i>Умирхан Ж.Н.</i> Современные методы прогнозирования концентрации PM2.5 в городе Алматы	603
<i>Хахимов М.Х., Бекова В.Г., Сирожиддинов З.Ш.</i> Расширяемый входной язык и искусственный интеллект	604
<i>Aidarova L.N., Mansurova M.E., Mosavi A</i> Intelligent Control of an Agro-Robot Based on Computer Vision and Data-Driven Modeling	606
<i>Aitkazina A.A.</i> Intelligent Laser–Photonic System for Seed Activation Based on Mathematical Modeling and Adaptive Optimization Methods	607
<i>Aknazar uulu K., Azimzhonov O.A.</i> Application of mathematical methods in the complex processing of barite-containing ores in the southern regions of the Kyrgyz Republic .	609
<i>Aouani M., Buribayev Z.A.</i> Development of a bidirectional system for improving communication of people with hearing impairments using gesture recognition	610
<i>Baratova L.M.</i> Learning models for Regular Languages with limited additional information	611
<i>Bazhibayeva A.B., Issabayeva D.N.</i> Intelligent System for Analyzing and Managing Student Engagement in Online Learning	612
<i>Borangazin T.B.</i> Predictive modeling of mohs hardness using machine learning and generative adversarial networks	613
<i>Ermatali B.U., Zhoroeva N.</i> Modeling of economic applications of differential equations in MATLAB (The case of the Solow–Swan neoclassical growth model)	614
<i>Felde I., Mosavi A., Mansurova M.</i> ANN supporting determination of transient Heat Transfer Coefficients	616
<i>Gong Chunyang, Bedelbaev A.</i> A Multi-Agent Dynamical System Model for Optimizing Contextual Flow in Deep Neural Network Layers	618
<i>Kaiyrkhan N.</i> Decision-Focused Learning for Pharmaceutical Supply Chain Management: An Integrated SPO+MIP Framework for Kazakhstan’s SmartHealth Ecosystem . . .	619
<i>Kenzhebayeva M.O., Kalimulin R.R.</i> Comparison of PINN and Nelder–Mead methods for solving the inverse gravimetry problem	621
<i>Khan I.U., Mansurova M.</i> Design and Development of an Agentic Retrieval-Augmented Generation System for University Information Assistance	623
<i>Mansurova M., Mussa A.</i> From Automation to Autonomy: The Paradigm of Agentic Engineering	624
<i>Ospan A., Mansurova M., Jamanbalayeva Sh., Zhanabay Zh., Zhappar A.</i> SocioTable-KZ: A Semantic Framework for Legally-Compliant AI-Assisted Sociological Table Interpretation	626
<i>Tukeyev U.A., Segizbayeva Zh.E.</i> Calculation model of voiced–voiceless sound consonants in the Kazakh language	627
<i>Tang Daoyun, Amirkhanova G.</i> Visual-language sentiment analysis integrating semantic-guided attention mechanism and multi-task learning	628
<i>Teshebayev N.M., Mansurova M.E., Mosavi A.</i> Generalist Robot Policies from Vision–Language–Action Models: Adaptation and Safety Constraints	629

<i>Ussipbayev A.</i> Hybrid stochastic model for reliability assessment of network trunk lines based on neuro-symbolic AI	631
<i>Yang C., Zhao B., Zheng D., Mansurova M.</i> Multi-Objective Optimization and Federated Learning for Agri-Food Supply Chains via Dynamic Heterogeneous Graph Neural Networks	632
<i>Zhao B., Zheng D., Yang C., Belgibaev B., Mansurova M.</i> Research on optimizing convolutional neural network to improve railway mileage data prediction based on Whale/Beluga optimization algorithm	634
<i>Zhetpisbay Z.E., Yerkos A.</i> Predicting Cancer Stage from DNA Methylation Profiles Using Machine Learning	635
<i>Zhumagulova Sh.P.</i> Patient-Independent Spectro-Temporal Estimation of Respiratory Rate and Blood Pressure from PPG Signals	636
<i>Тлемәй Ш.Т., Амурханова Г.А.</i> Қорларды басқарудың математикалық моделі	637
<i>Rakhimzhanova A.Zh., Nugumanova A.B.</i> Modeling of Snow Depth–Snow Water Equivalent Relationship under Climatic Variability	639
<i>Mukanova B.G., Nugumanova A.B., Alzhanov A.M.</i> Multi-Task LSTM for streamflow prediction via shared representation learning	641
<i>Radikova R.E., Karatayeva D.S., Adiyeva A.Zh.</i> On the oscillatory properties of solutions of second-order quasilinear difference equations	643

Механиканың іргелі мәселелері Фундаментальные проблемы механики Fundamental Problems of Mechanics 644

<i>Абдықадыров А.А., Смайлов Н.К., Досбаев Ж.М., Марксұлы С.</i> Озон генерациялау жүйесінің тиімділігін бағалау үшін сенсорлық желі деректерін беруді зерттеу . .	645
<i>Ахажанов С.Б., Ақжолтай Е.Д., Әмірбеков Н.Ж.</i> Функционалды-градиенттік арқалықтардың иілуі және еркін тербелістерін есептеудің нақтыланған аналитикалық моделі	646
<i>Ғаббасов М.Б., Қуанов Т.Ж., Сүлейменов К.М., Төлеуов Б.И.</i> Он алты өлшемді алгебра негіздері және кванттық есептеулер	649
<i>Ғаббасов М.Б., Рахимова А.Т., Төлеуов Б.И.</i> Сүзілу құбылысының үш өлшемді стационар емес математикалық моделіне қойылған коши есебінің шешімі	650
<i>Жолдасов С.А.</i> Кинематикалық жұптарында үйкеліс күштері бар серпімді кеңістіктегі механизмдердің динамикасының теңдеуін математикалық модельдеу	651
<i>Кайыров Р.А., Жұмагүл А.С., Орантайұлы М., Құрманбай Қ.</i> Жаңа көпфункционалы мобильді металл 3D-принтердің кинематикалық талдауы және жұмыс аймағын бағалау	652
<i>Мәдібайұлы Ж.</i> Иілген құбырдан сұйықтық аққан кездегі орнықтылық есебі	654
<i>Куттыбаева А.Е., Кобланов С.Р., Түребекова А., Секенов Б.</i> Құрылыс конструкцияларындағы деформацияларды бақылауда distributed acoustic sensing (DAS) технологиясын қолдану	657
<i>Нургозиева А.Ж., Ақжолтай А.Д.</i> Пластинаның үшінші ретті ығысу деформация теориясының жетілдірілген нұсқасы	658
<i>Слямқанова А.М., Жапсарбаева Л.К., Кастро Кастилья А.К.</i> Салмақтық Соболев кеңістіктеріндегі кубтық Шредингер теңдеуінің шешімдерінің тегістігі	660
<i>Смайлов Н.Қ., Абдықадыров А.А., Досбаев Ж.М., Марксұлы С.</i> RIS технологиясы негізінде адаптивті сәулені қалыптастыруда машиналық оқытуды қолдану	661
<i>Айтбаев Е.Е.</i> О системе мониторинга температуры и влажности на автомобильных дорогах Казахстана	662
<i>Алексеева Л.А., Айнакеева Н.Ж.</i> Решение краевых задач на линейном N-звенном тепловом графе с локальными и связанными краевыми условиями	664
<i>Алексеева Л.А., Азиз Г.Н.</i> Вибротранспортные решения уравнений Максвелла и Дирака в бикватернионном представлении при досветовых скоростях и их свойства	665

<i>Аманбаев Т.Р., Тилеуов Г.Е., Абдусалиев Н.А., Айдаулет Б.Е.</i> Моделирование и анализ течений дисперсной смеси в пограничном слое при наличии вдува жидкости с поверхности тела	666
<i>Аманжолов Т.Е., Әлиұлы А., Сейтов А.Н., Аязбай Е., Калтаев А.</i> Разработка модифицированной одномерной методики гидравлического расчета центробежных консольных насосов типа СНР для перекачивания морской воды	667
<i>Әлиұлы А., Сейтов А.Н., Аманжолов Т.Е., Аязбай Е., Калтаев А.</i> Разработка и валидация гидродинамической модели центробежного насоса	668
<i>Бакирова Ю.И., Бекетаева А.О.</i> Численное моделирование процесса горения частиц алюминия в ракетном двигателе на твердом топливе	670
<i>Бисембаев К., Дикамбай Т.</i> О колебаниях резервуара с жидкостью на виброопорах качения со спрямленными поверхностями	672
<i>Диарова Д.М., Ихсанов Е.В.</i> Исследование гомографических решений ньютоновой проблемы многих тел	674
<i>Джанмулдаева А.Б., Маделханова А.Ж., Джалбиров Ж.Т., Абжанов Е.А., Джанмулдаев Б.Д.</i> Применение метода декомпозиции для решения одной краевой задачи теории вязкоупругости	675
<i>Джомартов А.А., Тулешов А.К., Абдураимов А.Е., Камал А.Н.</i> Симулятор землетрясения на основе тросового параллельного робота для обучения поведения людей при землетрясении	676
<i>Дюсембин Е.А.</i> Особенности переработки и производство сухого верблюжьего молоко максимальным сохранением витаминного состава	678
<i>Жайсанбаев А.С.</i> Оценка модуля упругости дорожной одежды в северном Казахстане	680
<i>Жумабекова Н.Н., Молдабеков М.М., Тілектес Н.Ж., Батенов А.Б.</i> Построение программы угла тангажа ракеты-носителя на начальном участке ее полета	682
<i>Закиров А.Х.</i> Обтекание препятствия потоком жидкости во внезапно расширяющейся трубе	684
<i>Искаков Ж., Абдураимов А., Азиз К.</i> Резонансные колебания неидеальной гироскопической роторной системы с нелинейной демпфирующей и восстанавливающей характеристиками	685
<i>Исломов Б.И.</i> Нелокальная задача для дробно-нагруженного гиперболического уравнения, когда нагруженные части содержат операторы дробных производных Римана - Лиувилля	686
<i>Калыбаев У.С.</i> Результаты полевого исследования мест колееобразования на автомобильных дорогах г. Шымкент	688
<i>Керимкулов Д.Б., Тулешов А.К.</i> Кинематический анализ механизма хойкена для формирования квазилинейного и управляемого закона движения выходного звена	689
<i>Мирзаев И., Гайназаров С.М.</i> Численное моделирование воздействия плоской упругой волны на искусственно выделенную параллелепипедную область	691
<i>Молдабеков М.М., Жумабекова Н.Н., Тілектес Н.Ж., Батенов А.Б.</i> Расширение классического PID – регулятора	693
<i>Момынкулов З.З., Омаров Б.С.</i> Применение алгоритма TD3 для управления роботизированными манипуляторами в машиностроении	695
<i>Мухарлямов Р.Г.</i> О составлении уравнений динамики систем с программными связями	696
<i>Mukhambetzhapov S.T., Janabekova S.K.</i> Mathematical and numerical modeling of liquid filtration processes in a porous medium	698
<i>Мухарлямов Р.Г., Борисов А.В., Каспирович И.Е., Маслова К.С., Коротких А.А.</i> Оценка эффективности методов моделирования антропоидов с применением аппарата комплексной и гиперкомплексной алгебры в сравнении с матрицами относительного поворота локальных систем координат	701
<i>Мухарлямов Р.Г., Каспирович И.Е., Киргизбаев Ж.К.</i> О построении уравнений динамики системы твердых тел переменной массы	702

<i>Нысанов Е.А., Кожабаяев С.Е.</i> Определение оптимальной формы поперечного сечения открытых каналов с максимальной пропускной способностью	703
<i>Олжаев О.М., Икрамов А.З.</i> Стабильность обучения и архитектура Actor-Critic в глубоком обучении с подкреплением	705
<i>Рахматулина А.Б., Иманбаева Н.С., Смагулов Д.К., Омирбекова Ж.Ж., Молдашев А.</i> Моделирование и проектирование оборудования вакуум-сублимационной сушилки	706
<i>Сапармуратов А.</i> О множестве достижимости управляемых систем	709
<i>Сейдахмет А.Ж., Тулешов А.К., Қалиев М.Ж., Земцов В.И., Құмарбек Н.Е.</i> Математическая модель системы управления платформой СТЮАРТА	710
<i>Сейтмуратов А.Ж., Накипбек Ж.Е.</i> Теория колебания слоистых пластин, строго обоснованной постановкой различных краевых задач колебания	712
<i>Ташев А.</i> Моделирование температурного поля на тонкой пластине с граничными условиями Дирихле и Робина	714
<i>Телтаев Б.Б., Кадыр А.М.</i> Анализ физико-механических свойств полимерно-модифицированных битумов в зависимости от типа и концентрации модифицирующего полимера	716
<i>Телтаев Б.Б., Масанов А.Ж., Амандыков Н.</i> Разработка коэффициента режимов движения транспортного потока для оценки динамического воздействия транспортных средств на дорожные конструкции в зоне регулируемых перекрестков	717
<i>Телтаев Б., Мута А., Исова А.Т.</i> Особенности циклического замораживания оттаивания дорожного асфальтобетонного покрытия в Алматинском регионе	718
<i>Телтаев Б.Б., Шалкар К.А.</i> Оценка технического состояния подходов к мостовому сооружению при помощи информационных технологий	719
<i>Телтаев Б.Б., Шалкар К.А.</i> К расчету монолитной переходной плиты длиной 10 м .	721
<i>Токторбаев А.М., Токтомурадова Ж.Э.</i> Существование обобщенного решения задачи коши для вырождающихся уравнений реагирующей смеси газов	722
<i>Токушева А.Д., Апишкур Б., Алимкулов М.М.</i> Разработка методики проектирования конструкций земляного полотна железных дорог с учётом физико-механических свойств грунтов основания	723
<i>Токушева А.Д., Алимкулов М.М., Апишкур Б.</i> Разработка коэффициента режимов движения транспортного потока для оценки динамического воздействия транспортных средств на дорожные конструкции в зоне регулируемых перекрестков .	725
<i>Тулешов А.К., Айтуганова Ж.</i> Интегрированное кинематическое моделирование и анализ эффективности автономной навигации мобильного робота с независимым управлением четырьмя колёсами	726
<i>Тулешов А.К., Сейдахмет А., Куатова М.Ж., Керимкулов Д.Б.</i> Моделирование динамики мобильного робота с двумя независимыми колёсами	728
<i>Тулешов А.К., Лезин А.Н., Досмухамбетов Н.К., Амандык А., Куатова М.Ж., Токенов Н.М.</i> Способы учета влияния вещественного состава образца на результаты рентгенофлуоресцентного многоэлементного высокочувствительного анализа	730
<i>Турсынова А.Т., Ибраев С.М.</i> Математические методы и архитектурные подходы к обработке визуальных данных в глубоком обучении с подкреплением	732
<i>Уалиев З.Г.</i> Динамические модели механических систем с упругими звеньями и связями	734
<i>Утенов М.У., Темирбеков Е.С., Карасаев Б.А.</i> Анимационное 3D моделирование инерции движения робот-манипуляторов	735
<i>Хабиев А.Т., Юлусов С.Б., Канапия М.О.</i> Математическое моделирование процессов структурообразования в битумных композитах при послойной 3D-печати	736
<i>Хабиев А.Т., Юлусов С.Б., Канапия М.О.</i> Оптимизационные методы и алгоритмы машинного обучения в управлении процессом 3D-печати композитных материалов	737
<i>Хужайров Б.Х., Туйгунов Ж.Р.</i> Аномальная фильтрация жидкости в кусочно-неоднородных пористых средах	739

<i>Aliev F.A., Hajiyeve N.S.</i> A New Eigenvector-Based Method for the Matrix Algebraic Riccati Equation	740
<i>Altynbekov Sh.Y., Ruziboev M.</i> On the Dynamics of Mean-Field Coupled Interval Maps with Singularities	742
<i>Aripov M., Kudratillaeva M.</i> To the qualitative properties solutions of double nonlinear cross diffusion coupled system	744
<i>Azimbayev A., Zhilkibayeva S., Rymkul Ye., Belyayev Ye., Mohanraj M., Arıcı M., Abdullah O.</i> Heat pump assisted solar dryer for dry fruit production in the Turkestan region of Kazakhstan	745
<i>Jamanbaev M. J., Abdyrakov T. T.</i> Numerical simulation of the thermal and filtration regime of a tailings dam of the Kumtor mine with an artificial ice inclusion in the foundation in 3d mode	747
<i>Indiaminov R., Zarpullayev U., Jumaboyev T., Urolov Sh.</i> Magnetoelastic Vibrations of a Current-Carrying Plate in a Transverse Nonstationary Magnetic Field	749
<i>Kadyrova T.R., Mamazhunusova Ch.N.</i> Visualization of Fluid Flow Velocity and Pressure Using OpenFOAM or ANSYS Fluent	750
<i>Karimov Sh.T., Boynazarov A.N.</i> Cauchy problem for a high-order ordinary differential equation with the generalized Bessel operator	750
<i>Karimov Sh.T., Mamajonova R.A.</i> Bessel operatori qatnashgan Kasr tartibli balka tebranish tenglamasi uchun boshlangich-chegaraviy masala	752
<i>Kaspirovich I.E.</i> Lagrangian Consistency and Stabilization of Velocity Constraints in Non-holonomic Systems	754
<i>Kudaibergenov S.T., Khan S.</i> On the convexity of symmetric Banach spaces	755
<i>Litvinov V.L.</i> Study of the functional equation of oscillations of objects with variable boundaries: exact and asymptotic solutions	757
<i>Madaliev M.E., Muhammadyoqubov H.E., Nosirova N.A., Kholboev B.M.</i> Comparative Assessment of SST Transition, k- κ , and RSM Turbulence Models for a 2D Converging-Diverging Channel Flow	758
<i>Minglibayev M. Zh., Assan B. R.</i> Secular perturbations of a test body in the restricted three-body problem with variable masses	760
<i>Yesbol Zh., Turalina D.</i> Modeling of Heat Transfer and Sedimentation Processes during Ultrasonic Casting of Thermoplastic Beryllium Oxide Slurry	762
<i>Zakiryanova G.K.</i> Green's tensor of Biot's transport equations at supersonic loads	763
<i>Zhapbasbayev U., Ramazanova G., Bossinov D., Yesbol Zh.</i> Determination of Oil Temperature Decrease during Pipeline Operation and Pump Shutdown	765

Математиканы оқытудың мәселелері Вопросы обучения математике	
Issues in Teaching Mathematics	767
<i>Абылжасымова А.Е.</i> О подготовке учителей математики в цифровой образовательной среде	768
<i>Әбілқасымова А.Е., Жұмағұлова З.А.</i> Мектеп математика курсын оқытуда жасанды интеллектті қолданудың мүмкіндіктері мен әдістемелік ерекшеліктері	769
<i>Әбілқасымова А.Е., Есхожаева С.М., Жұмабай Н.</i> STEM білім беру негізінде оқушылардың математикадан функционалдық сауаттылығын қалыптастыру	771
<i>Әбілқасымова А.Е., Косанов Б.М., Халимбетов Б.Я.</i> Қазақстандағы математикалық білім берудің даму тенденциялары (1917 жылға дейін)	773
<i>Абылжасымова А.Е., Шишов С.Е., Верко Е.А.</i> Использование цифровых симуляторов для формирования навыков математического анализа экспериментальных данных	774
<i>Адібай А.Т.</i> Жасанды интеллект және цифрлық технологиялар дәуірінде математика сабағында критикалық ойлауды дамыту	776
<i>Абдрашова Э.Т., Кемельбекова Ж.С.</i> Информатика пәнінде цифрлық құзыреттіліктің оқыту сапасына әсері	777

<i>Әкімова Н.Н.</i> Математиканы оқытуда оқушылардың өзара ықпалдастығын дамыту: педагогикалық тәсілдер мен ғылыми негіздері	779
<i>Арысбекова Ә.С., Шуақиев М.К.</i> Стереометрияны оқытуда қолданылатын цифрлық бағдарламалар және олардың мүмкіндіктері	780
<i>Арқабаев Н.К., Абдугулова Г.С.</i> Генеративный ИИ в обучении программированию: возможности и риски с позиции теории когнитивной нагрузки	783
<i>Асыл А.А., Беккул А.С.</i> Мектеп математика курсынан олимпиадалық есептердің мазмұны мен шешу әдістері	785
<i>Аттокурова А.Дж., Култаева Д.Ч.</i> Подготовка будущего учителя математики в рамках реализации 12-летнего общего образования в Кыргызской Республике . .	786
<i>Баракаев М., Уринов Х.Х.</i> Методика развития профессиональной компетенции будущих учителей математики	787
<i>Болат А.Б.</i> Тригонометрияны құзыреттілікке бағыттап оқыту: оқу нәтижелеріне әсері	788
<i>Дарибаев А.А.</i> Искусственный интеллект как инструмент модернизации математического образования	789
<i>Дарманова Ж.К., Кабулова А.Р., Нурмухамедова Ж.М.</i> GeoGebra как инструмент визуализации и исследовательской деятельности в обучении математике	790
<i>Досмаханбет С.М.</i> Орта мектептегі математиканы оқытуда білім алушылардың функционалдық сауаттылығын дамытуға арналған 4D цифрлық моделі	792
<i>Доцанова М.Ж.</i> Оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастыру үшін акт көмегімен контекстік математикалық есептерді визуализациялаудың әдістемелік негіздері	794
<i>Енсебаева Г.М., Наги Б.Ө.</i> Математикалық білім беруде жасанды интеллектті қолдану арқылы болашақ мұғалімдердің креативті ойлауын қалыптастыру	795
<i>Ергешибаев С.Х.</i> Жасанды интеллект көмегімен оқушылардың абстрактілі ойлау қабілеттерін қалыптастыру әдістемесі.	797
<i>Жадраева Л.У., Нурбаева Д.М., Урстемова Г.К.</i> Техникалық жоғары оқу орындарында математикалық білім беруде жасанды интеллект: педагогикалық шарттар және енгізу тәуекелдері	798
<i>Жакыпбекова А.Т., Зулпукарова Д.И., Сманова Н.Т.</i> Экологическая ситуация и обратные задачи компьютерного моделирования	800
<i>Zhakieva S.A., Azizbek kyzy N.</i> The development of mathematical concepts in school mathematics through communication in the context of digital education	801
<i>Зулпукарова Д.И., Сманова Н.Т., Жакыпбекова А.Т.</i> Компетентностно-ориентированные задания как фонд оценочных средств (на примере 7–8 классов)	802
<i>Жұмағұлова З.А., Каппасова С.Е.</i> Негізгі мектеп оқушыларының математиканы оқыту процесінде функционалдық сауаттылығын қалыптастыру әдістемесі	804
<i>Иовбак А.С.</i> Математические методы анализа экспериментальных данных в школьном курсе физики с использованием инструментов искусственного интеллекта .	805
<i>Кагазбаева А.К., Кайдасов Ж.</i> Графиктерді визуализациялау мен талдаудағы GeoGebra-ның рөлі	806
<i>Kadyrova T.R., Mamazhunusova Ch.N.</i> Visualization of Fluid Flow Velocity and Pressure Using OpenFOAM or ANSYS Fluent	808
<i>Казимова Д.А., Копбалина С.С.</i> Жоғары білім беру жүйесін трансформациялау контексіндегі цифрлық клон технологиясы	809
<i>Карабаева Ж.А., Беркімбаев К.М.</i> Мектеп білім алушыларының математикалық білім сапасын арттыруда жасанды интеллект технологияларын қолдану	811
<i>Каракозов С.Д., Смирнов В.А.</i> О вводимом курсе аналитической геометрии для студентов первого курса университетов	812
<i>Кенесариева Г.Ж., Адиева А.Ж.</i> PISA нәтижелері негізінде мектепте ықтималдықтар теориясын оқытуды жетілдіру	814

<i>Ким И.М., Мадияров Н.К.</i> Авторская методика наглядного планирования и алгоритмизации рассуждений в обучении геометрии	816
<i>Көкеш А.Н., Жәңгір Н.Б., Мадияров Н.К.</i> Болашақ математика мұғалімдерін геометриялық фигураларды кескіндеуге оқытуда GeoGebra-ны қолданудың дидактикалық мүмкіндіктері	817
<i>Хайдаров Б.К.</i> Модель Национальной учебной программы по математике для начального образования Республики Узбекистан: компетентностная архитектура и ориентация на решение проблем	818
<i>Маатов К.М., Мамбетов Ж.И.</i> Оптимизация структуры посевных площадей с использованием MS Excel Solver и алгоритмов машинного обучения	819
<i>Маматкасымова А.Т., Жусупова Э.М., Сагынбай уулу Эламан С.Э.</i> Применение интеллектуальных технологий в преподавании математики	820
<i>Mosavi A., Baipakbayeva S., Aidarova L., Teshebayev N., Mansurova M., Felde I., Kalimoldayev M.</i> Integrated Modeling Approach for Explainable, Trustworthy, Responsible, and Robust AI	822
<i>Мінсізбаева Г.Б., Менлихожаева С.Қ.</i> Қазіргі білім беру жүйесінде функцияны оқытудың трансформациясы: дәстүрліден Smart Learning-ке дейін	823
<i>Мурат А., Сеитова С.М.</i> Цифрлық трансформация жағдайында математиканы оқытудың өзекті мәселелері	825
<i>Нурбекова А.Ж.</i> Жасанды интеллект технологиясын тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігін игерудің маңыздылығы	826
<i>Омар Ж., Адиева А.Ж.</i> Мектеп геометриясын оқытуда цифрлық технологиялар арқылы геометриялық түрлендірулерді жетілдіру	828
<i>Папышев А.А., Ханжарова Б.С.</i> Концептуальные основы обучения решению математических задач в контексте деятельностного подхода	830
<i>Тұяқов Е.А., Разақ Ж.Н., Бекқұл Н.Ғ.</i> Мектеп пен педагогикалық жоғары оқу орындарында геометрияны оқытуда сабақтастықты жүзеге асыру жолдары	831
<i>Роспай А.М.</i> Интеграцияланған есептерді шығаруда жасанды интеллектті қолданудың теориялық-әдістемелік негіздері	832
<i>Seisenbayeva A.M.</i> Applied mathematical problems in high school mathematics as a tool for developing functional literacy	834
<i>Сеитова С.М., Жанахметова Д.Ж.</i> Болашақ математика мұғалімдерін даярлау процесінде Soft Skills дағдыларын дамытудың маңыздылығы	836
<i>Sigalovsky M.</i> Orimatics & Oritech: Mathematical Origami in Education and Engineering	837
<i>Сырлыбаева Л.А., Тұяқов Е.А.</i> Геометрия сабағын цифрлық платформаларды пайдаланып ұйымдастырудың тиімділігі	838
<i>Шеримова Р.Б., Жайдақбаева Л.Қ.</i> Geogebra көмегімен 5Е моделі арқылы оқушылардың геометриялық есептерді шешу қабілетін жетілдіру	840
<i>Исмайлова Ш.Б.</i> Жасанды интеллект негізінде математиканы оқытудың өзекті мәселелері мен мүмкіндіктері	841
<i>Шинтемиров А.М.</i> Применение математического анализа для преодоления когнитивных барьеров старшеклассников при решении олимпиадных задач по физике	843
<i>Таштемирова Н.Т.</i> Актуальные вопросы обучения стохастике в школьном курсе математики в эпоху цифровой трансформации образования	844
<i>Тургунбаев Р.М.</i> О проектировании преподавания темы «Множество действительных чисел и его свойства» на основе тезаурусного подхода	846
<i>Умаралиева Д.У.</i> Поддержка последовательного освоения математического текста студентами первого курса с помощью метода вопросов: цифровая и AI-основанная модель применения	848
<i>Уразымбетов М.С., Бидайбеков Е.Ы., Умбетбаев К.У.</i> Әл-Фарабидің геометриялық салу есептерін оқытуда веб-портал технологияларын қолдану	849

<i>Хамит Д.Б.</i> 9-сынып алгебра курсында «Тізбектер» тарауын оқытуда цифрлық технологияларды тиімді қолдану	850
<i>Нарбекова Г.М., Нарбекова Н.М.</i> Geogebra-ны қолдану негізінде оқушылардың стереометрия есеп шығару біліктерін қалыптастыру	852
<i>Kodirov T.R.</i> Integration of big data analytics in mathematical education for economics .	854
<i>Kalilanova K.A., Zhanuzakova D.T., Mustafayev A.P.</i> Some aspects of the methodology of conducting sections in Polyhedra	854
<i>Даулеткулова А.У.</i> Қазақстанда бастауыш сынып математикасын оқытуда СРА әдісін қолдану тәжірибесінен	855
<i>Жалмуханбетов Д.Н., Мырзабаев Ә.Р., Каимов С.Т., Быков А.А., Кайым Т.Т., Каимов А.Т., Тыныбаева А.Н., Алиман А.А., Тулешов А.К., Каимов А.Т., Сейдахмет А.Ж.</i> Исследование и разработка роботизированных систем с поддержкой IoT и периферийного искусственного интеллекта для мониторинга безопасности и автономного патрулирования	857
<i>Рашид К.А., Каимов С.Т.</i> Применение математического и компьютерного моделирования для оценки температурной устойчивости дымоходов из композитных материалов	858
<i>Amanzholov T.E., Aizhulov D.E., Tungatarova M.S., Abdullaeva B.Zh.</i> Simulation of Heat Transfer in BTES Systems Considering Subsurface Layer Heterogeneity and Ground-water Flow	859
<i>Sapazhanov Y., Kadyrov S.</i> Transformer-Enhanced PPO for Sequence-Aware Adaptive PID Control of Nonlinear Thermal Systems with Delayed and Noisy Feedback	860
<i>Городничев М.А., Лебедев Д.В.</i> Архитектурные принципы создания комплексной инфраструктуры для решения задач на суперкомпьютерах	862
Атаулар көрсеткіші Именной указатель Index of Names	863

Тезис доклада
Президента Математического общества Тюркского мира,
Президента Математического общества Казахстана,
Президента Национальной инженерной академии Республики Казахстан,
академика НАН РК

Б.Т. Жумагулова

МАТЕМАТИКА КАК ОСНОВА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО СУВЕРЕНИТЕТА И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЛИДЕРСТВА КАЗАХСТАНА

Президент Математического общества Тюркского мира, Президент Математического общества Казахстана, Президент Национальной инженерной академии Республики Казахстан, академик НАН РК Б.Т. Жумагулов будет выступать с программным докладом, посвященным стратегической роли математики в развитии современного государства, укреплении научного потенциала страны и формировании интеллектуального суверенитета Независимого Казахстана. В своем выступлении докладчик особо подчеркивает историческую значимость Конгресса как новой вехи в развитии отечественной науки и важного шага на пути утверждения Казахстана в качестве государства сильного разума, высокой науки и большого будущего.

Особое место в докладе было уделено выражению признательности Главе государства. Б.Т. Жумагулов от имени научного сообщества поблагодарил Президента Республики Казахстан Касым-Жомарта Кемелевича Токаева за последовательное внимание к науке, поддержку научной сферы и понимание стратегической значимости интеллектуального развития страны. В докладе было отмечено, что благодаря дальновидному государственному курсу в Казахстане сохраняются стабильность, общественное согласие и условия для поступательного движения вперед, а наука получает все более важное место в системе национальных приоритетов. Особо было подчеркнуто, что инвестиции в науку за последние годы значительно возросли, а сама наука должна работать не только на академический престиж, но и на реальный прогресс государства, экономики, промышленности и образования.

Ключевая идея доклада состояла в том, что современная математика давно перестала быть исключительно академической дисциплиной. Сегодня она выступает фундаментом искусственного интеллекта, инженерии, цифровой экономики, микроэлектроники, энергетики, логистики, медицины, оборонных технологий и систем национальной безопасности. В этой связи Б.Т. Жумагулов обозначил главную тенденцию развития современной математики: переход от ее восприятия как области абстрактного знания к ее осмыслению как важнейшего инструмента стратегического прогнозирования, технологического развития и укрепления государственности. Было показано, что в XXI веке математическая мощь становится одним из важнейших факторов национальной конкурентоспособности, а научное лидерство будет принадлежать тем странам, которые сумеют соединить фундаментальную математику, искусственный интеллект и качественное инженерное образование.

Отдельное внимание в докладе было уделено тем трендам, которые сегодня определяют развитие мировой математической науки. Среди них – стремительное усиление роли искусственного интеллекта в математических исследованиях, применение машинного обучения для анализа больших массивов данных, участие интеллектуальных систем в проверке доказательств, поиске закономерностей и выработке новых вычислительных решений. В качестве примеров были приведены современные достижения в области автоматизированного доказательства теорем, новые подходы к умножению матриц, использование ИИ в сложных задачах математической физики, а также потенциал генеративных алгоритмов в решении систем дифференциальных уравнений. Эти процессы, по мысли докладчика, свидетельствуют о вступлении человечества в новую научную эпоху, где математика, вычислительная мощь и цифровые инструменты образуют единое пространство технологического прорыва.

В докладе была дана высокая оценка историческому пути казахстанской математической школы. Было подчеркнуто, что ее духовные и научные истоки восходят к великому Абу Насыру аль-Фараби, а традиции служения науке с честью продолжили выдающиеся ученые Казах-

стана – О.А. Жаутыков, У.М. Султангазин, У.А. Жолдасбеков, Ш.С. Смагулов, А.Д. Тайманов и многие другие. Их наследие охарактеризовано как прочный фундамент развития национальной науки и интеллектуальной силы страны. Наряду с этим Б.Т. Жумагулов указал и на необходимость честной самооценки: Казахстан обладает серьезной научно-образовательной базой, однако имеющийся потенциал реализован еще не в полной мере. В этой связи была выдвинута принципиальная установка: казахстанская математика не должна ограничиваться повторением уже достигнутых другими результатов, а обязана выходить в число направляющих сил мировой науки, формируя собственные школы, идеи и научные решения.

Существенная часть выступления была посвящена приоритетным направлениям работы Конгресса. Докладчик показал, что математика должна активно включаться в решение крупнейших глобальных и национальных задач: моделирование мировых экономических процессов и банковско-финансовых кризисов; исследование проблем водной безопасности и дефицита пресной воды; анализ экологических угроз, включая химическое загрязнение атмосферы; развитие промышленного искусственного интеллекта; укрепление фундаментальной механики; совершенствование математического образования в школе и вузе. Тем самым в докладе были обозначены не только общие тенденции развития современной математики, но и конкретные сферы, в которых казахстанские ученые могут и должны предложить миру значимые результаты.

Особо была подчеркнута мысль о необходимости пересмотра подходов к оценке труда ученого. По мнению докладчика, истинная ценность исследователя определяется не только количеством публикаций, но прежде всего созданной научной школой, подготовленными учениками, внедренными результатами и влиянием исследований на развитие экономики, технологий, образования и государства. В этом контексте подчеркивалась важность укрепления статуса ученого и развития нескольких мощных математических центров мирового уровня на базе ведущих национальных университетов и научных институтов Казахстана. Сказано о необходимости создания специального Совета при Министерстве, который будет контролировать качество учебных материалов по математическим дисциплинам всех образовательных уровней.

Завершая выступление, Б.Т. Жумагулов акцентировал внимание на том, что развитие математики – это общенациональная задача, напрямую связанная с будущим государства, его конкурентоспособностью и исторической перспективой. Казахстан, обладая сильными научными школами, талантливой молодежью, выдающимися учеными и государственной волей к развитию, имеет все основания стать страной передовой науки, сильной математической школы, инженерной культуры и технологического лидерства. Первый Конгресс математиков Казахстана был представлен не просто как площадка профессионального общения, а как точка рождения новых идей, научных союзов и прорывных проектов, призванных служить укреплению могущества, авторитета и интеллектуального суверенитета Республики Казахстан.

М. ӘУЕЗОВ АТЫНДАҒЫ ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ТАРИХЫ

Соғыстың ауыр кезеңіне қарамай, Кеңес Одағының басшылығы соғыстан кейін қажет болатын болашақ құрылысшы мамандарды дайындау керектігін ойластыра бастады. КСРО Халық Комиссарлары Кеңесі 1943 жылғы 19 маусымдағы №679 қаулысымен КСРО құрылыс материалдары халкоматына және Жоғары мектеп істері бойынша бүкілодақтық комитетке «Құрылыс материалдары технологиялық институтын» ұйымдастыру тапсырылды.

Институтты ұйымдастыруға негізгі шарт болған құрылыс материалдарын өндіретін зауыттар салу үшін маңында отқа төзімді материалдардың мол қорының болуы қарастырылды. Осы кәсіпорындарда жұмыс істеу үшін, әсіресе, жергілікті халықтан түрлі саладағы инженерлер дайындау қажет болды.

Институттың ашылған кездегі алғашқы базасы КСРО құрылыс материалдары өнеркәсібі Халық Комиссариаты жүйесіндегі Индустриалды техникум болды. КСРО Халкомкеңес жанындағы жоғары мектеп істері бойынша бүкілодақтық комитеттің және КСРО құрылыс материалдарының өнеркәсібі комиссарының біріккен бұйрығымен «Қазақ КСР құрылыс материалдары технологиялық институтын ұйымдастыру туралы» құжат қабылданды.

Оңтүстік Қазақстан облыстық кеңесінің атқарушы комитеті мен большевиктердің Коммунистік партиясының облыстық комитетінің №274/336 біріккен шешімімен институтқа Советская көшесі, 40 үй мекен-жайында орналасқан педучилищенің үш қабатты ғимараты берілді.

Оқу-материалдық база ретінде оқу сабақтарына арналған бөлме-жайлар, 200 адамға арналған жатақхана, оқу шеберханалары және оқытушы –профессорлар құрамына арналған пәтерлер бөлінді.

КСРО құрылыс материалдары Халкомкеңесі және КСРО Халкомкеңес жанындағы жоғары мектеп істері бойынша бүкілодақтық комитет 1943-1944 оқу жылына арнап 150 адам көлемінде студент қабылдау жоспарын белгіледі. Институт Қазақстанның, Орталық Азия республикаларының, Сібір мен Қиыр Шығыстың құрылыс материалдарының дамушы өнеркәсібін және құрылыс индустриясын инженер кадрлармен қамтамасыз ету қажеттілігімен уәжделенді.

Жоғары оқу орнының алғашқы құрамы екі факультеттен құралды:

— «Силикаттар технологиясы (әйнек, керамика, тұтқыр заттар)» мамандығы бойынша технологиялық факультет;

— «Рудалық емес қазбаларды өндіру және пайдалану» мамандығы бойынша кен факультеті.

— Бірден қоғамдық ғылымдар, математика, механика, физика, химия, графика, кристаллография және минералогия кафедралары ашылды. Ашылған жылы институтта 18 оқытушы, оның ішінде 2 профессор және 5 доцент жұмыс істеді.

1957 жылы Құрылыс материалдары технологиялық институтының атауы «Қазақ технологиялық институты» болып өзгерді.

1964 жылы институт «Қазақ химия-технологиялық институты» болып аталды.

1996 жылы 7 мамырда Қазақстан Республикасының Үкіметінің №573 қаулысымен Қазақ химия-технологиялық институты болып қайта құрылды.

1998 жылы 24 наурызда Қазақстан Республикасының Үкіметінің №256 қаулысымен, заңмен белгіленген тәртіпте Оңтүстік Қазақстан технологиялық университеті мен М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан гуманитарлық университетін біріктіру арқылы жоғары оқу орнын М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті етіп қайта құруға шешім қабылдады.

Жаңадан құрылған университет оңтүстік өңірдегі жас жоғары оқу орындарының бірі болып саналғанымен, М.Әуезов атындағы ОҚУ сонымен бірге Қазақстандағы жоғары техникалық және гуманитарлық білім беретін ең көне екі мектептің жалғасы болып саналады. Атап айтқанда, бұл атауы ауысқан екі мекеменің механикалық бірігуі емес. Мемлекеттік университеттің жаңа мәртебесі білім беру жүйесін және ғылыми-зерттеу қызметін сапалы реформалаумен қамтамасыз етілді.

2020 жылғы 15-ші желтоқсан күні «М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамы болып өзгерді.

2024 жылы 16 тамыз күні Өзбекстанның Шыршық қаласында М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университетінің филиалы ашылды.

Әуезов университеті 2026 жылғы Азиядағы үздік университеттер рейтингінде – QS Asia University Rankings 161-орында. Quacquarelli Symonds беделді британдық рейтинг нәтижелері бойынша 4 жұлдыз жоғары бағаға ие болды.

UI Green Metric World University Rankings университеттерінің Дүниежүзілік рейтингінде ОҚУ 956 ЖОО арасында 258 орында. «Ranking by Campus Setting – 2026» критерийінде университет 170 жоғары оқу орнының ішінен әлемде 34-орынға ие болды. GreenMetric-тің «Ranking by Region 2026 - Asia» аймақтық рейтингінде 170-ші орында тұрған ТОП – 200-ге кіреді.

Times Higher Education – Impact Rankings компаниясының халықаралық рейтингінде 1501+ қатарына енді.

Азия-Тынық мұхиты өңірінің Rank Pro by Subjects - 2026 аймақтық рейтингінің нәтижелері бойынша: биология ғылымдары – Топ – 350-400, Химия ғылымдары – ТОП – 301-350, Инженерия және технологиялар – ТОП – 351-400, Математика – ТОП – 351-400.

Білім берудегі сапаны қамтамасыз ету жөніндегі тәуелсіз агенттік өткізетін 2025 жылғы Қазақстанның үздік жоғары оқу орындарының ұлттық рейтингінің қорытындысы бойынша – университет 2-орында.

2025 жылы «Атамекен» ҰКП рейтингінде 33 БББ ТОП – 10-ға кірді.

Қазіргі уақытта педагогикалық қызметпен 1733 профессор-оқытушылар құрам айналысуда, оның ішінде 79 ғылым докторлары, 432 ғылым кандидаттары, 168 PhD докторлары мен 806 магистрлер. Профессор оқытушылар құрамында 14 академик және әр түрлі академияның 11 корреспондент мүшесі қызмет етеді. 2023 жылдан бастап Нобель сыйлығының лауреаты Рае Квон Чунг – университеттің толық штаттағы профессоры.

Өнер, мәдениет және спорт мамандықтары бойынша оқу топтарында ҚР еңбек сіңірген өнер және мәдениет қайраткерлері, халықаралық байқаулар мен фестивальдердің лауреаттары, ҚР еңбегі сіңген жаттықтырушылары дәріс беруде.

5 жоғары мектеп пен 7 факультетте 321 білім беру бағдарламасы бойынша 22 мыңнан астам студент білім алуда. Кадрларды даярлау экономиканың барлық дерлік салалары үшін жүргізілуде: өнеркәсіп, көлік, құрылыс, құрылыс материалдары өнеркәсібі, жеңіл және тамақ өнеркәсібі, ауыл шаруашылығы, мәдениет, туризм және қызмет көрсету, педагогика және т.б.

Жоғары оқу орнынан кейінгі білім магистратурада 111 білім беру бағдарламасы бойынша және докторантурада 32 білім беру бағдарламасы бойынша мамандар дайындалуда. 18 білім беру бағдарламасы бойынша 13 диссертациялық кеңес жұмыс істейді.

Университеттің әскери кафедрасында әскери қызметтің 5 мамандығы бойынша запастағы офицерлер дайындалады.

ИСТОРИЯ ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М. АУЭЗОВА

Несмотря на тяжёлый период войны, руководство Советского Союза начало задумываться о подготовке будущих специалистов-строителей, которые понадобятся после её окончания. Постановлением Совета Народных Комиссаров СССР от 19 июня 1943 года №679 Народному комиссариату строительных материалов СССР и Всесоюзному комитету по делам высшей школы было поручено организовать «Технологический институт строительных материалов».

Одним из основных условий организации института было наличие вблизи значительных запасов огнеупорных материалов для строительства заводов по производству строительных материалов. Для работы на этих предприятиях требовалось подготовить инженеров различных специальностей, особенно из числа местного населения.

Первоначальной базой института стал Индустриальный техникум системы Народного комиссариата промышленности строительных материалов СССР. Совместным приказом Всесоюзного комитета по делам высшей школы при СНК СССР и Народного комиссариата промышленности строительных материалов СССР был принят документ «Об организации Казахского технологического института строительных материалов».

Совместным решением исполнительного комитета Южно-Казахстанского областного совета и областного комитета Коммунистической партии большевиков №274/336 институту было передано трёхэтажное здание педагогического училища по адресу: улица Советская, дом 40.

В качестве учебно-материальной базы были выделены учебные помещения, общежитие на 200 человек, учебные мастерские, а также квартиры для профессорско-преподавательского состава.

Народный комиссариат строительных материалов СССР и Всесоюзный комитет по делам высшей школы при СНК СССР утвердили план приёма студентов на 1943–1944 учебный год в количестве 150 человек. Создание института было обусловлено необходимостью обеспечения инженерными кадрами развивающейся промышленности строительных материалов и строительной индустрии Казахстана, республик Средней Азии, Сибири и Дальнего Востока.

Первоначально вуз состоял из двух факультетов:

— технологический факультет по специальности «Технология силикатов (стекло, керамика, вяжущие вещества)»;

— горный факультет по специальности «Добыча и использование нерудных ископаемых».

Сразу были открыты кафедры общественных наук, математики, механики, физики, химии, графики, кристаллографии и минералогии. В год открытия в институте работали 18 преподавателей, в том числе 2 профессора и 5 доцентов.

В 1957 году Технологический институт строительных материалов был переименован в «Казахский технологический институт».

В 1964 году институт получил название «Казахский химико-технологический институт».

7 мая 1996 года постановлением Правительства Республики Казахстан №573 он был реорганизован в Казахский химико-технологический институт.

24 марта 1998 года постановлением Правительства Республики Казахстан №256 было принято решение о реорганизации вуза в Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова путём объединения Южно-Казахстанского технологического университета и Южно-Казахстанского гуманитарного университета имени М. Ауэзова в установленном законом порядке.

Хотя вновь созданный университет считается одним из молодых вузов южного региона, он одновременно является продолжением двух старейших школ высшего технического и гуманитарного образования Казахстана. Речь идёт не о механическом объединении двух учреждений: новый статус государственного университета сопровождался качественным реформированием системы образования и научно-исследовательской деятельности.

15 декабря 2020 года университет был преобразован в некоммерческое акционерное общество «Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова».

16 августа 2024 года в городе Чирчик (Узбекистан) был открыт филиал университета.

В рейтинге лучших университетов Азии 2026 года — QS Asia University Rankings — университет занимает 161-е место. По результатам престижного британского рейтинга Quacquarelli Symonds вуз получил высокую оценку — 4 звезды.

В мировом рейтинге университетов UI GreenMetric World University Rankings университет занимает 258-е место среди 956 вузов. По критерию «Ranking by Campus Setting – 2026» университет занял 34-е место в мире среди 170 вузов. В региональном рейтинге GreenMetric «Ranking by Region 2026 - Asia» входит в топ-200, занимая 170-е место.

В международном рейтинге Times Higher Education – Impact Rankings университет входит в группу 1501+.

По результатам регионального рейтинга Азиатско-Тихоокеанского региона RankPro by Subjects – 2026: биологические науки — топ-350–400, химические науки — топ-301–350, инженерия и технологии — топ-351–400, математика — топ-351–400.

По итогам национального рейтинга лучших вузов Казахстана 2025 года, проводимого Независимым агентством по обеспечению качества в образовании, университет занял 2-е место.

В рейтинге НПП «Атамекен» 2025 года 33 образовательные программы вошли в топ-10.

В настоящее время педагогическую деятельность осуществляют 1733 преподавателя, в том числе 79 докторов наук, 432 кандидата наук, 168 докторов PhD и 806 магистров. В профессорско-преподавательском составе работают 14 академиков и 11 членов-корреспондентов различных академий. С 2023 года лауреат Нобелевской премии Рае Квон Чунг является штатным профессором университета.

В учебных группах по специальностям искусства, культуры и спорта занятия ведут заслуженные деятели искусства и культуры Республики Казахстан, лауреаты международных конкурсов и фестивалей, а также заслуженные тренеры Республики Казахстан.

В 5 высших школах и 7 факультетах по 321 образовательной программе обучаются более 22 тысяч студентов. Подготовка кадров ведётся практически для всех отраслей экономики: промышленности, транспорта, строительства, индустрии строительных материалов, лёгкой и пищевой промышленности, сельского хозяйства, культуры, туризма и сервиса, педагогики и др.

Послевузовское образование осуществляется по 111 образовательным программам магистратуры и 32 программам докторантуры. По 18 образовательным программам функционируют 13 диссертационных советов.

На военной кафедре университета осуществляется подготовка офицеров запаса по 5 военно-учётным специальностям.

History of M. Auezov South Kazakhstan University

Despite the severe wartime conditions, the leadership of the Soviet Union began to consider the need to train future construction specialists who would be required after the war. By Resolution No. 679 of the Council of People's Commissars of the USSR dated June 19, 1943, the People's Commissariat of Construction Materials of the USSR and the All-Union Committee for Higher Education Affairs were instructed to establish the "Technological Institute of Construction Materials."

One of the key conditions for organizing the institute was the availability of significant reserves of refractory materials nearby for the construction of plants producing building materials. It was necessary to train engineers of various specializations, especially from the local population, to work at these enterprises.

The initial base of the institute was the Industrial Technical School within the system of the People's Commissariat of the Construction Materials Industry of the USSR. A joint order of the All-Union Committee for Higher Education Affairs under the Council of People's Commissars of the USSR and the People's Commissariat of the Construction Materials Industry approved the document "On the establishment of the Kazakh Technological Institute of Construction Materials."

By the joint decision No. 274/336 of the Executive Committee of the South Kazakhstan Regional Council and the Regional Committee of the Communist Party of Bolsheviks, the institute was allocated a three-story building of a pedagogical college located at 40 Sovetskaya Street.

As part of the educational infrastructure, classrooms, a dormitory for 200 people, training workshops, and apartments for the teaching staff were provided.

The People's Commissariat of Construction Materials of the USSR and the All-Union Committee for Higher Education Affairs approved an admission plan of 150 students for the 1943–1944 academic year. The establishment of the institute was driven by the need to supply engineering personnel to the developing construction materials industry and construction sector of Kazakhstan, the Central Asian republics, Siberia, and the Far East.

Initially, the institution consisted of two faculties:

- Faculty of Technology specializing in "Silicate Technology (glass, ceramics, binders)";
- Faculty of Mining specializing in "Extraction and Use of Non-metallic Minerals".

Departments of social sciences, mathematics, mechanics, physics, chemistry, graphics, crystallography, and mineralogy were established from the outset. In its first year, the institute employed 18 teachers, including 2 professors and 5 associate professors.

In 1957, the Technological Institute of Construction Materials was renamed the "Kazakh Technological Institute."

In 1964, the institute became known as the "Kazakh Chemical-Technological Institute."

On May 7, 1996, by Resolution No. 573 of the Government of the Republic of Kazakhstan, it was reorganized as the Kazakh Chemical-Technological Institute.

On March 24, 1998, by Resolution No. 256 of the Government of the Republic of Kazakhstan, it was decided to reorganize the institution into M. Auezov South Kazakhstan State University by merging the South Kazakhstan Technological University and M. Auezov South Kazakhstan Humanitarian University in accordance with the law.

Although the newly established university is considered one of the younger institutions in the southern region, it is also the continuation of two of the oldest schools of higher technical and humanitarian education in Kazakhstan. This was not merely a mechanical merger of two institutions; the new status of a state university was accompanied by qualitative reforms in the education system and research activities.

On December 15, 2020, the university was transformed into a non-profit joint-stock company "M. Auezov South Kazakhstan University."

On August 16, 2024, a branch of the university was opened in Chirchik, Uzbekistan.

In the QS Asia University Rankings 2026, the university ranks 161st. According to the prestigious British ranking by Quacquarelli Symonds, the university received a high rating of 4 stars.

In the UI GreenMetric World University Rankings, the university is ranked 258th among 956 universities. In the “Ranking by Campus Setting – 2026” criterion, it ranked 34th in the world among 170 universities. In the regional ranking “Ranking by Region 2026 - Asia,” it is included in the top 200, ranking 170th.

In the international Times Higher Education – Impact Rankings, the university is placed in the 1501+ group.

According to the RankPro by Subjects – 2026 regional ranking for the Asia-Pacific region: Biological Sciences – Top 350–400, Chemical Sciences – Top 301–350, Engineering and Technology – Top 351–400, Mathematics – Top 351–400.

According to the 2025 national ranking of the best universities in Kazakhstan conducted by the Independent Agency for Quality Assurance in Education, the university ranked 2nd.

In the 2025 ranking of the Atameken National Chamber of Entrepreneurs, 33 educational programs were included in the top 10.

Currently, the academic staff consists of 1,733 faculty members, including 79 Doctors of Science, 432 Candidates of Science, 168 PhD holders, and 806 Master’s degree holders. The faculty includes 14 academicians and 11 corresponding members of various academies. Since 2023, Nobel Prize laureate Rae Kwon Chung has been a full-time professor at the university.

In programs related to arts, culture, and sports, classes are taught by honored figures of arts and culture of the Republic of Kazakhstan, laureates of international competitions and festivals, and honored coaches of the Republic of Kazakhstan.

More than 22,000 students study in 5 higher schools and 7 faculties across 321 educational programs. Training is provided for nearly all sectors of the economy, including industry, transport, construction, the construction materials industry, light and food industries, agriculture, culture, tourism and services, pedagogy, and others.

Postgraduate education is offered through 111 master’s programs and 32 doctoral programs. There are 13 dissertation councils operating across 18 educational programs.

The university’s military department trains reserve officers in 5 military specialties.

Ғалымдар күніне арналған дәстүрлі сәуірлік халықаралық математикалық конференция

Традиционная апрельская международная математическая конференция, посвящённая Дню учёных

Traditional April International Mathematical Conference Dedicated to the Day of Scientists

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: М.А. Садыбеков

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: Д. Сураган

Ұйымдастыру комитетінің төрағасы: В.В. Вербовский

Конференция хатшысы: Махпал Манарбек



April Conference

**АКАДЕМИК НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
ТЫНЫСБЕК ШАРИПОВИЧ КАЛЬМЕНОВ**

6 апреля 2026 года исполняется 80 лет выдающемуся казахстанскому математику — академику Национальной академии наук Республики Казахстан Тынысбеку Шариповичу Кальменову.

Он родился в селе Коксаек Толембиского района Туркестанской области Республики Казахстан (ранее — Ленгерский район Южной Казахстанской области Казахской ССР).

Хотя „по паспорту“ его день рождения записан 5 мая, настоящей датой его рождения является 6 апреля 1946 года.

Тынысбек Шарипович — выпускник Новосибирского государственного университета (1969 г.) и представитель школы выдающегося советского ученого — члена-корреспондента АН СССР Андрея Васильевича Бицадзе.

Научные исследования, выполненные Т.Ш. Кальменовым в аспирантские годы (1969 — 1972), были посвящены исследованию корректности начальных и начально-краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений вида

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f;$$

$$k(0) = 0; k(y) > 0 \text{ при } y \neq 0.$$

Для этого общего уравнения Т.Ш. Кальменовым найдены достаточные условия корректности первой и второй задач Дарбу, включающие в себя все ранее известные условия корректности. А для различных модельных случаев этого уравнения впервые получены: критерий единственности решения, достаточные условия корректности и класс гладкости решения задачи Дарбу; критерий непрерывности решения задачи Гурса (при этом впервые указано на неравноправность характеристик для корректности задачи); сформулирована новая характеристическая задача Коши (неполная задача Гурса) и доказана ее корректность в классе аналитических функций.

С 1972 по 1985 годы Т.Ш. Кальменов работает в Институте математики АН КазССР, где он прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией. В эти годы область его научных интересов относится к теории дифференциальных операторов, где им получены значительные результаты.

В случае граничных задач для уравнений гиперболического и смешанного типов при исследовании задач в слабом смысле возникают существенные затруднения при выяснении отношения между обобщенными и классическими решениями и, как следствие, отсутствие доказательства единственности решения, отсюда однобокое исследование задач. В связи с этим важное значение приобретает вопрос: при каких условиях слабые решения являются классическими. В более точной постановке, когда обобщенное решение u граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка $Lu = f$ может быть приближено последовательностью $u_n \in W_2^2(\Omega)$ классических решений, в том смысле, что одновременно $u_n \rightarrow u$ и $Lu_n \rightarrow f$ в некоторой метрике, как правило, по норме $L_2(\Omega)$. Обобщенные решения, обладающие последним свойством, называют *сильными*.



В этом направлении Т.Ш. Кальменовым для вырождающегося уравнения смешанного типа

$$Lu = k(y)u_{xx} + u_{yy} + a(y)u_x + b(y)u_y + c(y)u = f(x, y)$$

(где $yk(y) > 0$, при $y \neq 0$) доказана корректность полупериодической задачи Дирихле; а для вырождающегося уравнения

$$Lu = \operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

показано существование сильных решений задач Дарбу и Трикоми.

Для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu = -\operatorname{sign} y u_{xx} - u_{yy} = f(x, y)$$

Т.Ш. Кальменовым доказан критерий сильной разрешимости задачи Трикоми в пространствах L_p , в терминах углов подхода эллиптической части границы области к линии изменения типа. При этом, в отличие от известных ранее работ, впервые показана неединственность слабых решений и даны критерии сильной разрешимости указанных задач.

Развивая операторный подход, Т.Ш. Кальменовым построена общая теория регулярных краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов. Классическая постановка краевой задачи такова: дано уравнение и краевое условие. Необходимо исследовать разрешимость этой задачи и свойства решения, если оно существует (в смысле принадлежности некоторому пространству). Начиная с работ J. von Neumann и М.И. Вишика, существует другой, более общий подход: задано уравнение и пространство, которому должны принадлежать правые части уравнений и краевых условий и решение. Нужно описать все краевые условия, для которых задача корректно разрешима в данном пространстве.

Т.Ш. Кальменовым описаны все корректные краевые задачи: для волнового уравнения в характеристическом треугольнике; для многомерного волнового уравнения в характеристическом конусе; для уравнения Лаврентьева–Бицадзе и для уравнения Трикоми; для многомерного уравнения смешанного типа. При этом впервые построен многомерный корректный аналог задачи Дарбу и дано ее решение в явном виде, что дает решение проблемы А.В. Бицадзе.

Большой цикл работ Т.Ш. Кальменова посвящен спектральной теории уравнений гиперболического и смешанного типов. В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений гиперболического и смешанного типов являются малоизученными. Отметим, что общеизвестные методы (в частности, абстрактная спектральная теория линейных операторов), являющихся мощным инструментом при изучении эллиптических операторов, оказываются малоприспособленными в применении к краевым задачам для уравнений гиперболического и смешанного типов в области, часть которой совпадает с характеристическим конусом.

По этой причине многие актуальные проблемы уравнений гиперболического и смешанного типов требуют специальных исследований и привлечения новых средств и методов. Одними из таких задач, являются вопросы спектра и сильной разрешимости локальных и нелокальных неэллиптических задач. Систематическое изучение таких спектральных вопросов начато именно с работ Т.Ш. Кальменова, Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева.

Т.Ш. Кальменовым сформулирован и доказан новый принцип экстремума для уравнений смешанного типа, носящий сейчас в литературе название „принцип максимума Кальменова“. На основании этого нового принципа экстремума им решена проблема существования собственного значения задачи Трикоми, что заложило основу нового перспективного научного направления - спектральной теории уравнений смешанного типа. Существование собственных значений задачи Трикоми доказано как для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, так и для общего уравнения Геллерстедта. Отметим что уравнения Трикоми входит во всех курсах математической физики.

Эти результаты явились основой для докторской диссертации „О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов“, защищенную в 1983 году в МГУ им. М.В. Ломоносова.

С 1985 по 1991 годы Т.Ш. Кальменов работал деканом математического факультета Казахского государственного университета, с 1991 по 1997 годы — ректором Казахского химико-технологического университета, Южно-Казахстанского технического университета. В период с 1998 по 2003 годы он заведующий кафедрой Южно-Казахстанского государственного университета.

В эти годы Т.Ш. Кальменов обращается к задачам в более общей постановке. После появления знаменитой работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского, внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Такие задачи являются существенно несамосопряженными и для их исследования не применимы классические хорошо разработанные методы исследований. Т.Ш. Кальменовым впервые для общего эллиптического оператора

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u$$

в произвольной области с гладкой границей доказана полнота корневых векторов основных видов задач Бицадзе–Самарского в общей постановке.

С 2004 года Т.Ш. Кальменов возвращается в Алматы, где становится Генеральным директором Центра физико-математических исследований Министерства образования РК, с 2012 года преобразованного в Институт математики и математического моделирования. Возглавляя институт по 2019 год, Тынысбек Шарипович вывел его в лидеры среди научных организаций Казахстана. Достаточно сказать, что по количеству научных публикаций (2015–2018 гг.) в международных рейтинговых журналах, индексируемых в Web of Science, **Институт математики и математического моделирования занял четвертое место среди всех казахстанских организаций**, уступив только трем крупным университетам — Назарбаев университету, Национальному университету им. аль-Фараби и Евразийскому университету им. Л.Н. Гумилева.

В эти годы Т.Ш. Кальменовым получены новые значительные результаты по классическим задачам уравнений в частных производных.

В теории уравнений математической физики и, например, в теории упругости, важное место занимает явное представление решения задач для неоднородного бигармонического уравнения. Т.Ш. Кальменовым впервые построена в явном виде (в терминах элементарных функций) полигармоническая функция Грина задачи Дирихле

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), f(x) \in L_2(\Omega_\delta),$$

$$\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

в шаре $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^n$ для случая произвольной размерности пространства.

Классический объемный потенциал Ньютона

$$u(x) = \varepsilon_n * f \equiv \int_{\Omega} \varepsilon_n(x-y) f(y) dy = L^{-1} f$$

где $\varepsilon(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа. Определяет величину масс или заряда, распределенных в области Ω с плотностью $\frac{f}{(n-2)\sigma_n}$. Он также часто применяется в теории функций и теоремах вложения. Поскольку фундаментальное решение $\varepsilon_n(x-y)$ симметрично, вещественнозначно и имеет слабую особенность, то интегральный оператор L^{-1} является вполне непрерывным самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$ и функция $u(x) = \varepsilon_n * f(x)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $-\Delta u = f$.

В работах Т.Ш. Кальменова впервые найдено краевое условие объемного потенциала Иссака Ньютона:

$$\frac{1}{2}u(x) = - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y,$$

для всех $x \in \partial\Omega$.

Как оказалось, эти краевые условия описывают очень важный в теоретической физике эффект „прозрачных краевых условий“, пропускающих уходящие волны и приходящие волны без отражения. Наличие таких краевых условий объемного потенциала позволяет свести задачу с условиями излучения типа Зоммерфельда в бесконечной области к задаче в ограниченной области и эффективно применять численные методы.

Эти результаты в дальнейшем были развиты на случаи теплового и волнового потенциалов, для уравнения Гельмгольца и уравнений смешанного типа. В том числе и в нецилиндрических областях. В работах его учеников и последователей была развита спектральная теория объемного потенциала, которая дала новые далеко идущие результаты. Также это послужило основанием для развития нового направления — спектральной геометрии объемного потенциала.

Классический пример Адамара демонстрирует некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа. Выдающимися советскими математиками — академиками А.Н. Тихоновым и М.М. Лаврентьевым, их учениками и последователями найдены условия корректности задачи Коши для уравнения Лапласа, и других некорректных задач. А также построены методы регуляризации некорректных задач. В работах Т.Ш. Кальменова методом разложения по собственным функциям смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом **установлено необходимое и достаточное условие корректности смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона** в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \pi, -1 < t < 1\}$:

$$Lu = u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \Omega,$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_1(x), u_t|_{t=-1} = \varphi_2(x).$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0,$$

Более того, показано, что решение задачи Коши является единственным и без задания краевых условий. Эти результаты были в дальнейшем развиты на широкий класс эллиптических задач Коши для уравнений второго и высокого порядков. А также для решения широкого класса некорректных задач.

Большой цикл работ Т.Ш. Кальменова посвящен исследованию интегральных операторов и операторов, порожденных краевыми задачами. В совместной работе с М. Отелбаевым был дан исчерпывающий ответ о нахождении условий на вещественное ядро $K(x, t)$ интегрального оператора

$$Sf(x) \equiv \int_{\Omega} K(x, t)f(t)dt,$$

при выполнении которых интегральный оператор

$(Sf)(x)$ удовлетворяет корректному краевому условию для соответствующего дифференциального уравнения. Этот результат был в дальнейшем развит на различные виды уравнений смешанного типа и для условий типа Бицадзе–Самарского.

Пользуясь граничными условиями ньютоновского потенциала, получен критерий минимальности эллиптического оператора. С помощью граничных условий теплового и волнового потенциалов найдены критерии минимальности для уравнения теплопроводности и волнового уравнения, которые эффективно применяются при описании регулярных задач для этих уравнений.

В настоящее время академиком Т. Ш. Кальменовым построен метод преобразования Ньютоновского потенциала простого и двойного слоя в специальный объёмный потенциал от правой части. С его помощью получено интегральное представление решения всех коэрцитивно разрешаемых задач для уравнения Лапласа. Установлено необходимое и достаточное условие когда коэрцитивно разрешаемая задача является либо краевой задачей, либо задачей типа Бизадзе—Самарского.

Здесь приведены только отдельные наиболее яркие, с нашей точки зрения, научные результаты Тынысбека Шариповича. В списке литературы даны основные его работы. Из недавних публикаций приведены только опубликованные в научных журналах, индексируемых в базе Web of Science.

С 2019 года Т.Ш. Кальменов работает заведующим отделом дифференциальных уравнений Института математики и математического моделирования. Он много лет являлся членом Национального научного совета „Научные исследования в области естественных наук“ — главного казахстанского совета, определяющего развитие науки в стране.

Характерной чертой математического творчества Т.Ш. Кальменова является обилие оригинальных методов и нестандартных подходов к решению математических проблем. Т.Ш. Кальменов относится к числу немногих ученых, сумевших оставить отпечаток своей индивидуальности почти во всех разделах математики, которыми он занимался. Он достойный преемник своего учителя — Андрея Васильевича Бицадзе — члена-корреспондента АН СССР и яркий продолжатель традиций советской математической школы.

С 1989 по 1993 год Тынысбек Шарипович являлся Председателем Межреспубликанского диссертационного совета (Казахстан, Узбекистан, Кыргызстан, Туркменистан, Таджикистан), что подтверждает высокий научный авторитет в СССР. Как член Международного математического общества, он неоднократно входил в оргкомитеты крупных международных конференций. Им ведется огромная организаторская работа по подготовке высококвалифицированных кадров; под его руководством в 1996 году был проведен I съезд математиков Казахстана. Академик выступал с докладами в США, Германии, Англии, Франции, Испании, Японии, КНР, Бельгии, Южной Корее, Малайзия, Польша, Индии, Австралии и многих других странах.

Под руководством академика Т.Ш. Кальменова защищены более 60 кандидатских диссертаций и диссертаций доктора PhD, 11 докторских диссертаций. Он имеет более 150 опубликованных научных работ, большинство из которых опубликовано в международных математических журналах. В том числе 14 работ опубликовано в журнале „Доклады АН СССР / Доклады РАН“. Только за последние 10 лет (2016–2026) им опубликовано более 45 работ в научных журналах, индексируемых в базе Web of Science.

Многолетняя научная, педагогическая и общественно-организационная деятельность Т.Ш. Кальменова отмечена рядом высоких наград и званий. Он является лауреатом премии Комсомола Казахстана (1978 г.), заслуженным деятелем науки и техники РК (1996 г.), награжден орденом «*Курмет*» (2008 г.), орденом «*Парасат*» (2024 г.) и юбилейными медалями.

В 2013 году за цикл работ «К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений» Т.Ш. Кальменов был удостоен **Государственной премии Республики Казахстан в области науки и техники**.

Академик Т.Ш. Кальменов, как профессиональный ученый и принципиальный руководитель является требовательным к себе и ко всем ученым, что помогает держать планку математической науки в Казахстане на высоком мировом уровне.

На сегодняшний день он является одним из наиболее ярких лидеров математиков Казахстана.

С неослабевающей энергией Т.Ш. Кальменов занимается научной работой, щедро раздает научные идеи своим ученикам и соратникам, реализует все новые творческие замыслы. Он полон новых и оригинальных математических идей.

Выдающиеся личные качества, честность, принципиальность во всех проблемных вопросах, высочайший профессионализм и огромный вклад в развитие отечественной науки обеспечили Тынысбеку Шариповичу непререкаемый авторитет среди казахстанских и зарубежных

коллег.

Особо следует отметить, что Тынысбек Шарипович вместе с супругой Жанар воспитал 10 детей, которые успешно трудятся в Республике Казахстан. Сейчас он счастлив в окружении более 35 внуков и 2 правнуков!

Свой юбилей Тынысбек Шарипович встречает в полном расцвете сил, излучая неиссякаемую энергию для активной деятельности на благо общества, науки и образования нашей страны!

Основные научные труды Т.Ш. Кальменова

1. Кальменов Т.Ш. *Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1971, т. 7, № 1, с. 178 — 181.

2. Kal'menov T.Sh. *A criterion for the uniqueness of a solution of Darboux's problem for a degenerate hyperbolic equation* // **Differential equations**, 1971, v. 7, № 1, p. 147 — 150.

3. Кальменов Т.Ш. *Критерий непрерывности задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1972, т. 8, № 1, с. 41 — 54.

4. Kal'menov T.Sh. *A criterion for the continuity of a solution of Goursat's problem for a degenerate equation* // **Differential equations**, 1972, v. 8, № 1, p. 29 — 39.

5. Кальменов Т.Ш. *О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений* // **Дифференц. уравнения**, 1973, т. 9, № 1, с. 84 — 96.

6. Kal'menov T.Sh. *A characteristic Cauchy problem for a class of degenerate hyperbolic equations* // **Differential equations**, 1973, v. 9, № 1, p. 63 — 72.

7. Кальменов Т.Ш. *О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся уравнений* // **Сообщения АН ГрССР**, 1973, т. 70, № 3, с. 533 — 536.

8. Кальменов Т.Ш. *О задаче Дарбу для одного вырождающегося уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1974, т. 10, № 1, с. 59 — 68.

9. Kal'menov T.Sh. *Darboux's problem for a degenerate equation* // **Differential equations**, 1974, v. 10, № 1, p. 41 — 47.

10. Кальменов Т.Ш. *О единственности регулярного решения задачи Дарбу для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений* // **Известия АН КазССР, Серия физ.-мат.**, 1974, № 1, с. 79 — 82.

11. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. *О гладкости решения одного класса вырождающихся эллиптических уравнений* // **Дифференц. уравнения**, 1977, т. 13, № 7, с. 1244 — 1255.

12. Kal'menov T.Sh., Otelbaev M.O. *Smoothness of solutions of a class of degenerate elliptic equations* // **Differential equations**, 1977, v. 13, № 7, p. 861 — 870.

13. Кальменов Т.Ш. *О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // **Дифференц. уравнения**, 1977, т. 13, № 8, с. 1418 — 1425.

14. Kal'menov T.Sh. *The spectrum of Tricomi's problem for a Lavrent'ev - Bitsadze problem* // **Differential equations**, 1977, v. 13, № 8, p. 984 — 989.

15. Кальменов Т.Ш. *О спектре задачи Геллерстедта* // **Труды Инст. мат. и мех. АН КазССР „Теор. и прикл. задачи по мат. и мех.“**, Алма-Ата, 1977, с. 167 — 169.

16. Кальменов Т.Ш. *О полупериодической задаче Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа* // **Дифференц. уравнения**, 1978, т. 14, № 3, с. 546 — 547.

17. Kal'menov T.Sh. *Semiperiodic Dirichlet problem for a class equations of mixed type* // **Differential equations**, 1978, v. 14, № 3, p. 385 — 386.

18. Кальменов Т.Ш. *О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка* // **Дифференц. уравнения**, 1979, т. 15, № 2, с. 354 — 356.

19. Kal'menov T.Sh. *The spectrum of Tricom's problem for a mixed fourth - order equation* // **Differential equations**, 1979, v. 15, № 2, p. 248 — 250.

20. Кальменов Т.Ш., Базарбеков А.Б. *Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // **Доклады АН СССР**, 1981, т. 261, № 2, с. 541 — 543.

21. Kal'menov T.Sh., Bazarbekov A.B. *A criterion for strong solvability of the Tricomi problem for the Lavrent'ev - Bitsadze equation* // **Soviet Math. Dokl.**, 1981, v. 261, № 2, p. 484 — 487.
22. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. *О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // **Дифференц. уравнения**, 1981, т. 17, № 5, с. 873 — 885.
23. Kal'menov T.Sh., Otelbaev M.O. *Regular boundary value problems for Lavrent'ev - Bitsadze equation* // **Differential equations**, 1981, v. 17, № 5, p. 578 — 588.
24. Кальменов Т.Ш. *О регулярных краевых задачах для волнового уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1981, т. 17, № 6, с. 1105 — 1121.
25. Kal'menov T.Sh. *Regular boundary value problems for the wave equation* // **Differential equations**, 1981, v. 17, № 6, p. 714 — 726.
26. Кальменов Т.Ш. *О регулярных расширениях одного минимального оператора Лаврентьева-Бицадзе* // В кн. „Краевые задачи для уравнений неклассического типа“, Новосибирск, 1981.
27. Кальменов Т.Ш. *О регулярных расширениях полуминимального оператора Лаврентьева-Бицадзе* // **Дифференц. уравнения**, 1982, т. 18, № 1, с. 37 — 58.
28. Kal'menov T.Sh. *Regular extensions of semiminimal Lavrent'ev - Bitsadze operator* // **Differential equations**, 1982, v. 18, № 1, p. 31 — 48.
29. Кальменов Т.Ш. *О многомерных регулярных краевых задачах для волнового уравнения* // **Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат.**, 1982, № 3, с. 18 — 25.
30. Кальменов Т.Ш. *О спектре самосопряженной задачи для волнового уравнения* // **Вестник АН КазССР**, 1982, № 2, с. 63 — 66.
31. Кальменов Т.Ш., Базарбеков А.Б. *Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в пространствах L_p* // **Дифференц. уравнения**, 1982, т. 18, № 7, с. 268 — 280.
32. Kal'menov T.Sh., Bazarbekov A.B. *A criterion for the strong solvability of Tricomi's problem for the Lavrent'ev - Bitsadze equation in L_p - spaces* // **Differential equations**, 1982, v. 18, № 7, p. 216 — 225.
33. Кальменов Т.Ш. *О сильных решениях задач Дарбу и Трикоми* // **Доклады АН СССР**, 1983, т. 273, № 3, с. 535 — 538.
34. Kal'menov T.Sh. *On strong solutions of the Darboux and Tricomi problems* // **Soviet Math. Dokl.**, 1983, v. 273, № 3, p. 672 — 674.
35. Кальменов Т.Ш. *О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми* // **Дифференц. уравнения**, 1983, т. 19, № 1, с. 66 — 75.
36. Kal'menov T.Sh. *Self - adjoint boundary - value problems for Tricomi's equation* // **Differential equations**, 1983, v. 19, № 1, p. 56 — 63.
37. Кальменов Т.Ш. *Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1983, т. 19, № 1, с. 75 — 78.
38. Kal'menov T.Sh. *Spectrum of a boundary - value problem with translation for the wave equation* // **Differential equations**, 1983, v. 19, № 1, p. 64 — 66.
39. Кальменов Т.Ш., Аубакиров Б.У. *О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // **Дифференц. уравнения**, 1986, т. 22, № 4, с. 700 — 702.
40. Кальменов Т.Ш. *О регулярных самосопряженных задачах для многомерного уравнения смешанного типа* // **Дифференц. уравнения**, 1986, т. 22, № 10, с. 1745 — 1753.
41. Kal'menov T.Sh. *Regular self-adjoint boundary-value problems for a multidimensional of mixed type* // **Differential equations**, 1986, v. 22, № 10, p. 1194 — 1201.
42. Кальменов Т.Ш., Ерошенков Е.П. *О спектре эллиптической задачи Бицадзе-Самарского* // **Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат.**, 1986, № 1, с. 72 — 75.
43. Кальменов Т.Ш., Ерошенков Е.П. *О полноте корневых векторов эллиптической задачи Бицадзе-Самарского* // **Доклады АН СССР**, 1987, т. 296, № 3, с. 528 — 531.
44. Kal'menov T.Sh., Eroshenkov E.P. *On the completeness of root vectors of the Bitsadze - Samarskii elliptic problem* // **Soviet Math. Dokl.**, 1987, т. 296, № 3, с. 528 — 531.

45. Кальменов Т.Ш., Бияров Б.Н. *О нелокальной вольтерровой задаче для гиперболического уравнения* // **Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат.**, 1988, № 5, с. 13 — 16.
46. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. *О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1990, т. 26, № 1, с. 60 — 65.
47. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A. *Dirichlet problem and nonlocal boundary-value problems for the wave equation* // **Differential equations**, 1990, v. 26, № 1, p. 55 — 59.
48. Кальменов Т.Ш., Буркитов А.Б. *О равномерной оценке асимптотического решения задачи Коши для сингулярно возмущенного волнового уравнения* // **Дифференц. уравнения**, 1992, т. 28, № 1, с. 33 — 41.
49. Kal'menov T.Sh., Burkitov A.B. *A uniform bound of an asymptotic solution of a Cauchy problem for a singularly perturbed wave equation* // **Differential equations**, 1992, v. 28, № 1, p. 31 — 39.
50. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Ержанов Н.Е. *Критерий сильной разрешимости Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Общий случай* // **Дифференц. уравнения**, 1993, т. 29, № 5, с. 870 — 875.
51. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Erzhanov N.E. *A criterion for strong solvability of the Tricomi problem for the Lavrent'ev - Bitsadze equation. General case.* // **Differential equations**, 1993, v. 29, № 5, p. 745 — 750.
52. Кальменов Т.Ш., Бименов М.А. *О свойствах корневых подпространств задачи Трикоми* // **Вестник КазНУ, Сер. мат., мех., инф.**, 2001, № 5, с. 30 — 32.
53. Кальменов Т.Ш., Бименов М.А. *Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми* // **Дифференц. уравнения**, 2003, т. 39, № 10, с. 1425 — 1428.
54. Kal'menov T.Sh., Bimenov M.A. *A Test for the Completeness of the Root Vectors in the Tricomi Problem* // **Differential equations**, 2003, v. 39, № 10, p. 1503 — 1505.
55. Кальменов Т.Ш., Джаманкараева М.А. *Спектральные свойства корневых векторов задачи Трикоми* // **Математический журнал**, 2004, № 1 (11), с. 45 — 49.
56. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. *Спектральные свойства корневых подпространств задачи Трикоми* // **Математический журнал**, 2004, № 4 (14), с. 44 — 48.
57. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. *О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения* // **Доклады НАН РК**, 2006, № 5, с. 9 — 12.
58. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. *Representation Green function of the Dirichlet problems for the bi-harmonic equation* // **Abstracts International Congress of Mathematicians, Madrid**, August 22-30, 2006, p. 416.
59. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. *Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа* // **Доклады РАН**, 2007, т. 414, № 2, с. 168 — 171.
60. Kal'menov T., Sh., Iskakova U. A. *A Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation* // **Doklady Mathematics**, 2007, v. 75, № 3, p. 370 — 373.
61. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. *Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре* // **Сиб. матем. журнал**, 2008, т. 49, № 3, с. 423 — 428.
62. Kal'menov T., Sh., Koshanov B.D. *Representation for the Greens function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball* // **Siberian Mathematical Journal**, 2008, v. 49, № 3, p. 423 — 428.
63. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. *Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere* // **Complex variables and Elliptic equations**, 2008, v. 53, № 2, p. 177 — 183.
64. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. *Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре* // **Доклады РАН**, 2008, т. 421, № 3, с. 305 — 307.
65. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. *Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball* // **Doklady Mathematics**, 2008, v. 78, № 1, p. 528 — 530.

66. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. *Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа* // Доклады РАН, 2008, т. 423, № 4. с. 730 — 732.
67. Kal'menov T.Sh., Iskakova U. A. *A Method for Solving the Cauchy Problem for the Laplace Equation* // Doklady Mathematics, 2008, v. 78, № 3, p. 874 — 876.
68. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Сураган Д. *Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре* // Математический журнал, 2008, т. 8, № 4, с. 68 — 72.
69. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. *Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиаприорных оценок В.А. Ильина* // Доклады РАН, 2008, т. 423, № 6. с. 730 — 732.
70. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *Determination of the Structure of the Spectrum of Regular Boundary Value Problems for Differential Equations by V.A. Il'in's Method of Anti - A Priori Estimates* // Doklady Mathematics, 2008, v. 78, № 3, p. 913 — 915.
71. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. *К спектральным вопросам объемного потенциала* // Доклады РАН, 2009, т. 428, № 4, с. 16 — 19.
72. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential* // Doklady Mathematics, 2009, v. 80, № 2, p. 646 — 649.
73. Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.А. *Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка* // Математические труды, 2010, т. 13, № 2, с. 128 — 138.
74. Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. *On a Recurrence Method for Solving a Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Second Order Equation* // Siberian Advances in Mathematics, 2011, v. 21, № 4, p. 274 — 281.
75. Кальменов Т.Ш., Кангузин Б.Е., Кошанов Б.Д. *Об интегральном представлении корректных сужений и регулярных расширений дифференциальных операторов* // Доклады РАН, 2010, т. 430, № 5. с. 589 — 592.
76. Kal'menov T.Sh., Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. *On Integral Representations of Correct Restrictions and Regular Extensions of Differential Operators* // Doklady Mathematics, 2010, v. 81, № 1, p. 94 — 96.
77. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. *Биортогональные разложения по корневым функциям дифференциальных операторов* // Дифференц. уравнения, 2010, т. 47, № 1, с. 144 — 148.
78. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. *Biorthogonal expansions in root functions of differential operators* // Differential equations, 2011, v. 47, № 1, p. 144 — 148.
79. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potential* // Operator Theory: Advances and Applications, 2011, v. 216, p. 187 — 210.
80. Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.S. *On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction* // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2010 (Dec.), v. 18, № 5, p. 471 — 492.
81. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. *Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области*, // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т. 52, № 6, с. 1063 — 1068.
82. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. *О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения*, // Дифференц. уравнения, 2012, т. 48, №. 3, с. 435 — 439.
83. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation* // Differential equations, 2012, v. 48, p. 441 — 445.
84. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. *Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения*, // Дифференц. уравнения, 2012, т. 48, №. 4, с. 595 — 599.
85. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation* // Differential equations, 2012, v. 48, № 3, p. 604 — 608.

86. Кальменов Т.Ш., Токмагамбетов Н.Е. *Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области* // **Сиб. матем. журн.**, 2013, т. 54, № 6, с. 1287 — 1293.
87. Kal'menov T.Sh., Tokmagambetov N.E. *On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain* // **Siberian mathematical journal**, 2013, v. 54, № 6, p. 1023 — 1028.
88. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *Initial-boundary value problems for the wave equation* // **Electronic journal of differential equations**, 2014, v. 48.
89. Кальменов Т.Ш., Сураган Д., *О проникаемых краевых условиях потенциала для оператора Лапласа–Бельтрами* // **Сиб. матем. журн.**, 2015, т. 56, № 6, с. 1326 — 1331.
90. Kal'menov T.Sh., Suragan D. *On permeable potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator* // **Siberian mathematical journal**, 2015, v. 56, № 6, p. 1060 — 1064.
91. Muratbekov M.B., Kal'menov T., Muratbekov M.M. *On discreteness of the spectrum of a class of mixed-type singular differential operators* // **Complex variables and elliptic equations**, 2015, v. 60, № 12, p. 1752 — 1763.
92. Burenkov V.I., Nursultanov E.D., Kal'menov T.Sh., Oinarov R., Otelbaev M., Tararykova T.V., Temirkhanova A.M. *EMJ: from Scopus Q4 to Scopus Q3 in two years?!* // **Eurasian mathematical journal**, 2016, v. 7, № 3, p. 6.
93. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М. *Критерий граничности интегральных операторов* // **Доклады РАН**, 2016, т. 466, № 4, с. 395 — 398.
94. Kal'menov T.Sh., Otelbaev M. *Boundary Criterion for Integral Operators* // **Doklady mathematics**, 2016, v. 93, № 1, p. 58 — 61.
95. Kal'menov T.Sh., Arepova G.D. *Quasi-spectral decomposition of the heat potential* // **Electronic journal of differential equations**, 2016, v. 76.
96. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Iskakova U.A. *On a criterion for the solvability of one ill-posed problem for the biharmonic equation* // **Journal of inverse and ill-posed problems**, 2016, v. 24, № 6, p. 777 — 783.
97. Кальменов Т.Ш. *О задаче Бицадзе для многомерного гиперболического уравнения* // **Сиб. журн. чист. и прикл. матем.**, 2017, т. 17, № 3, с. 33 — 36.
98. Begehr H., Celebi A.O., Kal'menov T., Meziani A. *Special issue on complex partial differential equations and higher dimensional versions* // **Complex variables and elliptic equations**, 2017, v. 62, № 10, p. 1411.
99. Kal'menov T., Baizhanov B.S. *The conference „Contemporary problems of pure and applied mathematics“ dedicated to the centenary of the birth of A.D. Taimanov* // **Siberian electronic mathematical reports-Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya**, 2017, v. 14, p. 66 — 68.
100. Kal'menov T., Iskakova U. *On an Ill-posed Problem for a Biharmonic Equation* // **Filomat**, 2017, v. 31, № 4, p. 1051 — 1056.
101. Kal'menov T., Torebek B.T. *On an ill-posed problem for the Laplace operator with nonlocal boundary condition* // **Eurasian mathematical journal**, 2017, v. 8, № 1, p. 50 — 57.
102. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. *О задаче типа Франкля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // **Сиб. матем. журн.**, 2017, т. 58, № 2, с. 298 — 304.
103. Kal'menov T., Sadybekov M.A. *On a Frankl-type problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation* // **Siberian mathematical journal**, 2017, v. 58, № 2, p. 227 — 231.
104. Кальменов Т.Ш., Сураган Д., *О некоторых неравенствах для собственных значений потенциала Рунда* // **Математические заметки**, 2017, т. 102, № 2, с. 844 — 850.
105. Kal'menov T., Suragan D. *Inequalities for the eigenvalues of the Riesz potential* // **Mathematical notes**, 2017, v. 102, № 5—6, p. 770 — 775.
106. Kal'menov T., Kassymov A., Suragan D. *Isoperimetric Inequalities for the Cauchy-Dirichlet Heat Operator* // **Filomat**, 2018, v. 32, № 3, p. 885 — 892.
107. Kal'menov T., Kassymov A., Suragan D. *Isoperimetric Inequalities for the Heat Potential Operator* // **Filomat**, 2018, v. 32, № 3, p. 903 — 910.

108. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М., Арепова Г.Д. *Краевое условие Бицадзе-Самарского для эллипτικο-параболического объёмного потенциала* // **Доклады РАН**, 2018, т. 480, № 2, с. 141 — 144.
109. Kal'menov T., Otelbaev M., Arepova G.D. *Bitsadze-Samarskii boundary condition for elliptic-parabolic volume potential* // **Doklady mathematics**, 2018, v. 97, № 3, p. 223 — 226.
110. Kal'menov T., Arepova G.D., Arepova D.D. *Boundary condition of the volume potential for an elliptic-parabolic equation with a scalar parameter* // **Electronic journal of differential equations**, 2018.
111. Kal'menov T., Torebek B.T. *A method for solving ill-posed nonlocal problem for the elliptic equation with data on the whole boundary* // **Journal of pseudo-differential operators and applications**, 2019, v. 10, № 1, p. 177 — 185.
112. Kal'menov T., Sadybekov M.A., Torebek B.T. *A criterion of solvability of the elliptic Cauchy problem in a multi-dimensional cylindrical domain* // **Complex variables and elliptic equations**, 2019, v. 64, № 3, p. 398 — 408.
113. Kal'menov T., Ruzhansky M., Suragan D. *On spectral and boundary properties of the volume potential for the Helmholtz equation* // **Mathematical modelling of natural phenomena**, 2019, v. 14, № 5, p. 502.
114. Kal'menov T., Arepova G.D. *Representation of solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in the form of a generalized convolution* // **Complex variables and elliptic equations**, 2019, v. 64, № 5, p. 816 — 824.
115. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М., Арепова Г.Д. *Граничные условия Бицадзе-Самарского для эллипτικο-параболического объёмного потенциала с гладким сопряжением* // **Дифференц. уравнения**, 2020, т. 56, № 6, с. 752 — 767.
116. Kal'menov T., Otelbaev M., Arepova G.D. *Bitsadze-Samarskii Boundary Conditions for an Elliptic-Parabolic Volume Potential with Smooth Matching* // **Differential equations**, 2020, v. 56, № 6, p. 740 — 755.
117. Kal'menov T. S., Kakharman N., Sadybekov M. A. *About Root Functions of Periodic Sturm-Liouville Problem with Symmetric Potential* // **Kazakh Mathematical Journal**, 2021, № 1, p. 31—38.
118. Kalmenov T. S., Kabanikhin S. I., Les A. *The Sommerfeld Problem and Inverse Problem for the Helmholtz Equation* // **Journal of Inverse and Ill-posed Problems**, 2021, v. 29, № 1, p. 49—64.
119. Kal'menov T. S., Les A. K., Iskakova U. A. *Determination of Density of Elliptic Potential* // **Eurasian Mathematical Journal**, 2021, v. 12, № 4, p. 43—52.
120. Kakharman N., Kal'menov T. *Mixed Cauchy Problem with Lateral Boundary Condition for Noncharacteristic Degenerate Hyperbolic Equations* // **Boundary Value Problems**, 2022, v. 2022, № 1, p. 35.
121. Kalmenov T. S., Rogovoy A. V., Kabanikhin S. I. *Hadamard's Example and Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Multidimensional Gellerstedt Equation* // **Journal of Inverse and Ill-posed Problems**, 2022, v. 30, № 6, p. 891—904.
122. Rogovoy A., Kalmenov T. *On One Minimal Hyperbolic Gellerstedt Operator with Internal Degeneracy* // **Kazakh Mathematical Journal**, 2022, v. 22, № 3, p. 21—32.
123. Kalmenov T., Kakharman N. *An Overdetermined Problem for Elliptic Equations* // **AIMS Mathematics**, 2024, v. 9, № 8, p. 20627—20640.
124. Kalmenov T. S. *On a Method for Constructing the Green Function of the Dirichlet Problem for the Laplace Equation* // **Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series**, 2024, v. 114, № 2, p. 105—113.
125. Rogovoy A. V., Kalmenov T. S., Kabanikhin S. I. *The Overdetermined Cauchy Problem for the Hyperbolic Gellerstedt Equation* // **Journal of Inverse and Ill-posed Problems**, 2024, v. 32, № 5, p. 1051—1062.
126. Kal'menov T., Suragan D. *Klein-Gordon Potential in Characteristic Coordinates* // **Demonstratio Mathematica**, 2024, v. 57, № 1, p. 20240015.

127. Ismailov M. I., Kal'menov T. S. *Inverse Scattering Problem for Nonstrict Hyperbolic System on the Half-Axis with a Nonzero Boundary Condition* // **Journal of Inverse and Ill-posed Problems**, 2024, v. 32, № 3, p. 351—359.

128. Kalmenov T. S., Kadirbek A., Kydyrbaikyzy A. *Some Properties of the One-Dimensional Potentials* // **Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series**, 2024, v. 113, № 1, p. 101—111.

129. Kakharman N., Kalmenov T. S. *A Modified Cauchy Problem with Nonlocal Boundary Condition for a Degenerate Hyperbolic Equation* // **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, 2025.

130. Kal'menov T. *Integral Representations of Solutions of Coercive Solvable Problems for the Laplace Equation* // **Boundary Value Problems**, 2026, 12 (2026).

131. Kal'menov T., Suragan D., Kadirbek A. *On a Method for Transforming the Double Layer Potential to a Volume Potential and its Application to the Description of Coercive Problems for the Laplace Equation* // **Applied and Computational Mathematics**, 2026, v. 25, № 1, p. 170—179.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Э. Ф. АБДЫЛДАЕВА

Кыргызско-Турецкий университет Манас, Бишкек, Кыргызстан

elmira.abdyldaeva@manas.edu.kg

В приложениях встречаются задачи [1–7], где при их исследовании основное внимание уделяется отслеживанию эволюции динамической системы в реальном времени. При этом от внешнего управляющего воздействия требуется, чтобы отклонение состояния системы от заданного эталонного движения на всем интервале времени управления было минимальным. В теории управления задачи в такой постановке принято называть задачами слежения.

В работах [8–9] исследованы вопросы разрешимости задачи слежения при нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма и приведены основные теоретические выводы при исследовании задачи слежения, где требуется минимизировать интегральный функционал:

$$J[\bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x)] = \int_0^T \int_Q [V(t, x) - \xi(t, x)]^2 dx dt + \\ + \int_0^T \left[\alpha \int_Q h[t, x, \bar{u}(t, x)] dx + \beta \int_\gamma b[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)] dx \right] dt, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (1)$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи:

$$V_{tt} - \lambda \int_0^t K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, \bar{u}(t, x)], \quad x \in Q \subset R^n, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q, \quad (3)$$

$$\Gamma V(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_i}(t, x) \cos(\delta, x_i) + a(x) V(t, x) = p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)], \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Здесь

$$h[t, x, \bar{u}(t, x)] = h[t, x, u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)] \in H(Q_T), \\ b[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)] = b[t, x, \vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_r(t, x)] \in H(\gamma_T)$$

— заданные нелинейные, монотонные и строго выпуклые функции по функциональным переменным $\bar{u}(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_m(t, x))$ и $\bar{\vartheta}(t, x) = (\vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_r(t, x))$; а $\xi(t, x) \in H(Q_T)$ — заданная функция.

В этой статье приведены результаты численного анализа сходимости приближенных решений при следующих исходных данных:

$$f[t, x, u(t, x)] = f[t, x, u_1(t, x), u_2(t, x)] = u_1(t, x) + u_2(t, x) - q_1 \ln(u_1^2(t, x) + 1) + q_2 \sqrt{u_2^2(t, x) + 1}, \\ p[t, x, \vartheta(t, x)] = \left[\frac{a}{2} \vartheta_1^2(t, x) + \frac{b}{2} \vartheta_2^2(t, x) \right] + (A \vartheta_2(t, x) + B)^2, \quad \psi_1(x) = 0, \quad \psi_2(x) = 0, \\ h[t, x, \bar{u}(t, x)] = u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x), \quad b[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)] = \vartheta_1^2(t, x) + \vartheta_2^2(t, x), \quad \xi(t, x) = t(x_1^2 + x_2^2), \\ T = 1, \quad q_1 = q_2 = 0.01, \quad a = b = 0.01, \quad m = 2, \quad r = 2, \quad \alpha = 0.003, \quad \beta = 0.05.$$

Подробно изложены характер сходимости приближенных решений по оптимальным распределенным и граничным управлениям, по оптимальному процессу и по минимальному значению функционала.

Ключевые слова: задача слежения, колебательный процесс, нелинейная оптимизация, интегро-дифференциальное уравнение, оператор Фредгольма, численный анализ, сходимость приближенных решений.

2020 Mathematics Subject Classification: 49K20, 49M25

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, 2009.
- [2] Quintero R., Lozano R. Trajectory tracking for quadrotors using nonlinear control and differential flatness, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015.
- [3] Chen Y., Li Q., Yang C. Trajectory tracking control of mobile robots based on model predictive control. *Sensors*, 2020.
- [4] Wang Q., Gao Y., Ji J., Xu C., Gao F. «Visibility-aware Trajectory Optimization with Application to Aerial Tracking». *Computer Science > Robotics*, 2021.
- [5] Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960.
- [6] Kalman R. E. The theory of optimal control and calculus of variations. *Mathematical Optimization Technique*, 1963.
- [7] Liu W. C., Hu N. P., Li G. L. Optimal tracking control for time-delay systems with persistent disturbances. *Journal of System Simulation*, vol. 18, no. 5, pp. 127–127, 2006.
- [8] Керимбеков А. К., Абдылдаева Э. Ф. О разрешимости задачи слежения при нелинейной векторной оптимизации колебательных процессов // *Труды института математики и механики УрО РАН*. Том 30, № 2. С. 103–115, 2024.
- [9] Abdylidaeva E. Convergence of approximations for the tracking problem in nonlinear optimization. *Filomat* 40:4 (2026), 1401–1410. <https://doi.org/10.2298/FIL2604401A>

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ

Г. АКИШЕВ

Казахстанский филиал МГУ, г. Астана, Казахстан

kzakishev@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами x_j . $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)$ (где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $0 < p_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$) — пространство Лебега со смешанной нормой, состоящее из всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, для которых конечна величина (см. [1], гл. 1, разд. 1, с. 9)

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_m/p_{m-1}} dx_m \right)^{1/p_m}.$$

В случае $p_1 = \dots = p_m = p$, вместо $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)}$, соответственно будем писать $L_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^m)}$ (см. [2], гл. 1, разд. 1. 1, с. 11).

Определение 1. (см. [3], с. 482). Пусть L линейное пространство, θ — нулевой элемент пространства L . Функционал $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется несимметричной нормой, если

1. $\|u\| > 0$ при $u \neq \theta$;
2. $\|\lambda u\| = \lambda \|u\|$ для $\lambda \in \mathbb{R}_+$;
3. $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$ для $u_1, u_2 \in L$.

Различные вопросы теорий приближения в пространстве с несимметричной нормой исследовали А. Р. Алимов [4], И. Г. Царьков [5] и см. библиографию в них.

Мы рассмотрим пространство со смешанной несимметричной нормой. Для функции f положим $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Пусть

$$\bar{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_m^{(1)}),$$

$$\bar{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_m^{(2)}),$$

$0 < p_j^{(1)}, p_j^{(2)} < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Через

$$L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)$$

обозначим пространство функций f , для которых

$$f^+ \in L_{\bar{p}^{(1)}}(\mathbb{R}^m) \text{ и } f^- \in L_{\bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m),$$

и положим

$$\|f\|_{L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)} := \|f^+\|_{L_{\bar{p}^{(1)}}(\mathbb{R}^m)} + \|f^-\|_{L_{\bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)}.$$

Функционал $\|f\|_{L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)}$ называется смешанной несимметричной нормой.

В случае $p_j^{(1)} = p_1$, $p_j^{(2)} = p_2$, для $j = 1, \dots, m$, функционал $\|f\|_{L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)}$ определен в [6].

При $p_j^{(1)} = p_1$, $p_j^{(2)} = p_2$, для $j = 1, \dots, m$ вместо

$$L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m) \text{ и } \|f\|_{L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)}$$

будем писать

$$L_{p_1, p_2}(\mathbb{R}^m) \text{ и } \|f\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{R}^m)},$$

соответственно.

Пусть $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j \in \mathbb{R}_+$. Множество всех целых функций экспоненциального типа $\bar{\nu}$ принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R}^m)$ обозначается символом $\mathfrak{B}_p^{(\bar{\nu})}$ (см. [2], [7]). Для $g_{\bar{\nu}} \in \mathfrak{B}_p^{(\bar{\nu})}$ С. М. Никольский [7] доказал следующее неравенство разных метрик

$$\|g_{\bar{\nu}}\|_{L_q(\mathbb{R}^m)} \leq 2^m \prod_{j=1}^m \nu_j^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g_{\bar{\nu}}\|_{L_p(\mathbb{R}^m)}, \quad (1)$$

при $1 \leq p < q \leq \infty$. А. П. Унинский [8] обобщил неравенство (1) на пространства Лебега со смешанной нормой. А. И. Козко [6] неравенство разных метрик Никольского для целых функций экспоненциального типа $\bar{\nu}$ доказал в изотропном пространстве $L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^m)$ с несимметричной нормой.

Нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $p_j, q_j^{(1)}, q_j^{(2)} \in [1, \infty)$, $n_j \in \mathbb{N}$, для $j = 1, \dots, m$ и $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, \dots, q_m^{(1)})$, $\bar{q}^{(2)} = (q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)})$. Тогда для $g_{\bar{\nu}} \in \mathfrak{B}_p^{(\bar{\nu})}$ справедливо неравенство

$$\|g_{\bar{\nu}}\|_{L_{\bar{q}^{(1)}, \bar{q}^{(2)}}(\mathbb{R}^m)} \ll \max \left\{ \prod_{j=1}^m \nu_j^{(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^{(1)}})_+}, \prod_{j=1}^m \nu_j^{(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^{(2)}})_+} \right\} \|g_{\bar{\nu}}\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)},$$

для $\nu_j \geq 1$,

Теорема 3. Пусть $p_j^{(1)}, p_j^{(2)}, q_j^{(1)}, q_j^{(2)} \in (0, \infty)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$,

$$\bar{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_m^{(1)}), \quad \bar{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_m^{(2)}),$$

$$\bar{q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, \dots, q_m^{(1)}), \quad \bar{q}^{(2)} = (q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)}),$$

1) $p_j^{(1)} \leq q_j^{(1)}$, $p_j^{(2)} \leq q_j^{(2)}$ для $j = 1, \dots, m$;

2) $p_j^{(1)} \leq p_j^{(2)}$ или $p_j^{(2)} \leq p_j^{(1)}$, для $j = 1, \dots, m$.

Тогда справедливо неравенство

$$\mathcal{G}_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}, \bar{q}^{(1)}, \bar{q}^{(2)}}(\bar{n}) = \sup_{g\bar{v} \in \mathfrak{B}_{\bar{v}}} \frac{\|g\bar{v}\|_{L_{\bar{q}^{(1)}, \bar{q}^{(2)}}}}{\|g\bar{v}\|_{L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^m \nu_j^{\max\{\alpha_{1,j}, \beta_{2,j}\}, \max\{\alpha_{2,j}, \beta_{1,j}\}},$$

где $\alpha_{1,j} = (\frac{1}{p_j^{(1)}} - \frac{1}{q_j^{(1)}})_+$, $\beta_{1,j} = (\frac{1}{p_j^{(2)}} - \frac{1}{q_j^{(2)}})_+$ и

$$\alpha_{2,j} = \left(\frac{1}{p_j^{(2)}} - \frac{1}{q_j^{(2)}}\right)_+ + \left(\frac{1}{p_j^{(1)}} - \frac{1}{p_j^{(2)}}\right)_+ \frac{\sum_{j=1}^m (\frac{1}{p_j^{(2)}} - \frac{1}{q_j^{(2)}})}{2 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j^{(2)}}},$$

$$\beta_{2,j} = \left(\frac{1}{p_j^{(1)}} - \frac{1}{q_j^{(1)}}\right)_+ + \left(\frac{1}{p_j^{(2)}} - \frac{1}{p_j^{(1)}}\right)_+ \frac{\sum_{j=1}^m (\frac{1}{p_j^{(1)}} - \frac{1}{q_j^{(1)}})}{2 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j^{(1)}}}.$$

Замечание 4. Аналог теорем 2 и 3 для тригонометрических полиномов доказаны в [9].

Ключевые слова: пространство с несимметричной нормой, целая функция, неравенство разных метрик.

2020 Mathematics Subject Classification: 41A17, 42A05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М. (1975).
- [2] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М. (1977).
- [3] Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблемы моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М. (1973).
- [4] Alimov A. R. Universality theorems for asymmetric spaces, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **26**:2, 2250017 (2023), 11 pp.
- [5] Царьков И. Г. Равномерная выпуклость в несимметричных пространствах, *Матем. замет.*, **110**:5 (2021), 773–785.
- [6] Козко А. И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой, *Мат. сб.*, **189**:9 (1998), 85–106.
- [7] Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, *Тр. МИАН СССР*, **38** (1951.), 244–278.
- [8] Унинский А. П. Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени, в *Теоремы вложения и их приложения. Труды симпозиума по теоремам вложения, Баку 1966*, Наука М. (1970), 212–218.
- [9] Акишев Г. Неравенство разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов в пространстве со смешанной несимметричной нормой, *Труды ИММ УрО РАН*, **29**:4 (2023), 11–26.

ВИБРОТРАНСПОРТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ПОДВИЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ДОСВЕТОВЫХ СКОРОСТЯХ

Л.А. АЛЕКСЕЕВА¹, И.А. КАНЫМГАЗИЕВА²

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

¹alexeeva@math.kz, ²kanymgazy1@gmail.com

Решением системы уравнений Максвелла для описания электромагнитных полей занимаются многие ученые. В основном они построены для описания и исследования стационарных и нестационарных электромагнитных процессов в неподвижных системах. Подвижные системы являются самыми распространёнными системами среди источников электромагнитных волн (все виды транспорта, ракеты, космические корабли и т.п.). Транспортные и вибротранспортные решения этих уравнений строят немногие, но они весьма актуальны, поскольку источники излучения часто находятся на движущихся объектах. Электромагнитные поля, порождаемые электрическими зарядами и токами, зависят не только от вида излучателя и длины ЭМ волн, но и от скорости движения платформы, на которой они расположены.

Авторами построены транспортные решения уравнений Максвелла для описания электромагнитных полей при произвольных скоростях движения источника излучения [1,2]. Для их классификации используется число Маха, равное отношению скорости движения источника V к скорости распространения ЭМ в среде, которую называют скоростью света: $M = V/c$. Рассмотрен весь диапазон скоростей, в том числе сверхсветовой, при котором возникают ударные ЭМ волны со скачком напряжений на фронте ударной ЭМ волны.

Основные результаты В данной работе, с использованием прямого и обратного преобразования Фурье обобщённых функций, получены тензор Грина и обобщённые решения вибротранспортных уравнений Максвелла для подвижных переменных токов с фиксированной частотой колебаний при досветовых скоростях движения их носителей различных форм.

При построении решений использовано компьютерное программное обеспечение Mathcad-15 для символьного исчисления трансформанты Фурье тензора Грина уравнений. С использованием трансформант Фурье базисных функций и методов их регуляризации построены скалярные потенциалы и на их основе тензор Грина этих уравнений в пространстве оригиналов.

Получены аналитические формулы для вычисления напряжённостей электрического и магнитного полей для виброисточников ЭМ полей на подвижных носителях различной формы (линейных, поверхностных, объемных).

Проведена компьютерная реализация скалярных потенциалов, которая показывает влияние частоты вибрации и скорости движения на волновые характеристики ЭМ поля.

Построенные решения можно использовать при расчётах электромагнитных волновых процессов в диапазоне досветовых скоростей движения источников излучения ЭМ волн во всем диапазоне частот (от коротковолнового до длинноволнового).

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МНВО РК по Республиканской программе BR31714735 (2026–2028) и гранту AP19674789 (2023–2025).

Ключевые слова: уравнения Максвелла, вибротранспортные решения, досветовые скорости, тензор Грина, преобразование Фурье.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q61, 78A25, 44A10

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexeyeva L.A., Kanymgazieva I.A. Maxwell's Transport Equations, Their Fundamental and Generalized Solutions at Constant Speed of Moving Emitters, *Technical Physics*, vol. 69, no. 4, pp. 507–515, 2024. DOI: 10.61011/JTF.2024.04.57523.174-23

[2] Alexeyeva L.A., Kanymgazieva I.A. Fundamental and Regular Transport Solutions of Maxwell's Equations and Their Properties at Superluminal Speeds: Shock Electromagnetic Waves, *Technical Physics*, vol. 69, no. 11, pp. 1635–1642, 2024. DOI: 10.61011/TP.2024.11.59740.184-24

[3] Алексеева Л.А. Дозвуковые вибротранспортные решения волнового уравнения в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$, *Известия НАН РК. Серия физико-математическая*, № 4, с. 42–59, 2024. <https://doi.org/10.32014/2024.2518-1726.306>

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Ё.К. АЛИКУЛОВ

Ташкентский университет информационных технологий имени
Мухаммада ал-Хоразмий, г. Ташкент, Узбекистан
yolqinqodirovich@gmail.com

Краевые задачи для нагруженных смешанных уравнений третьего порядка в бесконечных цилиндрических и призматических областях, до сих пор мало рассматривалось. Отметим работы [1-2]. Поэтому в данной работе формулируется и изучается задача с условиями Геллерстедта на параллельных характеристических плоскостях для нагруженного уравнения смешанного типа третьего порядка в трехмерной области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} - \mu U(x, 0, z) & \text{в } \Omega_0, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} - \mu U(x, 0, z) & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть Ω — область трёхмерного пространства (x, y, z) , ограниченная поверхностями:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : x = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \Gamma_1 : x = 1, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \Gamma_2 : y = h, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ S_1 : x + y = 0, \quad y \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{x_0}{2}, \quad S_2 : x - y = x_0, \quad y \leq 0, \quad \frac{x_0}{2} \leq x \leq x_0, \\ S_3 : x + y = x_0, \quad y \leq 0, \quad x_0 \leq x \leq \frac{1+x_0}{2}, \quad S_4 : x - y = 1, \quad y \leq 0, \quad \frac{1+x_0}{2} \leq x \leq 1, \\ z \in (-\infty, +\infty), \quad x_0 \in [0, 1], \end{aligned}$$

где

$$\mu = \text{const} < 0. \quad (2)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} A(0, 0, z) &= \bar{S}_0 \cap \bar{S}_1, \\ E(x_0, 0, z) &= \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3, \\ C_1\left(\frac{x_0}{2}, -\frac{x_0}{2}, z\right) &= \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2, \\ C_2\left(\frac{x_0+1}{2}, \frac{x_0-1}{2}, z\right) &= \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4, \\ B(1, 0, z) &= \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{S}_4, \\ l_0 &= \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{S}_1, \quad l_1 = \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{S}_4, \quad l_2 = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega \cap \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z \in (-\infty, +\infty)\}, \\ \Omega_1 &= \Delta AC_1 E, \\ \Omega_2 &= \Delta EC_2 B, \\ \Omega_3 &= \square C_1 EC_2 C. \end{aligned}$$

Определение 1. $L(-\infty, +\infty)$ – множество функций $H(x, y, z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Определение 2. Функция $U(x, y, z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap L(-\infty, +\infty)$;
- 2) $U_x(x, y, z), U_y(x, y, z), U_z(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap L(-\infty, +\infty)$, кроме того, функции $U_x(x, y, z)$ и $U_y(x, y, z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях l_0, l_1 и l_2 ;
- 3) $U_{xxx}, U_{xzz} \in C(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) \cap L(-\infty, +\infty)$, $U_{xy} \in C(\Omega_0) \cap L(-\infty, +\infty)$, $U_{xyy} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) \cap L(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет уравнению (1).

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача AG_1 . Требуется найти в области Ω регулярное решение $U(x, y, z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U|_{\Gamma_0} = \Phi_0(y, z), \quad U|_{\Gamma_1} = \Phi_1(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

$$U_x|_{\Gamma_0} = \Psi_1(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (4)$$

$$U|_{S_2} = \Psi_2(x, z), \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S_2} = \Psi_3(x, z), \quad \frac{x_0}{2} \leq x \leq x_0, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (5)$$

$$U|_{S_4} = \Psi_4(x, z), \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S_4} = \Psi_5(x, z), \quad \frac{x_0 + 1}{2} \leq x \leq 1, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (6)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} U(x, y, z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_x(x, y, z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_y(x, y, z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_z(x, y, z) = 0, \quad (7)$$

где n — внутренняя нормаль, $\Phi_0(y, z), \Phi_1(y, z), \Psi_j(x, z), (j = \overline{1, 5})$ — заданные функции, причем $\Phi_1(0, z) = \Psi_4(1, z), \Phi_i(y, z) \in C([0; h] \times R) \cap C^1((0, h) \times R) \cap L(-\infty, +\infty), (i = 0, 1)$,

$$\Phi'_{iy}(y, z) \in C((0; h) \times R) \cap L(-\infty, +\infty), \quad (i = 0, 1), \quad (8)$$

$$\Psi_1(y, z) \in C([0, h] \times R) \cap C^2((0, h) \times R) \cap L(-\infty, +\infty), \quad (9)$$

$$\Psi_2(x, z) \in C^2\left(\left[\frac{x_0}{2}, x_0\right] \times R\right) \cap C^3\left(\left(\frac{x_0}{2}, x_0\right) \times R\right) \cap L(-\infty, +\infty), \quad (10)$$

$$\Psi_3(x, z) \in C^1\left(\left[\frac{x_0}{2}, x_0\right] \times R\right) \cap C^3\left(\left(\frac{x_0}{2}, x_0\right) \times R\right) \cap L(-\infty, +\infty), \quad (11)$$

$$\Psi_4(x, z) \in C^2\left(\left[\frac{x_0 + 1}{2}, 1\right] \times R\right) \cap C^3\left(\left(\frac{x_0 + 1}{2}, 1\right) \times R\right) \cap L(-\infty, +\infty), \quad (12)$$

$$\Psi_5(x, z) \in C^1\left(\left[\frac{x_0 + 1}{2}, 1\right] \times R\right) \cap C^3\left(\left(\frac{x_0 + 1}{2}, 1\right) \times R\right) \cap L(-\infty, +\infty), \quad (13)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi_i(y, z) = 0, \quad \forall y \in [0, h], \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Psi_k(x, z) = 0, \quad x \in \left[\frac{x_0}{2}, x_0\right] \quad (k = 2, 3), \quad (14)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Psi_m(x, z) = 0, \quad x \in \left[\frac{x_0 + 1}{2}, 1\right] \quad (m = 4, 5). \quad (15)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (8)–(15), то в области Ω решение задачи AG_1 существует и единственно.

Ключевые слова: Задача Геллерстедта, уравнения смешанного типа, нагруженных уравнений третьего порядка, преобразование Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35R11, 34K37, 42B10

ЛИТЕРАТУРА

[1] B.I. Islomov, E.K. Alikulov. Analogues of the Cauchy-Goursat problem for a loaded third-order hyperbolic type equation in an infinite three-dimensional domain, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, (2021), Vol.18. No.1. P.72-85.

[2] B.I. Islomov, E.K. Alikulov. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain, *International journal of applied mathematics*, (2021), Vol.34. No.2. P.158-170.

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ ТИПА ВАРИНГА–ГОЛЬДБАХА.

И. АЛЛАКОВ¹, О.Ш. ИМАМОВ²

^{1,2}Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

¹iallakov@mail.ru, ²oybekimamov000@gmail.com

В данной статье приводятся результаты, полученные мною в последние годы при исследовании некоторых аддитивных задач типа Варинга–Гольдбаха в теории чисел. Эти результаты условно можно разделить на две группы:

1) О представление данного числа как сумма квадратов четырех простых чисел;
2) О представление данного числа как сумма двух простых и квадрата третьего простого числа.

3) Учитывая результат Хуа-Ло-Кена и утверждение Ж. Л. Лагранжа о сумме четырех квадратов разумно, предполагать, что каждое достаточно большое число $n \equiv 4(mod 24)$ можно представить в виде суммы четырех квадратов простых чисел, то есть в виде

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2, \quad (1)$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 — простые числа.

Несмотря на то, что в направлении решений этой задачи имеется достаточно много работ (см. [1]) эта задача остается нерешенной. В 2000 году J. Y. Liu и M. C. Liu [2] доказал, что если $N \geq 2$ и $U(N)$ — множество положительных целых чисел $n \equiv 4(mod 24)$, $n \leq N$ которые нельзя представить в виде (1), тогда справедлива оценка $E(N) = card U(N) \ll N^\theta$, где $\theta > 13/15$

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если N — достаточно большое число тогда,

$$E(N) \ll N^{13/15+4C(N)},$$

и для $n \notin U(n)$

$$R(n) = \frac{\pi^2}{16} \mathfrak{S}(n)n + O(NL^{-1}),$$

где

$$R(n) = \sum_{\substack{n=p_1^2+\dots+p_4^2 \\ p_i^2 \leq N, i=1,4}} (\log p_1) \cdots (\log p_4)$$

и $\mathfrak{S}(n) \gg 1$ — сингулярный ряд задачи.

Из этой теоремы следует

Следствие 2. Для

$$r(n) = \sum_{\substack{n=p_1^2+\dots+p_4^2 \\ p_i^2 \leq N, i=\overline{1,4}}} 1 -$$

числа представлений заданного $N/2 < n \leq N$, $n \equiv 4 \pmod{24}$, в виде (1) справедлива оценка

$$r(n) > c_2 \frac{n}{\log^4 n} \left(1 - c_3 \frac{1}{\log n} \right).$$

Теперь, мы исследуем условия существования решений уравнения (1) в простых числах из арифметических прогрессий. Для удобства введем следующие обозначения:

$$B(N, d) = \{ \bar{b} \in \mathbb{N}^4 : 1 \leq b_i \leq d, (b_i, d) = 1, b_1^2 + \dots + b_4^2 \equiv n \pmod{\sigma(d)d} \},$$

а также будем рассматривать $p_i \equiv b_i \pmod{d}$, $i = 1, \dots, 4$ и $\bar{b} = (b_1, \dots, b_4) \in B(N, d)$. Здесь $\sigma(d) = 1, 4, 2$ для $2 \nmid d$, $2 \parallel d$, $4 \mid d$ соответственно.

Пусть $S_d(n)$ — количество решений уравнения (1) в простых числах $p_i \equiv b_i \pmod{d}$, $i = 1, \dots, 4$; а $E_d(n)$ — количество n , которые не представляются в виде суммы квадратов простых чисел из арифметической прогрессии $p_i \equiv b_i \pmod{d}$, $i = 1, \dots, 4$ в интервале $1 \leq n \leq N$. Тогда справедлива следующая

Теорема 3. Если $n \equiv 4 \pmod{24}$, $2 \leq d \leq N^\delta$ и $Q = N^{21\delta}$, тогда

$$E_d(N) \ll N(Q^{15/14} d)^{-1}.$$

Метод, используемый в доказательстве теоремы, позволяет получить следующую оценку для $S_d(n)$ при $L < n \leq N$, где $L = N/50$.

Следствие 4. Для всех $n \leq N$, $n \equiv 4 \pmod{24}$, за исключением не более чем $\ll N(Q^{15/14} d)^{-1}$ значений из них, справедлива оценка $S_d(n) \gg n^{2-14\delta} (d^{1/2} \ln^4 n)^{-1}$.

32). Рассмотрим уравнение

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3^2 = b \quad (2)$$

где a_1, a_2, a_3, b — целые числа, p_1, p_2, p_3 — целые числа, (2) положить $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ то получим классическую задачу, поставленную Хуа Ло-Кэном в 1938 г. В работе И. Аллакова и Н. Музроповой доказано, что уравнение (2) при определённых условиях имеет решение в простых числах и получена оценка снизу для числа таких представлений.

Мы будем рассматривать условия, при которых уравнение (2) имеет решения в простых числах p_i из арифметической прогрессии $p_i \equiv l_i \pmod{D}$, $i = 1, 2, 3$, $D \leq N^\delta$. Не ограничивая общности в мы можем предполагать, что $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ и

$$(a_1, a_2, a_3) = 1 \text{ и } B = \max \{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\}. \quad (3)$$

Кроме того, как и в задаче Терри в работе Хуа Ло-Кен'а, будем предполагать, что для уравнения (2) выполняется условие связанное с сравнением. А именно, если определить $N(q)$ равенством

$$N(q) := \text{card} \{ (n_1, n_2, n_3) \mid 1 \leq n_j \leq q, (n_j, q) = 1, a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3^2 \equiv b \pmod{q} \}, \quad (4)$$

то это условие можно записать в виде "для всех $q \geq 1$ выполняется неравенства $N(q) \geq 1$ ".

Используя эти обозначения, сформулируем основной результат данной задачи в виде следующей

Теорема 5. Пусть a_1, a_2, a_3, b, B удовлетворяют условиям (3)–(4). Тогда существует эффективно вычисляемое постоянное число $A > 0$ такое, что справедливы следующие утверждения:

- a) если все a_1, a_2, a_3 положительные и $b \geq B^A$ то уравнение (2) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 из арифметической прогрессии $p_i \equiv l_i \pmod{D}, i = 1, 2, 3, D \leq N^\delta$;
 b) если не все a_1, a_2, a_3 имеют одинакового знак, то уравнение (2) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 ($p_i \equiv l_i \pmod{D}, i = 1, 2, 3, D \leq N^\delta$), которые не превосходит $3|b| + B^A$.

Следствие 6. Если N достаточно велико, то количество решений уравнения (2) в простых числах $NB^{-1} < p_1, p_2, p_3 \leq N, p_i \equiv l_i \pmod{D}, i = 1, 2, 3, D \leq N^\delta$ не меньше чем $c_1 N^{3/2} (BQ^{83/420} D \ln^3 N)^{-1}$, где c_1 – положительная постоянная, $Q = N^{21\delta}$.

Ключевые слова: диофантово уравнение; конгруэнт разрешимость; положительная разрешимость; исключительный нуль; L -функция Дирихле; символ Лежандра; малая дуга; большая дуга; особый ряд; особый интеграл.

2020 Mathematics Subject Classification: 11P05, 11P32, 11D09

ЛИТЕРАТУРА

- [1] X.-M. Meng (Jinan) On sums of a prime and four prime Squares in short intervals., *Acta Math. Hungar.*, **105** (4): (2004), 261–283.
 [2] J. Y. Liu and M. C. Liu. The exceptional set in the four prime squares problem, *Illinois J. Math.*, **44**: (2000), 272–293.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Д.Н. АЛТЫНБЕК¹, Б.Х. ТУРМЕТОВ²

¹Южно-Казахстанский исследовательский университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

²Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан

¹dinaraaltynbek987@gmail.com, ²batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Пусть Ω единичный шар в $R^n, n \geq 2, \partial\Omega$ — единичная сфера и

$$S_j x = (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

$j = 1, \dots, n$. Отображения $S_1, S_2, \dots, S_n$ являются отражениями относительно координатных гиперплоскостей $x_j = 0$ и порождают конечную абелеву группу порядка 2^n . Каждый элемент этой группы имеет вид $S^k = S_1^{k_1} S_2^{k_2} \dots S_n^{k_n}$, где мультииндекс $k = (k_1, \dots, k_n), k_j \in \{0, 1\}$.

Для гладкой функции $u(x)$ введем операторы

$$L_a u(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j (-\Delta) u(S_1^{j_1} S_2^{j_2} \dots S_n^{j_n} x), a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

$$D_c u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial r} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{c_k}{r} u(S_1^{k_1} S_2^{k_2} \dots S_n^{k_n} x), c_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

Рассмотрим в области Ω следующую задачу.

Задача N-R. Требуется найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, такую что $rD_c[u](x) \in C(\bar{\Omega})$ и выполняются условия:

$$L_a u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$D_c[u](x)|_{\partial\Omega} = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - заданные функции.

Отметим, что для уравнения (1) краевые задачи с условием Дирихле и Неймана изучены в работе [1].

Обозначим

$$\varepsilon_i(a) = \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{\langle i,j \rangle} a_j, \quad \varepsilon_i(c) = \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{\langle i,j \rangle} c_j, \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1, \quad \langle i, j \rangle = i_1 j_1 + \dots + i_n j_n.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon_i(a) \neq 0, \varepsilon_i(c) \geq 0, 0 \leq i \leq 2^n - 1, f(x) \in C^1(\bar{\Omega}), g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда
1) если $\sum_{j=0}^{2^n-1} c_j = 0$, то для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} g(x) dS_x = 0.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до аддитивной постоянной;

2) если $\sum_{j=0}^{2^n-1} c_j > 0$, то решение задачи 1 существует и единственно.

Теорема 2. Если решение задачи 1 существует, то оно представляется в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_a(x, \xi) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x, \xi) g(y) dS_y,$$

где функции $\mathcal{G}_a(x, \xi)$ и $\mathcal{G}(x, \xi)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_a(x, \xi) &= \frac{1}{2^n} \sum_{i \in N_0} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\varepsilon_i(a)} (-1)^{\langle i,k \rangle} G_N(x, S_n^{k_n} \dots S_1^{k_1} y) + \\ &+ \frac{1}{2^n} \sum_{i \in N_1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\varepsilon_i(a)} (-1)^{\langle i,k \rangle} G_R(x, S_n^{k_n} \dots S_1^{k_1} y) \\ \mathcal{G}(x, \xi) &= \frac{1}{2^n} \sum_{i \in N_0} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\langle i,k \rangle} G_N(x, S_n^{k_n} \dots S_1^{k_1} y) + \frac{1}{2^n} \sum_{i \in N_1} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\langle i,k \rangle} G_R(x, S_n^{k_n} \dots S_1^{k_1} y) \end{aligned}$$

Здесь $G_N(x, y)$ и $G_R(x, y)$, соответственно, — функции Грина классических задач Неймана и Робена.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP32724093).

Ключевые слова: инволюция, нелокальный оператор Лапласа, уравнение Пуассона, задача Неймана, задача Робена.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A09, 35J05, 35J25

ЛИТЕРАТУРА

[1] Турметов Б.Х., Карачик В.В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, **31**:4 (2021), 651-667.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Н.К. АРКАБАЕВ

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

nurkasym@gmail.com

Рассмотрена нелокальная задача типа Бицадзе–Самарского для гиперболического уравнения четвёртого порядка. Методом аналога функции Римана получено явное представление решения и доказана теорема о существовании и единственности решения.

Постановка задачи. В области $D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ для уравнения гиперболического типа [1]

$$u_{xxyy}(x, y) + bu_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad b = \text{const}, \quad (1)$$

в классе функций $M = \{u(x, y) : u(x, y) \in C^1(\bar{D}), u_{yy} \in C(\bar{D}), u_{xxyy} \in C(D)\}$ рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса M , удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 < y < h, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \lambda(x)u(x, h), \quad u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (3)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$, $f(x, y)$ — заданные функции, $\lambda(x)$ — заданная действительная функция, причём выполнены условия согласования

$$\varphi_1'(0) = \psi(0), \quad \varphi_2'(0) = \psi'(0), \quad \varphi_1(0) = \lambda(0)\varphi_1(h), \quad \varphi_2(0) = \lambda'(0)\varphi_1(h) + \lambda(0)\varphi_2(h). \quad (4)$$

Схема решения. Введём вспомогательную задачу Гурса (задача 2): найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), второму условию из (3) и условию $u(x, 0) = g(x)$, где $g(x)$ — пока неизвестная функция. В работе [2] задача 2 решена методом аналога функции Римана; в случае $b < 0$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \cosh(\sqrt{-b}x) \varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{-b}} \sinh(\sqrt{-b}x) \varphi_2(y) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^x \sinh[\sqrt{-b}(\xi - x)] (g''(\xi) + bg(\xi)) d\xi - \\ & - \frac{y}{\sqrt{-b}} \int_0^x \sinh[\sqrt{-b}(\xi - x)] (\psi''(\xi) + b\psi(\xi)) d\xi + \\ & + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^x d\xi \int_0^y (\eta - y) \sinh[\sqrt{-b}(\xi - x)] f(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя интегрирование по частям в (5) и учитывая $g(0) = \varphi_1(0)$, $g'(0) = \varphi_2(0)$, представление (5) приводится к виду

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \cosh(\sqrt{-b}x) \varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{-b}} \sinh(\sqrt{-b}x) \varphi_2(y) - \frac{1}{\sqrt{-b}} \sinh(\sqrt{-b}x) \varphi_2(0) \\ & + g(x) - \cosh(\sqrt{-b}x) \varphi_1(0) - \frac{y}{\sqrt{-b}} \sinh(\sqrt{-b}x) \psi'(0) \\ & + y \psi(x) - y \cosh(\sqrt{-b}x) \psi(0) \\ & + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^x d\xi \int_0^y (\eta - y) \sinh(\sqrt{-b}(\xi - x)) f(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая в (6) $y = h$, получим $u(x, h) = F(x) + g(x)$, где $F(x)$ – известная функция, определяемая через входные данные задачи. Используя нелокальное условие $u(x, 0) = \lambda(x)u(x, h)$ и равенство $u(x, 0) = g(x)$, приходим к соотношению

$$g(x)(1 - \lambda(x)) = \lambda(x)F(x). \quad (7)$$

Если $\lambda(x) \neq 1$ при $x \in [0, \ell]$, то

$$g(x) = \frac{\lambda(x)F(x)}{1 - \lambda(x)}, \quad (8)$$

и подстановка (8) в (6) определяет решение задачи 1.

Теорема 1. Если $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^2[0, h]$, $\psi(x) \in C^2[0, \ell]$, выполнены условия согласования (4) и $\lambda(x) \neq 1$ при $x \in [0, \ell]$, то задача 1 в области D имеет единственное решение из класса M .

В случае $\lambda(x) = 1$ нарушается корректность задачи, поскольку граничные условия становятся линейно зависимыми.

Пример 2. Для уравнения

$$u_{xxuy} - 4u_{yy} = y$$

в $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ с условиями

$$u(0, y) = y^2, \quad u_x(0, y) = y^3, \quad u(x, 0) = x u(x, 1), \quad u_y(x, 0) = x^2$$

по формулам (8) и (6) получено решение

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \cosh(2x)y^2 + \frac{1}{2}\sinh(2x)y^3 + \frac{x}{1-x}\cosh(2x) + \frac{x}{2(1-x)}\sinh(2x) \\ & + \frac{x^3}{1-x} - \frac{x}{24(1-x)}(1 - \cosh(2x)) + yx^2 - \frac{y^3}{24}(1 - \cosh(2x)). \end{aligned} \quad (9)$$

принадлежность которого классу M и выполнение всех краевых условий проверяется непосредственно.

Финансирование: Данное исследование не получило конкретного гранта от какого-либо финансирующего агентства в государственном, коммерческом или некоммерческом секторах.

Ключевые слова: нелокальная задача, единственное решение, представление решения, аналог функции Римана, задача Бицадзе–Самарского.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L35, 35L25, 35A22

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аркабаев Н.К., Сопуев А. Нелокальная задача с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка // Вестник КРСУ. – 2010. – Т. 10, № 9. – С. 150–153.
- [2] Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
- [3] Осмоналиев А.Б. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка гиперболического типа // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. математика, механика, информатика. – Алматы, 2004. – № 2(41). – С. 19–26.
- [4] Осмоналиев А.Б. Краевые задачи для гиперболических и смешанных парабола-гиперболических уравнений четвертого порядка: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2007. – 21 с.

О НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Х. АТТАЕВ

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

attaev.anatoly@yandex.ru

В докладе будут сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности решения начальных задач для следующих двух нагруженных дифференциальных уравнений

$$u_x + u_y = \lambda u_y(x_0, y),$$

$$u(x, kx) = \varphi(x)$$

и

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u_{yy}(x_0, y),$$

$$u(x, kx) = \varphi(x), \quad u_y(x, kx) = \psi(x).$$

Будет обращено внимание на существенную зависимость результатов от взаимного расположения четырех параметров, а именно x_0 , λ , k и промежутка, где задаются начальные данные.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КРУГЕ

Г.А. АУБАКИРОВА¹, М.А. САДЫБЕКОВ²

^{1,2}*Институт математики и математического моделирования КН МНВО РК*

¹*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан*

¹guldarauaubakirova2001@gmail.com, ²sadybekov@math.kz

Рассматривается обратная задача для уравнения Пуассона в единичном круге. Требуется определить решение уравнения и правую часть, зависящую от угловой переменной. Задача формулируется с граничным условием Дирихле и дополнительным условием Неймана. Решение строится методом разложения по ортонормированному базису тригонометрических функций. Исследуются условия существования решения в пространствах Соболева и гёльдеровых классах функций.

Постановка задачи. Рассмотрим единичный круг

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \Gamma = \{(r, \theta) : r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Требуется найти функцию $u(r, \theta)$ и правую часть $f(\theta)$, удовлетворяющие уравнению Пуассона

$$-\Delta u(r, \theta) = f(\theta), \quad (r, \theta) \in \Omega. \quad (1)$$

На границе круга задается условие Дирихле

$$u(1, \theta) = \tau(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2)$$

В качестве дополнительного условия используется условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = \nu(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3)$$

Функции $\tau(\theta)$ и $\nu(\theta)$ предполагаются 2π -периодическими.

Теорема 1. Пусть

$$\tau \in C^{2+\varepsilon}(\Gamma), \quad \nu \in C^{1+\varepsilon}(\Gamma), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Тогда классическое решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит классу

$$u \in C^{2+\varepsilon}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad f \in C^\varepsilon(\Gamma).$$

Теорема 2. Пусть

$$\tau \in W_2^2(\Gamma), \quad \nu \in W_2^1(\Gamma).$$

Тогда обобщенное решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит классу

$$u \in W_2^2(\Omega), \quad f \in L_2(0, 2\pi).$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23485279).

Ключевые слова: уравнение Пуассона, обратная задача, пространства Соболева, гёльдеровы классы.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J05, 31A25

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. Direct and inverse problems for the Poisson equation with equality of flows on a part of the boundary, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **64**:5 (2019), 777–791.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

А.Д. АХМЕТШИН

Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика

Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

aleksandr_050401@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \lambda(x) D_{-\infty y}^\alpha u(x, y) + \mu(x) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, y < T\}$, где $D_{-\infty y}^\alpha$ — дробная производная Лиувилля по переменной y порядка α , $0 < \alpha < 1$, определяемая равенством

$$D_{-\infty y}^\alpha u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^y \frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x, t) dt.$$

В работе также будем использовать обозначения:

$$\Omega_a = \{(x, y) : a \leq x < b, y < T\}, \quad \Omega^\varepsilon = \{(x, y) : a < x < b - \varepsilon, y < T - \varepsilon\}.$$

Постановка задачи: в области Ω найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(a, y) = \varphi(y), \quad y < T. \quad (2)$$

Определение 1. Будем называть функцию $u(x, y)$ регулярным решением уравнения (1) в области Ω , если: $u(x, y) \in C(\Omega_a)$, функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x , а функция $D_{-\infty y}^{\alpha-1} u(x, y)$ — по переменной y для всех $(x, y) \in \Omega$; $(R-y)^{-\alpha} u(x, y)$ интегрируема на $(-\infty, R)$ для любого $R < T$; $u(x, y)$ удовлетворяет (1).

Теорема 2. Пусть $\mu(x) \in C(a, b) \cap L(a, b)$, $\lambda(x) \in L(a, b)$, $(\lambda(x))^{-1} \in C(a, b)$, $\lambda(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, $f(x, y)$, $\frac{f(x, y)}{\lambda(x)} \in L(\Omega^\varepsilon)$, $\varphi(y) \in L(-\infty, T - \varepsilon)$ и

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \sup_{\substack{x \in (a, b - \varepsilon) \\ y < R}} |u(x, y)| = 0 \quad (3)$$

для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

Если $u(x, y)$ - регулярное решение задачи (1), (2), то оно представимо в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) G_0(x, a, y, t) dt + \int_a^x \int_{-\infty}^y f(q, t) G_0(x, q, y, t) dt dq, \quad (4)$$

где

$$G_\eta(x, q, y, t) = e^{-\int_q^x \mu(\gamma) d\gamma} \omega_\eta \left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t \right), \omega_\eta(x, y - t) = (y - t)^{\eta-1} \phi \left(-\alpha, \eta, -\frac{x}{(y - t)^\alpha} \right),$$

$$\phi(\xi, \eta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\xi k + \eta)}$$

— функция Райта.

Теорема 3. Существует не более одного регулярного решения задачи (1), (2) в классе функций, удовлетворяющих условию (3).

Теорема 4. Пусть $\delta > 1 - \alpha$, $\varphi(y) \in C(-\infty, T) \cap L(-\infty, T - \varepsilon)$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} (-y)^\delta \varphi(y) = 0$, a $\mu(x) \in C(a, b) \cap L(a, b)$, $\lambda(x) = (x - a)^\zeta g_1(x)$, $g_1(x) \in C[a, b]$, $g_1(x) > 0 \forall x \in [a, b]$, $\zeta > -1$, функция $f(x, y) \in C(\Omega_a) \cap L(\Omega^\varepsilon)$, и представима в виде

$$f(x, y) = D_{-\infty y}^{-\nu} g(x, y), \nu > \alpha,$$

где $g(x, y) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $(x - a)^{-\sigma_1} g(x, y) \in C(\Omega_a)$ и

$$\sup \{ (x - a)^{-\sigma_1} (T - y)^{-\sigma_2} |g(x, y)| : (x, y) \in \Omega^\varepsilon \} \leq C, C = C(\varepsilon)$$

для некоторых $\sigma_1 > \zeta$, $-\sigma_2 > \nu + 1$ и любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Тогда функция $u(x, y)$ определённая равенством (4), является регулярным решением задачи (1), (2).

Замечание 5. В условии теоремы 3 на функцию $f(x, y)$, в отличие от аналогичного условия работы [1] (см. условие (21) указанной работы), требуется представимость правой части $f(x, y)$ в виде дробного интеграла лишь по одной переменной y . В этом смысле данное условие оказывается слабее соответствующего условия работы [1]. При этом меняются (немного усиливаются) требования к поведению функции $g(x, y)$ на границе области.

Полный текст исследования с доказательствами всех теорем изложен в [2].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (гранты № AP23488740, № AP23488729, 2024–2026 гг.).

Ключевые слова: уравнение с частными производными; краевая задача; производная дробного порядка; производная Лиувилля; функция Райта.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11

ЛИТЕРАТУРА

[1] Псху А.В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с дробной производной Лиувилля, *Дифференциальные уравнения*, **58**:8 (2022), 1043–1051.

[2] Ахметшин А.Д. Краевая задача для одного уравнения с переменными коэффициентами и дробной производной Лиувилля, *Дифференциальные уравнения*, **60**:8 (2024), 1124–1130.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВАМИ МОРРИ, НА МНОГОМЕРНОМ ТОРЕ: ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Ш.А. БАЛГИМБАЕВА¹, А.К. ЖАНАБИЛОВА²

^{1,2}Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

sholpan.balgyn@gmail.com

Пусть $\tilde{L}_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ ($0 < p \leq \infty$)-пространство Лебега с обычной (квази)нормой, $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d -мерный тор.

Пространство Морри $\widetilde{\mathcal{M}}_u^p := \mathcal{M}_u^p(\mathbb{T}^d)$ — совокупность всех $f \in L_u(\mathbb{T}^d)$ таких, что

$$\|f | \widetilde{\mathcal{M}}_u^p\| := \sup_{Q: |Q| \leq 1} |Q|^{1/p-1/u} \left(\int_Q |f(x)|^u dx \right)^{1/u} < \infty.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\psi(x) = 1$, если $|x|_\infty \leq 1$, $\psi(x) = 0$, если $|x|_\infty \geq 3/2$.

Положим $\varphi_0 := \psi$, $\varphi_j(x) := \varphi_0(2^{-j}x) - \varphi_0(2^{1-j}x)$, $\varphi_{-j} \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots$

Пусть $\ell_q := \ell_q(\mathbb{Z})$ — пространство числовых последовательностей $(a_j) := (a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ с обычной (квази)нормой. Для $(g_j(x))$, $x \in \mathbb{I}^d$,

$$\begin{aligned} \|(g_j(x)) | \ell_q(\mathcal{M}_u^p(\mathbb{T}^d))\| &:= \left\| \|(g_j(x)) | \mathcal{M}_u^p(\mathbb{T}^d)\| | \ell_q \right\|; \\ \|(g_j(x)) | \mathcal{M}_u^p(\mathbb{I}^d; \ell_q)\| &:= \left\| \|(g_j(x)) | \ell_q\| | \mathcal{M}_u^p(\mathbb{T}^d) \right\|. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца умеренных распределений, а $\tilde{\mathcal{S}}' := \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ — подпространство $\mathcal{S}'$ распределений, 1-периодических по каждой переменной; $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье распределения $f \in \mathcal{S}'$.

Для $f \in \mathcal{S}'$ $\widetilde{\Delta}_j(f, x) := \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \hat{f})(x)$, $\widetilde{\Delta}_j(f, x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$ ($\xi x = \sum_{\kappa=1}^d \xi_\kappa x_\kappa$ — скалярное произведение ξ , $x \in \mathbb{R}^d$).

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq \infty$, $0 < u \leq p \leq \infty$.

$$\tilde{\mathcal{N}}_{p,q,u}^s := \mathcal{N}_{p,q,u}^s(\mathbb{T}^d) := \{f \in \tilde{\mathcal{S}}' : \|f | \tilde{\mathcal{N}}_{p,q,u}^s\| := \left\| \left(2^{js} \widetilde{\Delta}_j(f, x) \right) | \ell_q(\widetilde{\mathcal{M}}_u^p) \right\| < \infty\}$$

— пространства Никольского-Бесова-Морри на торе;

при $u < \infty$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{p,q,u}^s := \mathcal{E}_{p,q,u}^s(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in \tilde{\mathcal{S}}' : \|f | \tilde{\mathcal{E}}_{p,q,u}^s\| := \left\| \left(2^{js} \widetilde{\Delta}_j(f, x) \right) | \widetilde{\mathcal{M}}_u^p(\ell_q) \right\| < \infty \right\}$$

— пространства Лизоркина-Трибеля-Морри на торе.

Пусть $s, \tau \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq \infty$. При $0 < p \leq \infty$

$$\tilde{B}_{p,q}^{s,\tau} := B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{T}^d) :=$$

$$\{f \in \mathcal{S}' : \|f | \tilde{B}_{p,q}^{s,\tau}\| := \sup_{Q \in \tilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \left\{ \sum_{j=j(Q)}^\infty \left[\int_Q 2^{jsp} |\widetilde{\Delta}_j(f, x)|^p \right]^{q/p} \right\}^{1/q} < \infty\}$$

— гладкостные пространства типа Никольского-Бесова, ассоциированные с пространством Морри на торе;

при $0 < p < \infty$

$$\tilde{F}_{p,q}^{s,\tau} := F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{T}^d) :=$$

$$\{f \in \tilde{S}' : \|f\|_{\tilde{F}_{p,q}^{s,\tau}} := \sup_{Q \in \tilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \left\{ \int_Q \left[\sum_{j=j(Q)}^{\infty} 2^{jsq} |\tilde{\Delta}_j(f, x)|^q \right]^{p/q} dx \right\}^{1/p} < \infty\}$$

гладкостные пространства типа Лизоркина-Трибеля, ассоциированные с пространством Морри на торе; здесь $\mathcal{Q}$ – множество всех диадических кубов $Q = Q_{j\lambda} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^j x - \lambda \in [0, 1)^d\}$, $j \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}^d$; $j(Q) = -\log_2 l(Q)$, $\tilde{\mathcal{Q}} := \{Q \in \mathcal{Q} \mid Q \subset [0, 1)^d\}$.

Нами дано полное описание (при естественных значениях всех параметров) интерполяции действительным методом для пар пространств Никольского-Бесова-Морри $\tilde{N}_{p,q_0,u}^{s_0}$ и $\tilde{N}_{p,q_1,u}^{s_1}$ при фиксированных p и u , а также пар пространств Никольского-Бесова $\tilde{B}_{p,q_0}^{s_0,\tau}$ и $\tilde{B}_{p,q_1}^{s_1,\tau}$ и Лизоркина-Трибеля $\tilde{F}_{p,q_0}^{s_0,\tau}$ и $\tilde{F}_{p,q_1}^{s_1,\tau}$, связанных с пространствами Морри, заданных на многомерном торе. При доказательстве использованы результаты о представлениях и эквивалентных (квази)нормировках этих пространств, полученные авторами.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31714735).

Ключевые слова: пространства Никольского-Бесова, пространство Лизоркина-Трибеля, интерполяция

2020 Mathematics Subject Classification: 41A05

КРИТЕРИЙ ОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.С. БАЛТАБАЙ¹, Д.С. КАРАТАЕВА²

^{1,2}Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилёва, Астана, Казахстан

¹dinazbaltabaiiii@gmail.com, ²danaserkhil@gmail.com

Дискретный p -лапласиан играет важную роль в современных вычислительных моделях. В частности, предложены графовые нейронные сети, в которых механизм распространения информации выводится из регуляризации, связанной с p -лапласианом.

Цель таких моделей — обучить нейронную сеть для классификации узлов графа и предсказания меток, используя структуру данных.

Кроме того, полулинейные уравнения находят применение при исследовании p -лапласовских моделей, теории неньютоновских жидкостей и процессов в пористых средах.

С теоретической точки зрения важной задачей является установление условий осцилляторности решений. Известно, что преобразование Риккати играет ключевую роль в качественной теории полулинейных уравнений и позволяет получать новые осцилляционные результаты.

Также ранее были получены новые свойства осцилляции для уравнений с p -лапласовскими операторами, которые расширяют существующие результаты.

Несмотря на большое количество исследований, критерии осцилляторности часто формулируются для общих коэффициентов. Анализ специальных весовых структур остаётся менее изученным и может привести к более точным условиям.

В настоящей работе рассматривается разностное уравнение второго порядка

$$\Delta((n+1)|\Delta x_n|^{p-2}\Delta x_n) + \frac{1}{n+1}|x_n|^{p-2}x_n = 0, \quad n \geq 1, p > 1. [1]$$

где

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Целью работы является установление достаточного условия осцилляторности всех решений уравнения (1), а также доказательство точности полученного критерия.

Получено достаточное условие осцилляторности для квазилинейного разностного уравнения второго порядка с дискретным p -лапласианом.

Показано, что расходимость ряда коэффициентов определяет переход между осцилляторным и неосцилляторным поведением решений.

Результаты могут применяться при анализе дискретных моделей, возникающих в задачах машинного обучения и сетевого анализа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Agarwal R.P. *Difference Equations and Inequalities*. 2nd ed. Marcel Dekker, 2000.
- [2] Řehák P. Oscillatory properties of second order half-linear difference equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2001.
- [3] Došlý O., Řehák P. Generalized discrete Riccati equation and oscillation of half-linear difference equations.
- [4] Došlý O., Řehák P. *Half-Linear Differential Equations*. Elsevier, 2005.
- [5] Bazighifan O. et al. New Criteria for Oscillation of Half-Linear Differential Equations with p -Laplacian-like Operators. *Mathematics*, 2021.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Б.Х. БАРОТОВ¹, А.И. КОЖАНОВ²

¹Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

¹b.barotov@g.nsu.ru, ²kozhanov@math.nsc.ru

Работа посвящена исследованию краевых задач для вырождающихся интегро - дифференциальных уравнений вольтерровского типа высокого порядка на отрезке $[0, T]$. Рассматривается уравнение вида

$$h(t)D_t^{2p}u(t) + c(t)u(t) + \int_0^t R(t - \tau)u(\tau)d\tau = f(t),$$

где $h(t)$ — неотрицательная функция, обращающаяся в ноль на концах отрезка (вырождение).

В классических работах М.В. Келдыша [1], Г. Фикера [2] и В.Н. Врагова [3] для таких уравнений многообразия вырождения освобождаются от части граничных условий. В настоящей работе рассматривается принципиально иной случай: граничные данные на концах отрезка задаются в полном объеме, независимо от вырождения. Изучаются три типа краевых задач, предложенных в [4].

Цель работы — доказательство существования и единственности регулярных решений, т.е. решений из пространства Соболева $W_2^{2p}([0, T])$, обладающих всеми обобщенными производными, входящими в уравнение. Исследование проводится в пространствах Лебега и Соболева [5]-[7].

Для анализа применяется метод регуляризации, метод продолжения по параметру [8] и техника априорных оценок. Ключевую роль играют оценки интегральных операторов Вольterra, позволяющие контролировать влияние интегрального члена.

Установлены условия на функции $h(t)$, $c(t)$, ядро $R(t)$ и правую часть $f(t)$, обеспечивающие корректность поставленных задач. Показано, что при определенных соотношениях между порядком вырождения и порядком уравнения полная постановка граничных условий является корректной. Примеры: $h(t) = t^\alpha$ ($1 \leq \alpha < p$) для вырождения при $t = 0$ и $h(t) = (T - t)^\alpha$ ($0 < \alpha < p - 1$) для вырождения при $t = T$.

В заключение обсуждаются возможные обобщения полученных результатов на многомерный случай.

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Ключевые слова: вырождающиеся интегро-дифференциальные уравнения, уравнения вольтерровского типа, краевые задачи, регулярные решения.

2020 Mathematics Subject Classification: 45J05, 45K05, 34K10, 35R09

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, *Докл. АН СССР*, **77**:2 (1951), 181–183.
- [2] Fichera G. On a unified theory of boundary-value problems for elliptic-parabolic equations of second order, in: *Boundary Problems in Differential Equations*, Univ. Wisconsin Press, Madison, WI (1960), 97–120.
- [3] Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве, *Дифференц. уравнения*, **13**:6 (1977), 1098–1105.
- [4] Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка, *Матем. заметки*, **101**:3 (2017), 403–412.
- [5] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, Москва (1988).
- [6] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва (1973).
- [7] Triebel H. *Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
- [8] Треногин В.А. *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

С.Ж. БАСАРОВ¹, Н.Т. ТЛЕУХАНОВА²

^{1,2}Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

^{1,2}ТОО "Geometry Астана, Казахстан

¹bassarov.serzhan98@gmail.com, ²tleukhanova@rambler.ru

Мы находим верхние и нижние оценки погрешности кубатурной формулы по неравномерной сетке для аппроксимационных пространств по системе Хаара. Аппроксимационные пространства имеют непрерывные и разрывные функций. Классические пространства Бесова $B_{p,q}^\alpha$ и Соболева W_p^α вложены в аппроксимационные пространства с параметрами $0 < \alpha < 1$ – параметр гладкости и $1 \leq p, q \leq \infty$. В следствии получаем верхние оценки погрешности кубатурной формулы для пространств Соболева W_p^α с "малой"гладкостью $1/p < \alpha \leq 1/2$ и для пространств Бесова $B_{p,q}^\alpha$ с параметрами $\alpha > 1/p$ ($\alpha \geq 1/p, q = 1, 1 < p < \infty$), $p, q > 1$. Оценки погрешности для вышеописанных пространств является оптимальной с точностью до логарифмического множителя.

Определение 1. Пусть $m = j + 2^{k-1}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{k-1} - 1$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1)$. Функцией

$$h_0(x) = 1, \\ h_m(x) = h_k^j(x) = \begin{cases} 2^{(k-1)/2}, & x \in \Delta_m^+ = \Delta_{k+1}^{2j} = \left[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{2j+1}{2^k} \right), \\ -2^{(k-1)/2}, & x \in \Delta_m^- = \Delta_{k+1}^{2j+1} = \left[\frac{2j+1}{2^k}, \frac{j+1}{2^{k-1}} \right), \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (1)$$

будем называть *функцией Хаара*.

Определение 2. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Функция

$$h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = h_{m_1, \dots, m_d}(x_1, \dots, x_d) = h_{k_1}^{j_1}(x_1) h_{k_2}^{j_2}(x_2) \cdot \dots \cdot h_{k_d}^{j_d}(x_d), \quad (2)$$

называется *многомерная (кратная) функция Хаара*, где $m_i = j_i + 2^{k_i-1}$, $j_i = 0, 1, \dots, 2^{k_i-1} - 1$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, $x_i \in [0, 1)$, $i = 1, \dots, d$.

Определение 3. Пусть $\alpha > 0$ и $1 \leq p, q \leq \infty$. Будем называть аппроксимационным пространством $HA_{p,q}^\alpha = HA_{p,q}^\alpha[0, 1)^d$ множество функций $f \in L_1 = \{f : \int_{[0,1)^d} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty\}$ таких, что

$$\|f\|_{HA_{p,q}^\alpha} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\alpha+1/2-1/p)kq} \sum_{\substack{|\mathbf{s}|_1=k, \\ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^d}} \left(\sum_{j_1=0}^{2^{s_1-1}-1} \dots \sum_{j_d=0}^{2^{s_d-1}-1} |a_{s_1, \dots, s_d}^{j_1, \dots, j_d}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{1/q} < \infty.$$

где $a_{s_1, \dots, s_d}^{j_1, \dots, j_d} = \int_{[0,1)^d} f(\mathbf{x}) h_{\mathbf{s}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ — коэффициент Фурье-Хаара функции f .

В случае $p = \infty$ или $q = \infty$ модификации к норме соответствующие с нормой пространств l_∞ .

Мы рассматриваем следующую кубатурную формулу [1]

$$Q_m(f) = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{|\mathbf{k}|_1=m, \\ k_j \geq 0}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_d=0}^{2^{k_d}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{d-1} (r_j + \text{sgn } k_j)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_d}{2^{k_d}}\right), \quad (3)$$

где $\text{sgn}(x) = 1$, если $x > 1$, и $\text{sgn}(x) = 0$ в остальных случаях; $m \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. Пусть $f \in L_1$, ряд Фурье-Хаара которого сходится абсолютно. Тогда

$$\begin{aligned} Q_m(f) - I_d(f) &= \sum_{\substack{|\mathbf{s}|_1 \geq m+1 \\ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^d}} 2^{\frac{|\mathbf{s}|_1-d}{2}} \frac{2^{\sum_{i=1}^{d-1} \delta(s_i, k_i)}}{2^m} \\ &\times \sum_{\substack{|\mathbf{k}|_1=m \\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \\ k_i \leq s_i, k_d \leq s_d-1}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_d=0}^{2^{k_d}-1} (-1)^{\sum_{i=1}^{d-1} (r_i + \text{sgn } k_i)(1-\delta(s_i, k_i))} a_{s_1, \dots, s_d}^{r_1 2^{s_1-k_1-1}, \dots, r_d 2^{s_d-k_d-1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta(x, y)$ — символ Кронекера.

Следствие 5. Пусть $d, m \in \mathbb{N}$ и

$$P_m(x_1, \dots, x_d) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_d \leq m, \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} \sum_{j_1=0}^{2^{k_1-1}-1} \dots \sum_{j_d=0}^{2^{k_d-1}-1} a_{k_1, \dots, k_d}^{j_1, \dots, j_d} \prod_{i=1}^d h_{k_i}^{j_i}(x_i).$$

Тогда

$$Q_m(P_m) = \int_{[0,1)^d} P_m(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d. \quad (5)$$

Доказательство. Следует из леммы 1, где $\alpha_s^{\mathbf{j}} = 0$, $|\mathbf{s}|_1 \geq m+1$.

Теорема 6. Пусть $\alpha > 1/p$, $q > 1$ ($\alpha \geq 1/p$, если $q = 1$), $1 \leq p \leq \infty$ ($1 \leq p < \infty$), $m \in \mathbb{N}$, $N \asymp m^{d-1} 2^m$ и $f \in HA_{p,q}^\alpha$.

Тогда

$$\sup_{\|f\|_{HA_{p,q}^\alpha}=1} |Q_m(f) - I_d(f)| \asymp \frac{(\ln N)^{(\alpha+1-1/q)(d-1)}}{N^\alpha}. \quad (6)$$

Следствие 7. Пусть $\alpha > 1/p$, $q > 1$ ($\alpha \geq 1/p$, если $q = 1$) $1 < p \leq \infty$ ($1 < p < \infty$), $m \in \mathbb{N}$, $N \asymp m^{d-1}2^m$.

Если $f \in B_{p,q}^\alpha$, тогда

$$\sup_{\|f\|_{B_{p,q}^\alpha}=1} |Q_m(f) - I_d(f)| \lesssim \frac{(\ln N)^{(\alpha+1-1/q)(d-1)}}{N^\alpha}. \quad (7)$$

Если $f \in W_p^\alpha$, $2 < p < \infty$, $1/p < \alpha \leq 1/2$, $\alpha^{-1} < \tilde{p} \leq p$, тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} |Q_m(f) - I_d(f)| \lesssim \frac{(\ln N)^{(\alpha+1-1/\tilde{p})(d-1)}}{N^\alpha}. \quad (8)$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488613).

Ключевые слова: кубатурная формула, аппроксимационное пространство, пространство Бесова, пространство Соболева, гиперболический крест.

2020 Mathematics Subject Classification: 41A25, 41A55, 41A63.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 133–160.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛАПЛАСИАНА НА ОДНОРОДНОМ ДЕРЕВЕ И ЕГО ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Ж.А. БЕКТАЛ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[zhansayabektal@gmail.com]

Пусть Γ_b — бесконечное дерево с корнем o и длина каждого ребра, равна 1. Из каждой вершины выходит ровно b рёбер.

Метрическая топология и мера Лебега на Γ_b вводятся следующим образом. Пространство $L^2(\Gamma_b)$ определяется относительно естественной меры Лебега. Функция f на Γ_b принадлежит пространству Соболева $H^1(\Gamma_b)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна. Лапласиан Дирихле $-\Delta$ определяется через квадратичную форму

$$\int_{\Gamma_b} |f'|^2 dx$$

на области $H^{1,0}(\Gamma_b)$. В вершине $v \neq o$ выполняются условия Кирхгофа:

$$f_-(v) = f_1(v) = \dots = f_b(v),$$

$$f'_1(v) + \dots + f'_b(v) = f'_-(v).$$

Ключевым инструментом анализа является разложение пространства $L^2(\Gamma_b)$ в ортогональную сумму подпространств, связанных с поддеревьями.

Если $T \subset \Gamma_b$ — поддерево, вводится подпространство $\mathcal{F}_T$, то:

$$L^2(\Gamma_b) = \mathcal{F}_{\Gamma_b} \oplus \sum_{v \neq o} \oplus \mathcal{F}'_v.$$

После разложения оператор сводится к анализу одномерного оператора на $\mathbb{R}_+$:

$$(Ay)(t) = -y''(t), \quad t \notin \mathbb{Z},$$

с условиями согласования в целых точках:

$$y(n+) = b^{1/2}y(n-), \quad y'(n+) = b^{-1/2}y'(n-).$$

Таким образом, задача на дереве сводится к периодической задаче на прямой с особыми условиями склейки. Применение метода Флоке позволяет получить явное описание спектра.

Спектр оператора является объединением зон (полос):

$$\sigma(A) = \bigcup_{l=1}^{\infty} b_l,$$

где

$$b_l = [(\pi(l-1) + \theta)^2, (\pi l - \theta)^2],$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = \frac{b^{1/2} + b^{-1/2}}{2}.$$

Для радиальной компоненты возникает дополнительный точечный спектр:

$$\lambda_l = (\pi l)^2.$$

Таким образом, спектр состоит из: абсолютно непрерывной части (зоны), простых собственных значений.

Ключевые слова: спектральная теория, метрические графы, лапласиан, регулярное дерево.

2020 Mathematics Subject Classification: 35P05, 35J10, 05C50

ЕКІНШІ РЕТТІ ӨЗІНЕ-ӨЗІ ТҮЙІНДЕС ЕМЕС ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЫ БАР ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП

А.Ж. БЕЙСЕБАЕВА

М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан
beisebayevaakbope@gmail.com

Инволюциясы бар псевдопараболалық теңдеу үшін

$$-u_t(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} [u_{xx}(-x, t)] - u_{xx}(-x, t) = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1)$$

бастапқы шартымен

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 < x < 1 \quad (2)$$

және

$$u(x, T) = \psi(x), \quad -1 < x < 1 \quad (3)$$

осындай шартымен, сонымен қатар

$$u(-1, t) = 0, \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t), \quad 0 < t < T \quad (4)$$

өз-өзіне түйіндес емес шеттік шарттарын қанағаттандыратын $\{u(x, t), f(x)\}$ функциялар жұбын табу кері есебін қарастырайық.

Теорема 1. Егер бастапқы функция $\varphi(x)$, $\psi(x)$ мына шарттарды қанағаттандыратын болса $\varphi(x)$,

$$\psi(x) \in C^3[-1, 1], \quad \varphi^{(j)}(-1) = \varphi^{(j)}(1) = 0, \quad \psi^{(j)}(-1) = \psi^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, 2,$$

онда (1)–(4) кері есебі жалғыз шешімге ие. Фурье қатарлары түрінде беріледі.

$$f(x) = \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T}(x+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\psi_{k1} - e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T} \varphi_{k1}) \frac{1 + k^2\pi^2}{1 - e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}} \sin k\pi x \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\psi_{k2} - e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T} \varphi_{k2}) \frac{1 + k^2\pi^2}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}} \left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x \right) \right].$$

$$u(x, t) = \left(\frac{\psi_0 - \varphi_0}{T}t + \varphi_0 \right)(x+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}t} - e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}}{1 - e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}} \varphi_{k1} + \frac{1 - e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}t}}{1 - e^{\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}} \psi_{k1} \right] \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}t} - e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}} \varphi_{k2} + \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}t}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{1+k^2\pi^2}T}} \psi_{k2} \right] \left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x \right).$$

Кілтті сөздер: псевдопараболалық теңдеулер, кері есеп, Рисс базисі, Фурье қатары.

2020 Mathematics Subject Classification: 34K08; 35S16; 39B22

ӘДЕБИЕТ

[1] Beisebayeva A.Zh., Mussirepova E., Sarsenbi A.. Inverse Problem for a Pseudoparabolic Equation with a Non-Self-Adjoint Involutive Second-Order Differential Operator, *Mathematics*, **14** (2026), 668.

АЗҒЫНДАЛҒАН ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ПАРАМЕТРЛІК БЕЙЛОКАЛ ЕСЕПТЕР

М.А. БИМЕНОВ

Орталық Азия Инновациялық Университеті, Шымкент, Қазақстан,
Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан
bimenov@mail.ru

$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < T\}$ тікбұрышты аймағында азғындалған гиперболалық типтегі келесі теңдеуді қарастырайық:

$$Lu \equiv y^m u_{xx} - u_{yy} - b^2 y^m u = 0, \quad (1)$$

мұндағы $m > 0$, $b \geq 0$, $T > 0$ — берілген нақты параметрлер.

Жұмыста (1) теңдеуі үшін бастапқы деректер (2) және шекарада әртүрлі байланысатын (параметрлер арқылы берілетін) бейлокал шарттар қойылған екі есеп қарастырылады.

P_α **есебі.** Ω аймағында (1) теңдеуінің шешімі болатын және шекарада келесі классикалық бастапқы шарттарды:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

сондай-ақ келесі бейлокал шеттік шарттарды қанағаттандыратын $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ функциясын табу керек:

$$u_x(0, y) = \alpha u_x(1, y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (4)$$

мұндағы α — берілген нақты сан, ал $\tau(x)$, $\nu(x)$ — жеткілікті тегіс берілген функциялар.

P_β есебі. Ω аймағында (1) теңдеуінің шешімі болатын және шекарада (2) классикалық бастапқы шарттарын, сондай-ақ келесі бейлокал шеттік шарттарды қанағаттандыратын $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ функциясын табу керек:

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (5)$$

$$u(0, y) = \beta u(1, y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (6)$$

мұндағы β — берілген нақты сан, ал $\tau(x)$, $\nu(x)$ — жеткілікті тегіс берілген функциялар.

Спектрлік анализ әдісі негізінде қойылған P_α және P_β есептері үшін шешімнің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі негізгі нәтижелер алынды және тиісті теоремалар дәлелденді [1].

Қаржыландыру: Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитетімен қаржыландырылады (жоба № AP23485279).

Түйін сөздер: азғындалған гиперболалық теңдеу, бастапқы шарт, бейлокал шеттік шарттар.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bimenov M., Omarbaeva A. Nonlocal Initial-Boundary Value Problems for a Degenerate Hyperbolic Equation, in: *Analysis and Applied Mathematics. AAM 2022. Trends in Mathematics*, vol. 6, Birkhäuser, Cham (2024), 3–45. doi:10.1007/978-3-031-62668-5_14

ЗАДАЧА НАЙМАРКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л.Х. ГАДЗОВА

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

macaneeva@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

где $\alpha_1 \in (n-1, n]$,

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m,$$

$\beta_1 > 0$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\partial_{0x}^\gamma u(x)$ — производная Герасимова-Капуто [1, с. 11].

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$ из класса $AC^n[0, 1]$ (имеющую на отрезке $[0, 1]$ абсолютно непрерывные производные до порядка $n-1$) и удовлетворяющую этому уравнению во всех точках интервала $(0, 1)$.

Задача Наймарка. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющее условиям

$$\ell[u] = b,$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ — заданный вектор-столбец, $b_k \in \mathbb{R}$, $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)^T$ — вектор-столбец, ℓ_k — заданные линейные ограниченные функционалы с областью определения $D(\ell_k) \subset AC^n[0, 1]$, $k = \overline{1, n}$.

Для уравнения (1) получено необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи. В терминах специальных функций найдено представление решения исследуемой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEES-2026-0004).

Ключевые слова: задача Наймарка, дробная производная Герасимова–Капуто, функционал.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A08

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва (2003).
 [2] Гадзова Л.Х. Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования, *Дифференциальные уравнения*, **60**:11 (2024), 1452–1459.

О ЗАДАЧЕ ТИПА САМАРСКОГО – ИОНКИНА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М. ДАНАБЕКОВА¹, М.А. САДЫБЕКОВ²

¹Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

²Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

moldirrdanabekova@mail.ru

В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу о нахождении решения $u(x, t)$ волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_t(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции, а параметр $\alpha \neq 0$ — любое действительное число.

Граничные условия задачи (1)–(3) не являются усиленно регулярными ни для какого действительного значения α . В данной работе мы доказываем теорему существования и единственности решения задачи (1)–(3) для любого $\alpha \neq 0$. Нарушение базисного свойства системы собственных функций требует построения вспомогательной системы, которая используется для анализа свойств решения задачи (1)–(3).

Теорема 1. Если $\tau(x) \in W_2^2(0, 1)$ удовлетворяет краевым условиям (3), $\nu(x) \in W_2^1(0, 1)$ и $\nu(0) = 0$, а $f(x, t) \in W_2^1(\Omega)$ и $f(0, t) = 0$, то задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t) \in W_2^2(\Omega)$.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевая задача, нелокальное условие, биортогональный базис, базис Рисса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности, *Дифференц. уравнения* **45** (1), 123–137 (2009)
 [2] Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла, in: *Известия вузов. Математика*, 2012, (2), с. 70–75

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С КРАТНЫМ ЧИСТО МНИМЫМ СПЕКТРОМ ДЛЯ МАТРИЦЫ ЖОРДАНОВОЙ СТРУКТУРЫ

А.М. ДЖУРАЕВ

Жамбылский аграрно-гуманитарный университет, Тараз, Казахстан

Создание математических моделей реальных процессов является важным направлением современной прикладной математики. Для анализа этих моделей часто используются асимптотические методы. В настоящей работе мы попытаемся сделать анализ развития теории возмущений на примере линейного обыкновенного сингулярно-возмущенного уравнения вида

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon y'(t, \varepsilon) - A(t)y(t, \varepsilon) = h(t), \quad (1)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Здесь $A(t) \in C^\infty[0, 1]$ – квадратная матрица порядка $n = 2, 3, 4, \dots$

Для удобства изложения рассмотрим случай $n = 2$. Пусть собственные числа λ_1 и λ_2 – постоянные и

1. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$;
3. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$;
4. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$;
5. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$;
6. $\lambda_1 = \lambda_2 = i$.

Теория сингулярных возмущений развивалась по следующим направлениям:

1. Матрица I диагональная, действительные собственные значения меньше либо равны нулю. Асимптотическое решение уравнения (1) зависит от функций $\exp\{-t/\varepsilon\}$, $\exp\{-2t/\varepsilon\}$ и ставится начальная задача. Это направление изучено в работах А.Н. Тихонова, С.А. Ломова, В.Ф. Сафонова и других.
2. Матрица II жордановой структуры, имеет одно двухкратное действительное собственное значение меньше нуля. Асимптотическое решение уравнения (1) зависит от функций $(t/\sqrt{\varepsilon})\exp\{-t/\sqrt{\varepsilon}\}$ и ставится начальная задача. Это направление изучено в работах Я.Д. Тамаркина, С.А. Ломова, А.Г. Елисеева, А.М. Джураева и других.
3. Матрица III диагональная, действительные собственные значения больше нуля. Асимптотическое решение уравнения (1) зависит от функций $\exp\{t/\varepsilon\}$, $\exp\{2t/\varepsilon\}$ и ни начальную, ни краевую задачу ставить нельзя.
4. Матрица IV жордановой структуры имеет одно двухкратное действительное собственное значение больше нуля. Асимптотическое решение уравнения (1) зависит от функций $(1/\varepsilon)\exp\{t/\varepsilon\}$ и ни начальную, ни краевую задачу ставить нельзя.
5. Матрица V диагональная, действительные собственные значения различного знака либо равны нулю. Асимптотическое решение уравнения (1) зависит от функций $\exp\{-t/\varepsilon\}$, $\exp\{(t-1)/\varepsilon\}$ и ставится краевая задача. Это направление изучено в работах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и других.

6. Матрица VI жордановой структуры имеет одно двухкратное чисто мнимое собственное значение. Это направление ранее не было изучено и ни начальную, ни краевую задачи не ставились. Впервые обнаружено, что решение уравнения (1) зависит от функций $\exp\{-t/\sqrt{\varepsilon}\}$, $\exp\{(t-1)/\sqrt{\varepsilon}\}$, поставлена краевая задача и разработана теория асимптотического интегрирования сингулярно-возмущенных краевых задач с кратным чисто мнимым спектром для матрицы жордановой структуры.

Мои научные результаты по направлению VI докладывались на многих международных конференциях и подробно изложены на пленарном докладе ICBS2025 (Пекин, Китай) по приглашению Правительства Китая.

Рассмотрим систему n сингулярно-возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с кратным спектром в случае матрицы одноклеточной жордановой структуры. Для нахождения функций $g_{j,k}(t)$ ($j = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n$), входящих в решение задачи (1), (2), рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} P_{n+s,n,k} + P_{s,s,k}(C_1^{m-s}(t) + \dots + C_{s+1}^n(t)) + P_{s,s-1,k} \times \\ \times (C_1^{n-s+s}(t) + \dots + C_s^n(t)) + \dots + P_{s,1,k}(C_1^{m-s}(t) + \\ + C_2^n(t)) + P_{s,0,k}C_1^n(t) = 0, \quad s = 0, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (2)$$

Введя обозначения

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \psi(t, \varepsilon) = (\psi_1(t, \varepsilon), \dots, \psi_n(t, \varepsilon)),$$

вместо искомого решения $y(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) будем изучать новую “расширенную” функцию $u(t, \tau, \varepsilon)$ такую, что

$$u(t, \tau, \varepsilon) \equiv y(t, \varepsilon).$$

Введем две точки

$$M_0 = M_0(0, \psi(0, \varepsilon)), \quad M_1 = M_1(1, \psi(1, \varepsilon))$$

и для определения функции $u(t, \tau, \varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^n (\lambda + \sqrt[n]{\varepsilon} g_{1,k} + \dots + \sqrt[n]{\varepsilon} g_{n-1,k}) \frac{\partial u}{\partial \tau_k} - Au = h, \quad (3)$$

$$G_0 u(M_0, \varepsilon) + G_1 u(M_1, \varepsilon) = y^0 \quad (4)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как задача (3), (4) является регулярной по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, то ее решение по методу Ломова будем определять в виде ряда

$$u(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{s=-n_1}^n \sqrt[n]{\varepsilon}^s u_s(t, \tau), \quad (5)$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U = \left\{ u(t, \tau) : u = \sum_{i,k=1}^n u_{i,k}(t) \phi_i(t) e^{\tau_k} + \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(t), \quad u_{i,k}(t), u_i(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}) \right\}.$$

В пространстве безрезонансных решений U зададим операторы

$$\begin{aligned} L_0 \equiv A(t) - \lambda(t) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad L_j \equiv \sum_{k=1}^n g_{j,k}(t) \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ G_0 \equiv \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{n_0}, 0, \dots, 0\}, \quad G_1 \equiv \text{diag}\{0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-n_0}\}, \end{aligned}$$

$$Gu \equiv G_0 u(M_0, \varepsilon) + G_1 u(M_1, \varepsilon). \quad (6)$$

Используя оператор (6), расширенную задачу (3), (4) перепишем в виде

$$L_0 u = \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt[n]{\varepsilon^j} L_j u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - h, \quad (7)$$

$$Gu = y^0. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия 1–3 и решения задач (7), (8) определены в виде степенного ряда (5) из пространства U . Тогда при выполнении условия Джураева сужение ряда (5) при $\tau = \psi(t, \varepsilon)$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ является асимптотическим рядом для решения задачи (1), (2).

Ключевые слова: сингулярные возмущения, асимптотические методы, краевые задачи, чисто мнимый спектр, жорданова структура.

2020 Mathematics Subject Classification: 34E15, 34E05, 34B15

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О.С. ЗИКИРОВ

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

zikirov@yandex.ru

В докладе рассматриваются некоторые смешанные задачи с интегральными условиями для линейного уравнения в частных производных третьего порядка.

В области $D = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + a(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

где $a(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ – заданные функции.

В настоящей работе для уравнения (1) изучаются следующие нелокальные задачи с интегральными условиями.

Нелокальная задача А. Найти регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

граничным

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(0, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и интегральным условиям

$$u(\ell, t) = \int_0^\ell p(x, t)u(x, t)dx + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$, $p(x, t)$, $\mu_i(t)$, ($i = \overline{1, 3}$) – заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0); \quad \varphi'(0) = \mu_2(0); \quad \varphi(\ell) = \int_0^\ell p(x, 0)\varphi(x)dx + \mu_3(0).$$

Нелокальная задача В. Данная задача от нелокальной задачи А отличается тем, что условие (4) заменяется условием вида

$$u_x(\ell, t) = \int_0^t h(t, \tau) u(\ell, \tau) d\tau + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $h(t, \tau)$, $\mu_2(t)$ – заданные, непрерывные функции, удовлетворяющие соответствующим условиям согласования.

С помощью функции Грина для уравнения теплопроводности изучаемые задачи сводятся к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо.

БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА КРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ОТРЕЗКЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ОДНОМ КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Н.С. ИМАНБАЕВ

Университет имени Ж.А. Ташенева, Шымкент, Казахстан

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

imanbaevnur@mail.ru

Рассмотрим спектральную задачу с линейным вхождением спектрального параметра в одно из краевых условий:

$$l(y) \equiv -y'(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = \lambda (y(0) + y(1)). \quad (2)$$

Характеристический определитель задачи (1)-(2) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda} \left(1 + \cos \sqrt{\lambda} \right) + \sin \sqrt{\lambda} = \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(\sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right).$$

Решая уравнение $\Delta(\lambda) = 0$, имеем две серии собственных значений

$$\lambda_k^{(1)} = ((2k+1)\pi)^2; \quad \lambda_k^{(2)} = ((2k+1)\pi + \delta_k)^2; \quad \delta_k = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

$\lambda_k^{(1)}$, $\lambda_k^{(2)}$ являются простыми (однократными) собственными значениями задачи (1)-(2). Система собственных функций задачи (1)-(2) имеет вид

$$y_k^{(1)} = \cos((2k+1)\pi x); \quad y_k^{(2)} = \cos((2k+1)\pi + \delta_k)x; \quad (3)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \delta_k = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

В силу асимптотики δ_k , при удалении одного элемента из этой системы, получаем полную и минимальную систему в $L_2(0, 1)$. Эта система не образует безусловного базиса, так как для достаточно больших $k \gg 1$ две серии собственных функций $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ “слипаются”, хотя согласно результатам А.А.Шкаликова [1], эта система образует базис Рисса со скобками в $L_2(0, 1)$.

Введём вспомогательную систему функций

$$v_k^{(1)}(x) = y_k^{(1)}(x); \quad v_k^{(2)}(x) = \frac{1}{\delta_k} \left(y_k^{(2)}(x) - y_k^{(1)}(x) \right), \quad k = 0, 2, 3, \dots,$$

то есть вспомогательная система функций имеет вид

$$\begin{aligned} v_k^{(1)}(x) &= \cos(2k+1)\pi x; \\ v_k^{(2)} &= -\frac{\sin(\delta_k x)}{\delta_k} \sin(2k+1)\pi x + \frac{\cos(\delta_k x)-1}{\delta_k} \cos(2k+1)\pi x, \\ k &= 0, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 1. Система собственных функций (3) спектральной задачи (1)-(2) не образует безусловного базиса в $L_2(0, 1)$. Вспомогательная система функций (4) образует безусловный базис в $L_2(0, 1)$.

Замечание 2. Задачи такого типа естественным образом возникают при решении (методом разделения переменных) начально-краевых задач для эволюционных уравнений (в частности, для уравнения теплопроводности), когда в краевое условие входят производные решения по временной переменной:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = -(u_t(0, t) + u_t(1, t)). \end{aligned}$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № 23485279).

Ключевые слова: оператор дифференцирования, собственные функции, безусловная базисность, краевое условие, спектральный параметр.

2020 Mathematics Subject Classification: 45A47

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях, *Тр. семинара им. И.Г.Петровского*, **9** (1983), 140–179.
 [2] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$, *Journal Math. Anal. Appl.*, **146**:1 (1990), 148–191.

ЦИЛИНДРЛІК ФАЗАЛЫҚ КЕҢІСТІКТЕГІ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ БАСҚАРЫМДЫЛЫҚ МӘСЕЛЕРІ

Т.Ш. ИМАНҚҰЛ¹, А. БЕЙСЕНҚАЛИ²

^{1,2}әл Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹imankul.t.sh@mail.ru, ²aizhaina02@gmail.com

Бұл жұмыста басқару шамасына қойылған шектеулерді ескергендегі фазалық және интегралдық шектеулері бар жүйелерді басқару есебін шешу әдісі қарастырылады.

Шекаралық шарттарды, фазалық және интегралдық шектеулерді қамтитын, сонымен қатар басқаруға шектеу қойылған көп-өлшемді динамикалық жүйенің қозғалыс теңдеулері қарастырылады:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma, t) + Du(t), \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma, t) + Ev(t), t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$(x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \sigma(t_0) = \sigma_0, \sigma(t_1) = \sigma_1) \in S \subset R^{2n}, \quad (2)$$

$$(x(t), \sigma(t)) \in G(t) = \{(x, \sigma) \in R^n | \omega(t) \leq F(x(t), \sigma(t), t) \leq \delta(t), t \in I\}, \quad (3)$$

$$g_j(u, v, x, \sigma) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), \sigma(t), u(t), v(t), t) dt \leq c_j, j = \overline{1, p_1}, \quad (4)$$

$$g_j(u, v, x, \sigma) = \int_{t_1}^{t_2} f_{0j}(x(t), \sigma(t), u(t), v(t), t) dt = c_j, j = \overline{p_1 + 1, p_2}, \quad (5)$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(0) \in L_2(I, R^{r_1}) | \alpha_1(t) \leq u(t) \leq \beta_1(t), t \in I\}, \quad (6)$$

$$v(t) \in V(t) = \{v(0) \in L_2(I, R^{r_2}) | \alpha_2(t) \leq v(t) \leq \beta_2(t), t \in I\}. \quad (7)$$

Мұндағы A, B, C, D, E, R - сәйкесінше $(n_1 \times n_1), (n_1 \times m_1), (n_1 \times r_1), (m_1 \times n_1), (m_1 \times m_1), (m_1 \times r_2)$ өлшемді матрицалар; $u(t), v(t)$ – басқарулар; $\alpha_1(t), \beta_1(t), \alpha_2(t), \beta_2(t)$ - үзіліссіз функция; S - дөңес тұйық жиын; $F(x, \sigma, t)$ - аргументтерінің жиыны бойынша үзіліссіз s -вектор функция; $\omega(t), \delta(t)$ – үзіліссіз s -вектор функциялар; $f_{0j}(x, \sigma, u, v, t), j = \overline{1, p_2}$ - аргументтерінің жиыны бойынша үзіліссіз функция; m -вектор функция $\varphi(\sigma, t)$ бұрыштық $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ координаттары бойынша периодты болады:

$$\varphi(\sigma, t) = (\varphi_1(\sigma_1, t), \dots, \varphi_m(\sigma_m, t)) = \varphi(\sigma + \Delta, t) = \varphi_1(\sigma_1 + \Delta_1, t), \dots, \varphi_m(\sigma_m + \Delta_m, t)).$$

Келесі $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{p_2}(t))$ вектор-функциясын енгіземіз, мұндағы

$$\bar{x}_i(t) = \int_{t_0}^t f_{0j}(x(\tau), \sigma(\tau), u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau, i = \overline{1, p_2}.$$

Сонда

$$\bar{x}(t) = f_0(x(t), \sigma(t), u(t), v(t), t), \bar{x}(t_0) = 0, \quad (8)$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{c} \in Q = \{\bar{c} \in R^{p_2} \mid \bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}),$$

$$\bar{c}_j = c_j - d_j, j = \overline{1, p_1}, \bar{c}_j = c_j, j = \overline{p_1 + 1, p_2}, d_j \geq 0, j = \overline{1, p_1}\}. \quad (9)$$

Әрі қараай тиісті матрицаларды енгізу арқылы (1), (8) теңдеуі мен (2)-(7), (9) шектеулерін векторлық формада жазамыз:

$$\dot{\xi} = A_1 \xi + B_1 \varphi(P_3 \xi, t) + B_2 f_0(P_1 \xi, w, t) + C_1 w(t), t \in I, \quad (10)$$

$$(P_1 \xi(t_0), P_1 \xi(t_1)) \in S, \quad P_2 \xi(t_0) = 0, \quad P_2 \xi(t_1) = \bar{c} \in Q, \quad (11)$$

$$P_1 \xi(t) \in G(t), \quad w(t) \in W = U(t) \times V(t), \quad t \in I. \quad (12)$$

Ақырында мына есеп қойылады: (12) түріндегі фазалық және басқарылым шектеулері бар, (11) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын (10) жүйе шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын табу; сонымен қатар (10) жүйесінің (11), (12) шарттарындағы шешімін құру.

Малындыру қағидатын қолданып, тиісті теоремаларды дәлелдеу арқылы оң жағы бұрыштық координаттары бойынша периодты болатын кәдімгі дифференциалдық теңдеулермен өрнектелетін динамикалық жүйелердің басқарымдылық есебін шешудің қажетті және жеткілікті шарттары табылған. Басқарымдылықтың бастапқы есебін қайбір тиімділік есебіне келтіретін малындыру қағидаты ұсынылады. Ізделінді басқару мен траекторияларды табуға мүмкіндік беретін минимумдаушы тізбектер құрылған.

Ұсынылған мәселенің шешімі механикалық инженерия, радио техникасы, электр энергетикасы және ғарыштық зерттеулер сияқты салаларда кеңінен қолданылады. Бұрыштық координаттары бар жүйелердің математикалық моделі – цилиндрлік фазалық кеңістігі бар динамикалық жүйелер болып табылады, және бұл жүйелер (1)–(7) арқылы сипатталады. Бұл жұмыс [1–5] ғылыми зерттеулердің жалғасы болып табылады.

Кілтті сөздер: бұрыштық координаталар, фазалық және интегралдық шектеулер, малындыру қағидасы, шешімділік шарты.

2020 Mathematics Subject Classification: 37N35

ӘДЕБИЕТ

- [1] Айсағалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений, *Дифференциальные уравнения*, **27:9** (1991), 1475–1486.
- [2] Айсағалиев С.А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением, *Дифференциальные уравнения*, **32:6** (1996), 1011–1017.
- [3] Айсағалиев С.Ә. Управляемость и оптимальное управление в линейных системах, *Известия РАН. Сер. Теория и системы управления*, №3 (1993), 196–202.
- [4] Айсағалиев С.А., Айпанов Ш.А. К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем, *Дифференциальные уравнения*, **35:8** (1999), 1013–1019.
- [5] Айсағалиев С.А., Иманкул Т.Ш. *Теория фазовых систем*, Қазақ университеті, Алматы (2005), 168 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФFUЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М.С. ИВШИН

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

mixail.ivshin.1996@mail.ru

Основы дробного интегрирования и дифференцирования ранее были исследованы в монографиях А. М. Нахушева [1] и А. А. Kilbas, Н. М. Srivastava, J. J. Trujillo [2]. Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

при $0 < \alpha \leq 1$ в области

$$\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < T\}.$$

Найти решение уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

при котором начальное управление $\tau(x)$ минимизирует величину

$$\int_0^T [u(0, y) - h(y)]^2 dy \quad (3)$$

для заданной функции $h(y)$.

Будем рассматривать случай, когда начальное управление $\tau(x)$ ищется среди полиномов степени n , то есть

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k. \quad (4)$$

Таким образом, надо найти коэффициенты полинома (4), при котором решение задачи (1), (2) минимизирует величину (3).

Теорема 1. Пусть $h(y) \in L_2[0, T]$. Тогда решение поставленной задачи при $\alpha \neq \frac{1}{i+j+2}$ существует и определяется единственным образом с точностью до полинома по нечетным степеням.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, минимизация функционала, начальное управление, нахождение коэффициентов полинома.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A08, 34B05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*, Наука, Москва (2003).
 [2] Kilbas A. A, Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier B. V., Amsterdam (2006).

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА В СМЫСЛЕ КАПУТО СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Б.И. ИСЛОМОВ¹, У.Ш. УБАЙДУЛЛАЕВ², Х.Г. АБСОАТОВА³

¹Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

²Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета, Самарканд, Узбекистан

³Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

¹islomovbozor@yandex.com, ²bulugbekuz88@mail.ru, ³rhmtvfahrod@gmail.com

В данной работе изучается краевая задача для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Само решение построено в виде суммы ортогонального ряда и показана его сходимость в классе регулярных решений данного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - cD_{yy}^{\delta}u - \lambda^2u, & x > 0, q < y < r, 0 < \delta \leq 1, \\ u_{xx} + cD_{yy}^{\alpha}u - \lambda^2u, & x > 0, 0 < y < q, 1 < \alpha \leq 2, \\ u_{xx} - cD_{yy}^{\beta}u - \lambda^2u, & x > 0, -p < y < 0, 1 < \beta \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, -p < y < r\}$, где $p > 0, r > 0, 0 < q < r, l, \lambda$ – заданные действительные числа.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} J_1 &= \{(x, y) : 0 < x < l, y = q\}, \quad J_2 = \{(x, y) : 0 < x < l, y = 0\}, \\ \Omega_1 &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, q < y < r\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, 0 < y < q\}, \\ \Omega_3 &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, -p < y < 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup J_1 \cup J_2, \end{aligned}$$

а ${}^cD_{0y}^{\gamma}$ – оператор дробного порядка в смысле Капуто [1, с. 14], [2, с. 38]:

$${}^cD_{ay}^{\gamma}f(y) = (\text{sign}(y-a))^n D_{ay}^{-\gamma}f^{(n)}(y), \quad n-1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

здесь $D_{xy}^{\alpha}g(y)$ – интегро-дифференциальный оператор Римана–Лиувилля порядка α [3].

В области Ω исследуем следующую задачу.

Задача D_T . Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1. $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $(y-q)^{1-\delta}u_y(x, y) \in C(\overline{\Omega_1} \cup J_1)$;
2. $u(x, y) \in C_x^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$, ${}^cD_{qy}^{\delta}u \in C(\Omega_1)$, ${}^cD_{qy}^{\alpha}u \in C(\Omega_2)$, ${}^cD_{0y}^{\beta}u \in C(\Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_j ($j = 1, 3$);

3. на линиях J_j ($j = 1, 2$) выполняются условия склеивания

$$\begin{aligned} u(x, q+) &= u(x, q-), \quad (x, q) \in \bar{J}_1, \quad u(x, 0+) = u(x, 0-), \quad (x, 0) \in \bar{J}_2, \\ \lim_{y \rightarrow q+} (y - q)^{1-\delta} u_y(x, y) &= \lim_{y \rightarrow q-} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J_1, \\ \lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J_2; \end{aligned}$$

4. $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(l, y) = 0, \quad -p \leq y \leq r, \quad u(x, -p) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует решение задачи D_T , то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\Delta_n(p, q) = p\rho_n^2 E_{\alpha,1}(\rho_n^2 q^\alpha) E_{\beta,2}(-\rho_n^2 p^\beta) + (q\rho_n^2 + \Gamma(\delta)) E_{\beta,1}(-\rho_n^2 p^\beta) E_{\alpha,2}(\rho_n^2 q^\alpha) \neq 0, \quad (2)$$

где $\rho_n = \sqrt{\mu_n^2 + \lambda^2}$, $\mu_n = \pi n/l$.

Теорема 2. Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям $\psi(x) \in C^4[0, l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$ и $\Delta_n(p, q) \neq 0$ при всех $n = 1, \dots, n_0$, то существует единственное решение задачи D_T и это решение определяется в виде суммы ортогональных рядов. В этом случае функция $u(x, y)$ принадлежит классам 1) и 2).

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект ФЗ-202009211).

Ключевые слова: краевая задача, уравнения смешанного типа, оператор Капуто, спектральный параметр.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35R11, 34K37, 42B10

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка, Нальчик, (2005) 186 с.
- [2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск: Наука и Техника, (1987) 688 с.
- [3] Ислотов Б.И., Абсоатова Х.Г. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром, *Вестник БухГУ*, (2025) № 12(129). С.179–184.

РЕГУЛЯРНЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

А. КАДИРБЕК

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

kadirkabay5@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$, ограниченным при $y > 0$ гладким кривым σ , а при $y = 0$ отрезком AB : $0 < x < 1$, $y = 0$.

В области Ω рассмотрим уравнение Геллерстедта

$$Lu = -y^m u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1)$$

Фундаментальное решение уравнения (1) задаётся формулой

$$\varepsilon(x, y, \xi, \eta) = k_1 \left(\frac{2}{m+2} \right)^{4\beta-2} (r_1)^{-2\beta} (1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 2-2\beta, 1-\sigma),$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + \left(\frac{4}{m+2} \right)^2 \left(y^{\frac{m+2}{2}} - \eta^{\frac{m+2}{2}} \right)^2, \\ r_1^2 = (x - \xi)^2 + \left(\frac{4}{m+2} \right)^2 \left(y^{\frac{m+2}{2}} + \eta^{\frac{m+2}{2}} \right)^2, \quad \beta = \frac{1}{2(m+2)}, \quad k_1 = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}.$$

Потенциалом Геллерстедта назовём интегральный оператор

$$u_G = L_G^{-1} f = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Потенциалом простого слоя назовём интеграл

$$u_{\mu}(x, y) = \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Общее решение уравнение Геллерстедта представляется в виде

$$u(x, y) = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\Omega} \tilde{\mu}_0(x, y) f(x, y) dx dy \\ = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) \int_{\Omega} \tilde{\mu}(\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} d\xi d\eta + \\ + \int_{\Omega} \tilde{\mu}_0(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Ядро интегрального оператора представляется в виде

$$K(x, y, \xi, \eta) = \varepsilon(x, y, \xi, \eta) + \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x, y, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \tilde{\mu}(\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} + \tilde{\mu}_0(x, y), \quad (3)$$

В случае регулярных самосопряжённых задач из (3) получаем $\tilde{\mu}_0(x, y) = 0$, $\tilde{\mu}(\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = V(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\varepsilon(\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Тогда функция Грина регулярных самосопряжённых задач для уравнение Геллерстедта задается в виде

$$G(x, y, \xi, \eta) = \varepsilon(x, y, \xi, \eta) + \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x, y, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) V(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \varepsilon(\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}. \quad (4)$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488701).

Ключевые слова: Коэрцитивно разрешимые задачи, функция Грина, уравнение Геллерстедта, интегральное представление решений.

2020 Mathematics Subject Classification: 31A10, 35J05, 35J08, 35J25, 47A20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kalmenov T.Sh. Integral representations of solutions of coercive solvable problems for the Laplace equation, *Boundary Value Problems*, **12**:2026 (2025).

[2] T. Kalmenov, D. Suragan, A. Kadirbek On a Method for Transforming the Double Layer Potential to a Volume Potential and its Application to the Description of Coercive Problems for the Laplace Equation, *Applied and computational mathematics*, **25**:1 (2026), 170-179.

РЕГУЛЯРНЫЕ САМОСOPЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

kalmenov.t@mail.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$ — конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

В настоящей работе в явном виде получены функции Грина для самосопряжённых задач через фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Имеет место

Теорема 1. Пусть для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует решение $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ уравнения

$$-\Delta u = f,$$

удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c\|f\|_0. \quad (1)$$

Тогда существуют функции

$$\tilde{\mu}(\xi, y) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad \mu_0(y) \in L_2(\Omega),$$

такие, что решение $u(x)$ задаётся в виде интегрального оператора L^{-1} :

$$u(x) = L^{-1}f = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y)f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon(x, \xi)\tilde{\mu}(\xi, y)f(y) dS_{\xi} dy + \int_{\Omega} \mu_0(y)f(y) dy. \quad (2)$$

Обратно, для любых функций

$$\tilde{\mu}(\xi, y) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad \mu_0(y) \in L_2(\Omega),$$

существует решение $u \in W_2^2(\Omega)$ уравнения $-\Delta u = f$, задаваемое предыдущей формулой и удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\|f\|_0 \left(1 + \|\tilde{\mu}_0\|_0 + \|\tilde{\mu}(\xi, y)\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega) \times L_2(\Omega)}\right). \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть L^{-1} является коэрцитивно самосопряжённым оператором. Тогда функция Грина этого оператора задаётся формулой

$$G(x, y) = \varepsilon(x, y) + \int_{\partial\Omega} V(\xi)\varepsilon(x, \xi)\varepsilon(\xi, y) dS_{\xi}, \quad (4)$$

где

$$V(\xi) : W_2^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow W_2^{1/2}(\partial\Omega)$$

— линейный оператор.

В качестве $V(\xi)$ возьмём производную по нормали потенциала двойного слоя, то есть

$$V_{-}^{(1)}(x) = \int_{\partial\Omega} V(\xi)\varepsilon(\xi, x)\varepsilon(\xi, y) dS_{\xi} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}^{-}} \varepsilon(\xi, x)\varepsilon(\xi, y) dS_{\xi}, \quad x \in \Omega^{-}, \quad \Omega^{-} = \Omega. \quad (5)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_{\xi}^{-}}$ — производная по внешней нормали к $\partial\Omega$.

Тогда функцию Грина $G(x, y)$ в Ω^{-} определим следующим образом:

$$G(x, y) = \varepsilon(x, y) + \beta \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}^{-}} \varepsilon(\xi, x)\varepsilon(\xi, y) dS_{\xi}, \quad x \in \Omega^{-}. \quad (6)$$

В области

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^n \setminus \Omega^-$$

введём вспомогательную функцию

$$\tilde{G} = \alpha \varepsilon(x, t) + \beta \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_\xi^+} \varepsilon(\xi, x) \varepsilon(\xi, y) dS_\xi \quad x \in \Omega^+$$

здесь α и β действительные числа.

Теорема 3. При $\beta = 1 - \alpha$, $\alpha \neq 1$, Функция Грина задачи Дирихле задается формулой (6).

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR28713025).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, М:Наука (1981). 512 с
- [2] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. *Уравнения математической физики*, Наука, (1977)
- [3] Kal'menov T. Integral representations of solutions of coercive solvable problems for the Laplace equation, in: *Boundary Value Problems*, (2025), 2026, 1.
- [4] Kalmenov T., Suragan D., Kadirbek A. On a Method for Transforming the Double Layer Potential to a Volume Potential and its Application to the Description of Coercive Problems for the Laplace Equation, in: *computational and applied mathematics*, City (2026), Volume 25, No.1, pp.170-179

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ¹, М. САДЫБЕКОВ², А. КАДИРБЕК³

^{1,2,3}Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

kalmenov.t@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, и

$$D = \Omega \times (0, T)$$

— цилиндр.

Смешанная задача Коши. Найти регулярное решение в D уравнения теплопроводности:

$$\diamond_{x,t} u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) u = f(x, t), \quad (x, t) \in D. \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0. \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Пользуясь методом потенциала двойного слоя, эту задачу сводят либо к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, либо, пользуясь спектральным разложением оператора

$$-\Delta_x e_k = \lambda_k e_k, \quad e_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

решают методом Фурье.

В данной работе построим интегральное представление функции Грина этой задачи, используя только фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Пусть $\varepsilon(x, t, \xi, \eta)$ фундаментальное решение уравнения (1). Тогда функции Грина смешанной задачи (1)-(3) ищем в виде:

$$G(x, t, \xi, \eta) = \varepsilon(x, t; \xi, \eta) + \beta \int_0^t d\eta_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon(x, t; y, \eta_1) \varepsilon(y, \eta_1; \xi, \eta) dS_y, \quad (x, t) \in D, \quad (4)$$

Введем также вспомогательную функцию Грина

$$G^+(x, t, \xi, \eta) = \gamma \varepsilon(x, t; \xi, \eta) + \beta \int_0^t d\eta_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon(x, t; y, \eta_1) \varepsilon(y, \eta_1; \xi, \eta) dS_y, \quad (x, t) \in D^+, \quad (5)$$

$$D^+ = R^n \setminus D$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ производная по внешнему нормали.

Theorem 1. При $\beta = 1 - \gamma$, $\gamma \neq 1$ функция Грина $G(x, t, \xi, \eta)$ определенной формулой (4) – (5) удовлетворяет уравнению

$$\diamond G = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) G = \delta(x - \xi, t - \eta) \quad (6)$$

и боковому граничному условию

$$G|_{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)} = 0$$

При этом решение задачи (1)-(3) представимо в виде

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR28713025).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, М:Наука (1981). 512 с
- [2] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. *Уравнения математической физики*, Наука, (1977)
- [3] Kal'menov T. Integral representations of solutions of coercive solvable problems for the Laplace equation, in: *Boundary Value Problems*, (2025), 2026, 1.
- [4] Kalmenov T., Suragan D., Kadirbek A. On a Method for Transforming the Double Layer Potential to a Volume Potential and its Application to the Description of Coercive Problems for the Laplace Equation, in: *computational and applied mathematics*, City (2026), Volume 25, No.1, pp.170-179

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ-ДЕРЕВЬЯХ

Б.Е. КАНГУЖИН

Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

kanguzhin53@gmail.com

Операторы Штурма-Лиувилля на графах существенно отличаются от операторов Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Если длины ребер граф-звезды одинаковы между собой, то возникают проблемы с исследованием кратности собственных значений оператора Штурма-Лиувилля на таком графе. В частности, могут возникать причудливые собственные функций,

которые зануляются на отдельных ребрах. Хотя в целом на граф-звезде собственная функция отлична от тождественного нуля. В данной работе выделен один класс графов, на которых указанных аномалии не наблюдается. Никакая собственная функция оператора Штурма-Лиувилля на таких графах не может обращаться в тождественно нулевую функцию на отдельных ребрах. Рассмотрим m конечных отрезков с длинами $b_1, \dots, b_m$. При $i = 1, \dots, m$ рассмотрим вещественный потенциал $q_i(x)$ из пространства $L_2(0, b_i)$, а также вещественное число h_i .

На отрезках $[0, b_i]$, при $i = 1, \dots, m$, введем операторы Штурма-Лиувилля

$$L_i y(x) = -y''(x) + q_i(x)y(x), \quad x \in (0, b_i),$$

с областями определения

$$D(L_i) = \{y \in W_2^2[0, b_i] : y(0) = 0, y'(b_i) - h_i y(b_i) = 0\}.$$

Выберем числа $b_1, \dots, b_m$ так, чтобы спектры операторов $L_1, \dots, L_m$ попарно не пересекались, то есть

$$\sigma(L_i) \cap \sigma(L_j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Здесь через $\sigma(L_i)$ обозначен спектр оператора L_i . Такой выбор всегда возможен.

К примеру, если $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$, то операторы L_1 и L_2 не имеют общих собственных значений при $b_1 h_1 \neq b_2 h_2$.

Итак, положительные числа $b_1, \dots, b_m$ выбраны так, что операторы L_i и L_j не имеют общих собственных значений при $i \neq j$. Указанное требование впервые появилось в работе [1]. В дальнейшем выясним, что выполнение указанного требования гарантирует простоту собственных значений оператора Λ .

Наша цель — получить асимптотические разложения собственных значений оператора Λ .

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, граф, корневые функции, полнота, общие граничные условия, граничные условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Левитан В.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*, Наука, Москва (1984).

ПОЛНОТА СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОБЩИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Б.Е. КАНГУЖИН¹, Ж.А. КАЙЫРБЕК²

^{1,2}Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

¹kanguzhin53@gmail.com, ²kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

Дифференциальные операторы с дискретным спектром являются важным источником систем корневых функций. При этом обратимые операторы порождают минимальные системы в соответствующих функциональных пространствах. Системы корневых функций самосопряженных операторов являются ортогональными полными системами. Однако самосопряженные дифференциальные операторы — это довольно узкий класс операторов с полной системой корневых функций. В данной статье исследуется полнота корневых функций дифференциальных операторов третьего порядка на отрезке с общими граничными условиями, которые не являются самосопряженными и иногда необратимы.

В функциональном пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим дифференциальный оператор K , задаваемый линейным дифференциальным выражением

$$Ky \equiv y^{(3)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x), \quad 0 < x < 1,$$

на области определения

$$y \in D(K) \equiv \{y \in W_2^3[0, 1] : U_j(y) = 0, j = \overline{1, 3}\}.$$

Здесь $p_k(x)$ — коэффициенты дифференциального выражения, k раз непрерывно дифференцируемые функции на $[0, 1]$.

Граничные формы $U_j(y)$ задаются следующим образом:

$$U_j(y) = \sum_{v=1}^3 \alpha_{jv} y^{(v-1)}(0) + \sum_{v=1}^3 \beta_{jv} y^{(v-1)}(1).$$

При этом числовые матрицы $\alpha = (\alpha_{jv})$, $\beta = (\beta_{jv})$ имеют размерности 3×3 , причем ранг матрицы граничных коэффициентов $J \equiv (\alpha, \beta)$ равен 3.

Целью настоящей работы является исследование полноты системы корневых функций оператора K в функциональном пространстве $L_2(0, 1)$.

Наиболее полные результаты в указанном направлении получены в случае дифференциальных операторов второго порядка. В работе [1] доказана полнота корневых функций в случае невырожденных граничных условий в смысле В. А. Марченко. Причем полнота корневых функций для невырожденных граничных условий не зависит от коэффициентов дифференциального выражения, порождающего оператор. В работе [2] исследована полнота системы корневых функций линейных дифференциальных операторов второго порядка в случае вырожденных краевых условий. Показано, что в этом случае полнота системы корневых функций зависит не только от J матрицы граничных коэффициентов, но и от коэффициентов дифференциального выражения. С иных позиций подобные вопросы для дифференциальных операторов второго порядка изучены в работе [3]. Полнота системы корневых функций линейных дифференциальных оператора высших порядков гарантируется в случае регулярных граничных условий в смысле Бирхгофа [4]. Причем полнота корневых функций для регулярных граничных условий в смысле Бирхгофа не зависит от $p_k(x)$ коэффициентов дифференциального выражения. Случай нерегулярных и распадающихся краевых условий на предмет полноты системы корневых функций изучен в работе А.А.Шкаликова [5]. Нас интересует вопрос: найти аналог невырожденных граничных условий для оператора K , расширяющих класс регулярных краевых условий по Бирхгофу и сохраняющих полноту системы собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2(0, 1)$.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор третьего порядка, корневые функции, полнота, общие граничные условия, невырожденные граничные условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Наука думка, Киев (1977).
- [2] Маламуд М.М. Необходимые условия существования оператора преобразования для уравнений высших порядков, *Функциональный анализ и его приложения*, **16:3** (1982), 74–75.
- [3] Fazullin Z.Y., Kanguzhin B.E., Seitova A.A. Stable perturbations of boundary problems for differential equations, *Bulletin of Karaganda University - Mathematics*, **92:4** (2018), 38–43.
- [4] Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, **9** (1908), 373–395.
- [5] Шкаликов А.А. Полнота собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярно-разделенными граничными условиями, *Функциональный анализ и его приложения*, **10:4** (1976), 95–96.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СЛОЯМИ В ПЕРВОМ ОКТАНТЕ

К.Т. КАРИМОВ¹, М.Р. МУРОДОВА²

^{1,2}Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

¹Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики
Узбекистан

¹karimovk80@mail.ru, ²mخالimova2112@mail.ru

В работе исследована краевая задача с условиями Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в области, ограниченной двумя параллельными слоями в первом октанте. Доказана единственность решения поставленной задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное уравнение эллиптического типа с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \quad (1)$$

в области

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in (0, +\infty), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\},$$

где $u = u(x, y, z)$ — неизвестная функция, а $\alpha, \beta, \gamma \in R$, причем $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1/2$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит эллиптическому типу. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения.

Для уравнения (1) в области Ω сформулируем и исследуем следующую задачу:

Задача DN_∞ Найти решение уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega), x^{2\alpha}u_x, y^{2\beta}u_y, z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}), \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha}u_x(x, y, z) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), \quad z \in [0, c] \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta}u_y(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y, z) = 0, \quad x \in [0, +\infty), \quad z \in [0, c] \quad (4)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma}u_z(x, y, z) = f_1(x, y), \quad \lim_{z \rightarrow c} u(x, y, z) = f_2(x, y), \quad x, y \in [0, +\infty), \quad (5)$$

где $\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : x \in [0, +\infty), y \in [0, +\infty), z \in [0, c]\}$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — заданные непрерывные функции.

Единственность решения задачи DN_∞

Theorem 1. Если существует решение задачи DN_∞ , то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача DN_∞ имеет два решения $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда получаем, что $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедлива тождество

$$x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}Lu = \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x + \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y + \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z - \\ - x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = 0.$$

Интегрируя это тождество по области

$$\Omega_{\delta_1\delta_3\delta_5\delta_6}^{\delta_2\delta_4} = \{(x, y, z) : \delta_1 < x < \delta_2, \delta_3 < y < \delta_4, \delta_5 < z < c - \delta_6\},$$

где $\delta_j, j = \overline{1, 6}$ — положительные числа, имеем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{\delta_1\delta_3\delta_5\delta_6}^{\delta_2\delta_4}} \left[\left(x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_x \right)_x + \left(x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_y \right)_y + \left(x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_z \right)_z \right] dx dy dz = \\ = \iiint_{\Omega_{\delta_1\delta_3\delta_5\delta_6}^{\delta_2\delta_4}} \left[x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что если $\delta_1, \delta_3, \delta_5, \delta_6 \rightarrow 0, \delta_2, \delta_4 \rightarrow +\infty$, то $\Omega_{\delta_1\delta_3\delta_5\delta_6}^{\delta_2\delta_4} \rightarrow \Omega$.

Применяя формулу Гаусса-Остроградского к левой стороне равенства (6), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_5}^{c-\delta_6} \int_{\delta_3}^{\delta_4} y^{2\beta} z^{2\gamma} \left[\delta_2^{2\alpha} u(\delta_2, y, z) u_x(\delta_2, y, z) - \delta_1^{2\alpha} u(\delta_1, y, z) u_x(\delta_1, y, z) \right] dy dz + \\ + \int_{\delta_5}^{c-\delta_6} \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{2\alpha} z^{2\gamma} \left[\delta_4^{2\beta} u(x, \delta_4, z) u_y(x, \delta_4, z) - \delta_3^{2\beta} u(x, \delta_3, z) u_y(x, \delta_3, z) \right] dx dz + \\ + \int_{\delta_3}^{\delta_4} \int_{\delta_1}^{\delta_2} x^{2\alpha} y^{2\beta} \left[(c - \delta_6)^{2\gamma} u(x, y, c - \delta_6) u_z(x, y, c - \delta_6) - \right. \\ \left. - \delta_5^{2\gamma} u(x, y, \delta_5) u_z(x, y, \delta_5) \right] dx dy = \iiint_{\Omega_{\delta_1\delta_3\delta_5\delta_6}^{\delta_2\delta_4}} \left[x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\delta_1, \delta_3, \delta_5, \delta_6 \rightarrow 0, \delta_2, \delta_4 \rightarrow +\infty$ и учитывая условия (2)-(5) (при $f(x, y) = 0$), из последнего равенства получим

$$\iiint_{\Omega} \left[x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] dx dy dz = 0.$$

Следовательно,

$$u_x(x, y, z) \equiv u_y(x, y, z) \equiv u_z(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

Тогда $u(x, y, z) \equiv \text{const}$, $(x, y, z) \in \Omega$. Так как $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$ и $\lim_{x \rightarrow +0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z) = 0$, то $u(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$. Отсюда следует утверждения теоремы. $\square$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: diffusion equation, homogeneous body, initial state, local inhomogeneity, transparent boundary conditions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

REFERENCES

[1] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, ФИЗМАТ-ЛИТ, Москва (2001). -Т.2. -800с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

А. КЕРИМБЕКОВ¹, Р. Е. БЕРИККАНОВ², У. ШАРШЕКЕЕВ³

^{1,3}Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

²Кыргызский национальный университет имени Жусупа Баласагына, Бишкек,
Кыргызстан

¹akl7@rambler.ru, ²b.ray@mail.ru

В работе исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза при нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых уравнениями в частных производных в случае, когда искомое оптимальное управление определяется как функция (или функционал) от состояния управляемого процесса. Исследование проводилось по схеме Беллмана — Егорова и разработан алгоритм построения синтезирующего равномерно-распределенного (по объекту) и точечного оптимальных управлений.

Задача нелинейной оптимизации и уравнение типа Беллмана. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал:

$$J[u(t)] = \beta \int_0^T p^2[t, u(t)] dt + \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи:

$$V_t(t, x) = V_{xx}(t, x) + g(x)f[t, u(t)], \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \quad (2)$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Здесь функция $V(t, x) \in H(Q_T)$ описывает состояние управляемого теплового процесса; $\xi(x) \in H(0, 1)$, $g(x) \in H(0, 1)$ и $\psi(x) \in H_1(0, 1)$ — заданные функции; $u(t) \in H(0, T)$ — функция управления; $p[t, u(t)] \in H(0, T)$ — заданная функция, и функционалом $J[u(t)]$ определяется качество управления процессом; $f[t, u(t)]$ описывает действие внешнего источника и является нелинейной монотонной функцией по функциональному аргументу $u(t)$, $t \in (0, T)$; $H(Y)$ — пространство Гильберта квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y ; $H_1(Y)$ — пространство Соболева первого порядка; $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ — область плоскости Oxt ; α — положительная постоянная; T — фиксированный момент времени.

В процессе исследования, согласно схеме Беллмана — Егорова, пользуясь интегральным тождеством обобщенного решения краевой задачи (1)–(2):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (V(t, x)\Phi(t, x)) \Big|_{t_1}^{t_2} dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^1 (V(t, x)\Phi_t(t, x) - V_x(t, x)\Phi_x(t, x) + g(x)f[t, u(t)]\Phi(t, x) dx - \alpha V(t, 1)\Phi(t, 1)) \right] dt, \end{aligned}$$

которое справедливо для любой функции $\Phi(t, x) \in H_1(Q_T)$ и для любых моментов времени t_1, t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$), и дифференциалом Фреше для функционала Беллмана

$$S[t, V(t, x)] = \min_{u(\tau) \in \Pi, t \leq \tau \leq T} \left\{ \beta \int_t^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau + \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx \right\}, \quad (5)$$

где Π — множество допустимых значений управления $u(t), t \in [0, T]$, получено уравнение типа Беллмана:

$$-\frac{\partial S[t, V(t, x)]}{\partial t} = \min_{u \in \Pi} \left\{ \beta p^2[t, u(t)] + \int_0^1 g(x)m(t, x) dx f[t, u(t)] - \int_0^1 V_x(t, x)m_x(t, x) dx - \alpha V(t, 1)m(t, 1) \right\}. \quad (6)$$

Здесь $m(t, x)$ — градиент функционала Беллмана, который определяется лишь после того, как будет известен явный вид функционала (5). Согласно (5) легко видеть, что уравнение (6) следует рассматривать вместе с дополнительным условием

$$S[T, V(T, x)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx. \quad (7)$$

Задача (6)–(7) называется задачей Коши–Беллмана. В каждом случае, когда Π — открытое или замкнутое множество, общий метод решения задачи Коши–Беллмана не разработан. Однако, в отдельных задачах удается решить задачу синтеза и разработать алгоритм построения синтезирующего оптимального управления. В статье в качестве примера подробно изложена задача синтеза равномерно-распределенного (по объекту) оптимального управления и задачи синтеза точечного оптимального управления в случае, когда Π — множество допустимых значений управления является замкнутым множеством. В обеих задачах разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления.

Ключевые слова: уравнение Беллмана, оптимальное управление, тепловые процессы, задача синтеза, нелинейная оптимизация.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Егоров А.И. Оптимальная стабилизация систем с распределенными параметрами. Материалы Международной конференции IFIP по технической оптимизации. Препринт 8, Новосибирск, 1974.
- [2] Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. Москва: Наука, 1978. — 464 с.

ПРОСТРАНСТВЕННО–НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.И. КОЖАНОВ

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

kozhanov@math.nsc.ru

В докладе представлены новые результаты о разрешимости в классах регулярных решений нелокальных краевых задач с обобщенным граничным условием Самарского–Ионкина для — параболических уравнений

$$u_t + (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + \sum_{k=0}^{2m-1} a_k(x, t) \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = f(x, t);$$

— дифференциальных уравнений с кратными характеристиками

$$u_t + \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} + c(x, t)u = f(x, t);$$

— псевдогиперболических уравнений

$$u_{tt} + (-1)^m \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial t \partial x^{2m}} + \sum_{k=0}^{2m-1} a_k(x, t) \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = f(x, t),$$

и для некоторых других уравнений, в том числе вырождающихся.

Во всех случаях доказываются теоремы существования и единственности решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Финансирование: Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке соглашение № 075–15–2025–349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Ключевые слова: эволюционные дифференциальные уравнения, нелокальные задачи, условие Самарского–Ионкина, регулярные решения, существование, единственность.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A23, 35G15, 35G9920

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

А.И. КОЖАНОВ¹, Г.Р. АШУРОВА²

¹*Институт математики имени С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия*

¹*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

²*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

²*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

ashurova.guzel@gmail.com

В работе рассматриваются обратные задачи определения решения $u(x, t)$ уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и неизвестной функции $q(t)$, входящей в правую часть уравнения. Пусть $\Omega = (0, 1)$ и $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ и $h(x, t)$ заданы при $(x, t) \in Q$.

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$\varphi(t)u_t - \psi(t)u_{xxx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t). \quad (1)$$

при выполнении условий $u(0, t) = u_x(0, t) = u(1, t) = 0$, $t \in (0, T)$ и

$$\int_0^1 N(x)u(x, t)dx = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

Обратная задача II: найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$ при выполнении условий (2), (3) и

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Обратная задача III: найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$ при выполнении условий (2)–(4) и

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Для исследования поставленных задач применяется метод регуляризации. Получаются априорные оценки решений, позволяющие доказать существование регулярных решений.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP26199323)

Ключевые слова: обратные задачи, уравнения третьего порядка, кратные характеристики, интегральные условия, линейные обратные задачи, неизвестное внешнее воздействие, регулярные решения.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K65

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

А.И. КОЖАНОВ¹, О.И. БЖЕУМИХОВА²

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Нальчик, Россия

¹kozhanov@math.nsc.ru, ²bzhoksana@gmail.com

Работа посвящена изучению вопросов разрешимости краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и с общим инволютивным отклонением аргумента по выбранной переменной. Наличие такого отклонения существенно усложняет исследование подобных задач.

Под инволюцией $\varphi(t)$ понимается монотонно убывающая, непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция, удовлетворяющая условию [1]:

$$\varphi(\varphi(t)) = t, \quad t \in [0, T].$$

Пусть Ω – интервал $(0, 1)$ оси Ox , $Q = \Omega \times (0, T)$ – прямоугольник конечной высоты T . Далее, пусть λ, μ – фиксированные действительные числа, $f(x, t)$ – заданная функция, определённая на множестве $\bar{Q}$, а $\varphi(t)$ – инволюция, определённая на отрезке $[0, T]$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t(x, t) - u_{xxx}(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(x, \varphi(t)) = f(x, t),$$

такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Разрешимость краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками без инволютивного отклонения аргумента к настоящему времени изучена достаточно подробно (см., например, [2–5], а также приведённую в них обширную библиографию). Вместе с тем, в случае $\mu \neq 0$, когда в уравнении присутствует слагаемое с инволюцией, краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками ранее не рассматривались, что подчёркивает актуальность и новизну проводимого исследования.

Основной результат работы сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(t) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0, T],$$

$$2\lambda > \varphi_1 T \mu^2.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$\frac{\partial^i f(x, t)}{\partial x^i} \in L_2(Q),$$

где $i = \overline{0, 3}$ и

$$f(0, t) = f(1, t) = f_x(0, t) = 0$$

при $t \in [0, T]$, краевая задача 1 разрешима в пространстве $W_2^{3,1}(Q)$, и ее решение единственно.

Ключевые слова: уравнения с кратными характеристиками, инволюция, регулярные решения, существование, единственность.

2020 Mathematics Subject Classification: 35B65, 35K35.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wiener J., Watkins W. A glimpse into the wonderland of involutions, *Missouri J. Math. Sci.*, **14**:3 (2002), 175–185.
- [2] Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент (1986).
- [3] Mascarello M., Rodino L. *Partial differential equations with multiple characteristics*, Wiley, Berlin (1997).
- [4] Кожанов А.И. О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками, *Мат. заметки ЯГУ*, **8**:2 (2001), 27–40.
- [5] Кожанов А.И., Ашурова Г.Р. Дифференциальные уравнения третьего порядка с кратными характеристиками: вырождение и неизвестное внешнее воздействие, *Челябинский физико-математический журнал*, **9**:4 (2024), 585–595.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА.

А. И. КОЖАНОВ¹, Д.С. МАМАНАЗАРОВ²

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

^{1,2}Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

¹kozhanov@math.nsc.ru, ²d.mamanazarov@g.nsu.ru

Нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для параболических уравнений в частных производных рассматриваются в монографии А.И. Кожанова [1]. Наиболее же близкой по тематике к настоящей работе представляется статья [2], посвященная изучению нелокальных задач для параболического уравнения второго порядка с краевым условием А.А. Самарского.

В настоящей работе будет исследоваться разрешимость нелокальных задач с общим условием А.А. Самарского для параболических уравнений четвертого порядка вида

$$u_t + u_{xxxx} + c(x, t)u = f(x, t)$$

Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, обладающих всеми необходимыми обобщенными по С. Л. Соболеву производными. Полученные результаты предоставляют новые подходы к решению нелокальных задач в данной области, что может быть полезно для применения в теоретических и прикладных исследованиях.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения четвертого порядка, нелокальная задача, регулярное решение, существование решения, единственность решения.

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кожанов А.И. *Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных. Сводка результатов, нерешенные задачи*. Новосибирск: Наука, 2024.
- [2] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно-нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений, *Вестник СамГУ*, **3**:62 (2008), 165–174.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ НЕ ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫХ КОАЛГЕБР

Д.Х. КОЗЫБАЕВ

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

kozybayev@gmail.com

Описан метод построения коалгебр. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых коалгебра является дифференциальной коалгеброй, коалгеброй Новикова, коалгеброй Ли, суперкоалгеброй Йордана и правоальтернативной коалгеброй. Приводятся примеры нелокально конечной дифференциальной коалгебры, коалгебры Новикова, коалгебры Ли, суперкоалгебры Йордана и правоальтернативной коалгебры. Также построены примеры бесконечномерной простой дифференциальной коалгебры, коалгебры Новикова, коалгебры Ли и суперкоалгебры Йордана над полем нулевой характеристики.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23486782).

Ключевые слова: коалгебра, дифференциальная алгебра, алгебра Новикова, алгебра Ли, супералгебра Йордана, право-альтернативная алгебра.

2020 Mathematics Subject Classification: 17B62, 17C70, 17D25, 17D15

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Anquella J., Cortes T., Montaner F. Nonassociative Coalgebras, *Comm. in Algebra*, **22**:12 (1994), 4693–4716.
- [2] Козыбаев Д.Х., Наурызбекова А.С. Коалгебры Новикова, *Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series*, **139**:2 (2022), 6–11.
- [3] Kozybaev, D., Umirbaev, U., Zhelyabin, V. Some examples of nonassociative coalgebras and supercoalgebras, *Linear Algebra and Its Applications*, **643** (2022), 235–257.

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ БАҒАЛАУЫ

К.Т. КОНИСБАЕВА

әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан

kuralaimm7@gmail.com

Келесі түрдегі сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы ауытқыған шеттік есеп қарастырайық:

$$L_\varepsilon[y(t)] = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n_1+m} H_i(t, x) y^{(i)}(x, \varepsilon) dx, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^i y}{dt^i} \Big|_{t=0} &= \alpha_i, \quad i = \overline{0, l-1}, \\ \frac{d^i y}{dt^i} \Big|_{t=1} &= \beta_i, \quad i = \overline{0, p-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

мұндағы $0 < \varepsilon \leq 1$, α_i, β_i -белгілі тұрақтылар, $A_{n+m}(t) = 1$, $m + n = l + p$, ал

$$L_\varepsilon[y(t)] \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r}y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k}$$

Келесі шарттар орындалсын:

C1) $A_i(t) \in C^{n+m-1}[0, 1]$, $i = \overline{0, n+m}$, $F(t) \in C[0, 1]$, $H_i(t, x) \in C(D)$, $i = \overline{0, n_1+1}$, $D = (0 \leq t, x \leq 1)$.

C2) $A_n(t) \geq \gamma = \text{const} > 0$, 0 ;

C3) Қосымша сипаттауыш $\mu^m(t) + A_{n+m-1}(t)\mu^{m-1}(t) + \dots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0$ теңдеуінің әртүрлі нақты m теріс түбірлері бар болсын және $m < l$, $l - m = n_1$.

Бұл жұмыста (1), (2) шеттік есептің шешімі үшін аналитикалық формула және асимптотикалық бағалаулар алынған. $\varepsilon \rightarrow 0$ кезде $t = 0$ нүктесінде m дәрежелі n_1 -ші ретті бастапқы секіріс құбылысы орын алатыны анықталды.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (Грант № AP23488301) қаржыландырады.

Кілт сөздер: сингулярлы ауытқу, интегро-дифференциалдық теңдеу, асимптотика, кіші параметр, бастапқы секіріс.

2020 Mathematics Subject Classification: 34D15, 34E10, 34K26.

REFERENCES

- [1] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, **12:5** (1957), 3-122.
- [2] Нургабыл Д.Н. Построения решения краевой задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, *НАН РК, серия физико-математическая*, **3:295** (2014), 113–118.

ПЕРИОДИЧЕСКУЮ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

А.А. КОПЖАСАРОВА ¹, А.Б. ИМАНБАЕВА ², С.Т. АХМЕТОВА ³

Южно Казахстанский университет имени М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

¹asyl_k@mail.ru, ²aigul_baratovna@bk.ru, ³sabdas65@mail.ru

Рассмотрим периодическую и антипериодическую задачу для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом.

$$Ay = y'(1-x) + q(1-x)y(1-x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$(a) \quad y(0) = y(1), \quad (b) \quad y(0) = -y(1). \quad (2)$$

Допустим, что спектры этих краевых задач обладают центральной симметрией, т.е. если λ является собственным значением оператора A , то $-\lambda$ также является собственным значением этого оператора.

Спрашивается, какими свойством должна обладать функция $q(x)$?

В этом случае, в силу леммы 1, каждое собственное значение спектральной задачи (1)-(2) будет кратным собственным значением периодической и антипериодической задачи Штурма-Лиувилля

$$Bz = -z''(x) + p(x)z(x) = \lambda^2 z(x),$$

$$(a) \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1);$$

$$(b) \quad y(0) = -y(1), \quad y'(0) = -y'(1)$$

Известно, что самое первое собственное значение λ_0^2 периодической задачи является простым [15. с. 61]

Если $Bz = \lambda_0^2 z$, то в силу леммы 1 имеет место равенство $A^2 u = \lambda_0^2 u$, при некотором $u \neq 0$, поскольку λ_0 – простое собственное значение, то в силу леммы 1 имеем, либо $Au = \lambda_0 u$, либо $Au = -\lambda_0 u$ (здесь A – оператор периодической задачи). По предположению спектр периодической задачи симметричен, поэтому имеет место, также равенство $Av = -\lambda_0 v$, $v \neq 0$. Тогда, если $\lambda_0 \neq 0$, то в силу леммы 1 величина $\lambda_0^2 \neq 0$ является двукратным собственным значением оператора Штурма-Лиувилля, вопреки нашему приложению, поэтому $\lambda_0 = 0$. По теореме Хохштадтам, если весь спектр периодической и антипериодической задачи Штурма-Лиувилля двукратный, то коэффициент такого уравнения есть постоянная, т.е.

$$p(x) = \frac{q'(1-x) - q'(x)}{2} + \frac{[q(x) + q(1-x)]^2}{4} = C,$$

Поменяв местами, x на $1-x$, имеем $q'(1-x) = q(1-x)$ или $q(x) + q(1-x) = C - const$. Точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением периодической задачи, поэтому имеет место равенство $Bz_0 = 0$, $z_0 \neq 0$, отсюда $A^2 u = 0$, $u \neq 0$. Тогда либо $Au = 0$, либо $Au \neq 0$, в этом случае $A(Au) = 0$, т.е. в любом случае точка $\lambda_0 = 0$ есть собственное значение оператора A . Следовательно, $Av = v'(1-x) + q(1-x)v(1-x) = 0$, отсюда

$$v(x) = Ce^{\int_0^x q(t) dt}.$$

Подставив это выражение, в граничное условие периодической задачи, получим

$$C = C \times e^{\int_0^1 q(t) dt}$$

Поскольку $q(t)$ вещественная функция, то $\int_0^1 q(t) dt = 0$. Проинтегрировав равенства

$$q(x) + q(1-x) = C,$$

получим

$$\int_0^1 q(x) dx + \int_0^1 q(1-x) dx = 2 \int_0^1 q(x) dx = C = 0$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Theorem 1. Если $q(x)$ вещественная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющая условию $q'(0) = q'(1)$, и спектр периодической и антипериодической задачи для уравнения

$$Au = u'(1-x) + q(1-x)u(1-x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, 1)$$

центрально симметричен, то

$$q(x) + q(1-x) = 0.$$

Keywords: периодическая задача, антипериодическая задача, уравнение с отклоняющимся аргументом, спектральная симметрия, краевая задача.

REFERENCES

[1] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории с отклоняющимся аргументом, *Математический журнал*, 4:3 (2004), 41–48.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Б.Д. КОШАНОВ¹, У. ТУРГАНБЕК², А.Ж. ЕРХАН³

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

^{2,3}Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

¹koshanov@math.kz, ²ainur.erkhan@icoud.com, ³Ulzya03@mail.ru

Хорошо известно [1], что в случае уравнения Пуассона необходимым и достаточным условием разрешимости для задачи Неймана является

$$\int_S g(x) dx = \int_{\partial S} \varphi_1(x) dx.$$

В работе [2], в частности, показано, что в случае $m = 2$ необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Неймана для бигармонического уравнения имеет вид

$$\int_{\partial S} \left\{ \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \int_S d_{2,n}(4-n) [(2-n)|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2 + |x-y|^{2-n}(x,y)] g(y) dy \right\} dS_x = 0,$$

где (x, y) – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, и $d_{2,n} = \frac{\Gamma(n/2-2)}{16\pi^{n/2}}$.

Авторы статьи [3] представили это условие в иной форме, которую можно было легко проверить,

$$\int_S \frac{1-|x|^2}{2} g(x) dx = \int_{\partial S} [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dS_x.$$

В вышеупомянутой работе [2] авторы нашли условие разрешимости задачи Неймана также для полигармонического уравнения порядка m . Это условие следует из равенства нулю определителя матрицы $m \times m$, один столбец которой состоит из интегралов. Заметим, что уравнение, которое получается в результате, очень сложно проверить. В работе [4] даны условия разрешимости задачи Неймана с помощью решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре.

В данной работе исследуется следующая краевая задача для тригармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^3 u(x) = g(x), \quad x \in S, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} u = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} u = \varphi_3(x), \quad x \in \partial S, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – внешняя нормальная производная к ∂S .

Теорема 1. Пусть $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ и $g(x)$ достаточно гладкие функции. Тогда необходимое и достаточное условие разрешимости краевой задачи (1), (2), т.е. задачи K-124 имеет вид:

$$\int_S (1-|x|^2)^2 g(x) dx = 8 \int_{\partial S} [3\varphi_1(x) - 3\varphi_2(x) - \widetilde{\varphi}_3(x)] dS_x,$$

$$\widetilde{\varphi}_3(x) = \Gamma_0^{-1} \varphi_3(x), \quad \varphi_3(0) = 0.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до константы и может быть представлено как

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[v](x),$$

где $v(x)$ – решение задачи Дирихле с правой частью $g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x)$, удовлетворяющее дополнительному условию $v(0) = 0$.

Здесь использованы дифференциально-интегральные операторы

$$\Gamma_c[u](x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + c\right)u(x), \quad \Gamma_c^{-1}[u](x) = \int_0^1 t^{c-1}u(tx) dt,$$

где $r = |x|$ и $c \geq 0$. Заметим, что оператор Γ_0^{-1} не определен для функций $u(x)$ с $u(0) \neq 0$.

Свойства этих операторов подробно описаны в работах [4,5].

Финансирование: Работа выполнена при поддержке гранта BR20281002 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

Ключевые слова: тригармонические уравнения, задача Дирихле, задача Неймана, условие разрешимости.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J40, 35J30, 35J05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики, 1974.
- [2] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения, *Уфимский математический журнал*, т. 2, вып. 2, с. 41–52, 2010.
- [3] Karachik V.V., Turmetov B.K., Bekayeva A.E. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball, *Int. J. Pure Appl. Math.*, vol. 81, no. 3, pp. 487–495, 2012.
- [4] Turmetov B.K., Ashurov R.R. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball, *Boundary Value Problems*, vol. 2013, no. 162, 2013.
- [5] Bavrin I.I. Operators for harmonic functions and their applications, *Differ. Uravn.*, vol. 21, no. 1, pp. 9–15, 1985 (in Russian); English transl.: *Differ. Equ.*, vol. 21, no. 1, pp. 6–10, 1985.

О СВЯЗИ АЛГЕБР БИНАРНЫХ ФОРМУЛ С ЧИСЛОМ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ

Б.Ш. КУЛПЕШОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

b.kulpeshov@kbtu.kz

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данном докладе мы рассматриваем L -структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M .

Полная теория T является *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Мы говорим, что тип p является *не слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют L_A -формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$. Другими словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A .

Алгебры бинарных изолирующих формул являются средством описания связей между элементами множеств реализаций 1-типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определимых множеств. Под *бинарной изолирующей формулой* понимается формула вида $\phi(x, y)$ такая, что для некоторого параметра a формула $\phi(a, y)$ изолирует полный тип в $S_1(\{a\})$. Понятия и обозначения, относящиеся к этим алгебрам, могут быть найдены в работах [2]–[3].

В настоящем докладе мы обсуждаем связь числа счетных моделей для слабо о-минимальных теорий с алгебрами бинарных изолирующих формул для неалгебраических 1-типов и представляем критерий того, чтобы малая бинарная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости имела не более чем счетное число счетных попарно неизоморфных моделей в терминах конечности алгебр бинарных изолирующих формул.

Определение 1. [4] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Мы говорим, что p — *квазирациональный вправо (влево)*, если существует выпуклая L_A -формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточной насыщенной модели $N \succ M$ имеет место $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$). Неизолированный 1-тип называется *квазирациональным*, если он является либо квазирациональным вправо, либо квазирациональным влево. Неквазирациональный неизолированный 1-тип называется *иррациональным*.

Очевидно, что 1-тип, будучи одновременно квазирациональным вправо и квазирациональным влево, является *изолированным*.

Ранг выпуклости множества введен в [5]. Ранг выпуклости произвольного множества A называется *бинарным* и обозначается через $RC_{bin}(A)$, если вместо параметрически определимых отношений эквивалентности рассматриваются $\emptyset$ -определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности.

Пусть T — произвольная $\aleph_0$ -категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$, $RC_{bin}(p) = n$ для некоторого $1 \leq n < \omega$. Следовательно, существуют $\emptyset$ -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ выполняется

$$E_1(M, a) \subset E_2(M, a) \subset \dots \subset E_{n-1}(M, a).$$

Очевидно, что тип p — изолированный, т.е. существует L -формула $P(x)$, изолирующая тип p . Тогда алгебра $\mathfrak{P}_p$ бинарных изолирующих формул для типа p состоит в точности из $2n + 1$ формул. Слегка подправляя определение в [6]–[7], такую алгебру будем называть *(wom, $\aleph_0$, n)-моноидом*.

Пусть теперь T — произвольная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$, $RC_{bin}(p) = n$ для некоторого $1 \leq n < \omega$. Если тип p — квазирациональный вправо, то существует выпуклая L -формула $P(x)$ такая, что $p(M) \subset P(M)$ и $[p(M)]^+ = P(M)^+$. Тогда алгебру $\mathfrak{P}_p$, состоящую в точности из $2n$ формул, будем называть *(wom, QR, n)-моноидом*.

Если же тип p — квазирациональный влево, то существует выпуклая L -формула $P(x)$ такая, что $p(M) \subset P(M)$ и $[p(M)]^- = P(M)^-$. Тогда алгебру $\mathfrak{P}_p$, состоящую в точности из $2n$ формул, будем называть *(wom, QL, n)-моноидом*.

Пусть теперь тип p — иррациональный. Тогда алгебру $\mathfrak{P}_p$, состоящую в точности из $2n - 1$ формул, будем называть *(wom, I, n)-моноидом*.

Следующая теорема является критерием того, чтобы малая бинарная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости имела не более чем счетное число счетных попарно неизоморфных моделей в терминах конечности алгебр бинарных изолирующих формул.

Теорема 2. Пусть T — малая бинарная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости n для некоторого $1 \leq n < \omega$, Γ_1 и Γ_2 — максимальные попарно слабо ортогональные семейства иррациональных и квазирациональных 1-типов над $\emptyset$ соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) T имеет не более чем ω счетных моделей;

(2) оба Γ_1 и Γ_2 конечны, и для любого неалгебраического $p \in S_1(\emptyset)$ алгебра $\mathfrak{P}_p$ бинарных изолирующих формул для p конечна. В частности, если $RC(p) = k$ для некоторого $1 \leq k \leq n$, то $\mathfrak{P}_p$ является (wom, S, k) -моноидом для некоторого $S \in \{\aleph_0, \text{QR}, \text{QL}, \text{I}\}$ в зависимости от вида p .

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31714735).

Ключевые слова: слабая о-минимальность, алгебра бинарных формул, число счетных моделей, слабая ортогональность типов, бинарная теория, квазирациональный тип, иррациональный тип.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of the American Mathematical Society*, **352**:12 (2000), 5435–5483.
- [2] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 380–407.
- [3] Sudoplatov S.V. *Classification of countable models of complete theories*, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (2018).
- [4] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.
- [5] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic*, **63** (1998), 1511–1528.
- [6] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах, *Алгебра и логика*, **56**:1 (2017), 20–54.
- [7] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **57**:6 (2018), 662–683.

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ В ЭКОНОМИКЕ

Т.Ч. КУЛТАЕВ¹, А.Т. МАМАТКАСЫМОВА², А.М. ЗУЛПУЕВ³,
Ж.Ж. БЕКСАРИЕВА⁴

^{1,2}Ошский государственный университет, г.Ош, Кыргызстан

^{3,4}Ошский технологический университет, г. Ош, Кыргызстан

mamatkasymova1973@mail.ru

Прогнозирование урожайности сельскохозяйственных культур, несомненно, является одной из приоритетных задач аграрного сектора экономики региона.

1. Пусть в крестьянском хозяйстве имеется m -участков с разной плодородностью почвы, где выращивается видов сельскохозяйственных культур. Предполагаются известными площадь каждого участка крестьянского хозяйства, минимально допустимый и максимально возможный размер посевной площади под каждую культуру, урожайность, стоимость и оптовая реализационная цена сельскохозяйственной продукции.

Требуется определить оптимальный размер посевной площади под каждую культуру так, чтобы получаемая суммарная прибыль крестьянского хозяйства была максимальной.

Вводя следующие обозначения сформулируем математическую модель: i – индекс участка крестьянского хозяйства, j – индекс сельскохозяйственной культуры, a_{ij} – получаемая продукция от j -й культуры на единице площади i -го участка, $\bar{c}_{ij}$ – затраты на сельскохозяйственную продукцию j -й культуры, выращенной на единице площади i -го участка, c_{ij} – оптовая реализационная цена единицы сельскохозяйственной продукции j -й культуры, $c_{ij} = a_{ij}c_j - \bar{c}_{ij}$ –

прибыль, получаемая крестьянским хозяйством от реализации продукции j -й культуры, выращенной на единице площади i -го участка, s_i – площадь i -го участка крестьянского хозяйства, b'_j, b''_j – заданные минимально допустимые и максимально возможные общие посевные площади под j -ую культуру, x_{ij} – площадь посева j -й культуры на j -м участке.

Найти максимум

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, i = 1, 2, \dots, m,$$

$$b'_{ij} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b''_{ij}, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Пусть выращенная сельскохозяйственная продукция, в выше указанном крестьянском хозяйстве, реализуется на k рынках.

Предполагаются известными планируемые посевные площади под каждую культуру, возможная минимальная и максимальная урожайность каждой культуры, транспортные затраты, максимальный объем реализации и оптовая реализационная цена сельскохозяйственной продукции.

Требуется определить урожайность сельскохозяйственных культур и объемы реализации сельскохозяйственной продукции так, чтобы получаемая суммарная прибыль крестьянского хозяйства была максимальной.

Найти максимум

$$L(y) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n c_{jk} x_{jk} - \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{ij}(y_{ij}) + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n t_{jk} x_{jk} \right\}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ij} \geq \sum_{k=1}^p x_{jk}, j = \overline{1, n},$$

$$b'_{ij} \leq y_{ij} \leq b''_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

$$0 \leq \sum_{k=1}^p x_{jk} \leq D_j, j = \overline{1, n},$$

$$x_{jk} \geq 0, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}$$

где $x = \|x_{kj}\|_{n,p}$, $y = \|y_{ij}\|_{m,n}$; i – индекс участка крестьянского хозяйства; j – индекс сельскохозяйственной культуры; k – индекс рынка, где реализуется сельскохозяйственная продукция; y_{ij} – урожайность j -й сельскохозяйственной культуры с единицы площади i -го участка; a_{ij} – планируемая посевная площадь под j -ую сельскохозяйственную культуру на i -м участке; c_{jk} – рыночная оптовая цена на продукцию, получаемую от j -й культуры, реализуемой на k -м рынке; x_{jk} – объем сельскохозяйственной продукции j -й культуры, реализуемой на k -м рынке; t_{jk} – транспортные затраты на перевозку единицы объема сельскохозяйственной продукции j -й культуры, реализуемой на k -м рынке; – возможная минимальная и максимальная урожайность j -й культуры с единицы площади i -го участка;

D_j – максимальный объем реализации продукции j -й культуры; $\varphi_{ij}(y_{ij})$ – заданная вогнутая функция, которая определяет зависимость затрат от урожайности j -й культуры с единицы посевной площади i -го участка.

В работе излагаются методы решения выше указанных задач с использованием [1] и можно отметить, что такие и подобные задачи рассматривались в [2].

Ключевые слова: Прогнозирование урожайности, прибыль, транспортные затраты, суммарная прибыль, рыночная оптовая цена, индекс рынка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. *Задачи и методы линейного программирования*, Сов. радио, Москва (1964).

[2] Култаев Т.Ч. *Задача оптимального использования сельскохозяйственной техники в крестьянских хозяйствах. Дискретный анализ и исследование операций - DAOR - 04.*, Института Математики СО РАН, Новосибирск (2004).

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ НОРТОНА-БЕЙЛИ

А. ҚАЙРАТҚЫЗЫ¹, Л.К. ЖАПСАРБАЕВА²

^{1,2}Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева

¹kairatkyzyagnura@gmail.com, ²leylazhk67@gmail.com

В работе исследуется начально-краевая задача для нелинейного параболического уравнения Нортон-Бейли, возникающего в математическом моделировании процессов ползучести металлов и сплавов [1]. Модель учитывает степенную зависимость скорости деформации $\dot{\epsilon}$ от напряжения σ и времени t

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^m t^{1/m} \sigma^n, \quad (1)$$

где K, m, n — постоянные. В работе исследуется параболическая форма обобщения этой модели, учитывающая первичную стадию ползучести, когда скорость деформации уменьшается со временем.

Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения Нортон-Бейли

$$\begin{cases} \partial_t u = K_m(t) \partial_x \left(|\partial_x u|^{p-2} \partial_x u \right) + f(t, x), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0, x) = h(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (2)$$

где коэффициент диффузии задается функцией

$$K_m(t) = \frac{\rho}{A} \left(\frac{1}{B(t+t_0)^m} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad p = \frac{1}{n} + 1, \quad t_0 > 0, \quad 0 < m < 1. \quad (3)$$

Здесь ρ, A, B, t_0 — положительные постоянные. Параметр m управляет скоростью временного затухания коэффициента, что соответствует первичной стадии ползучести. Случай $1 < p < 2$ соответствует степенной зависимости скорости деформации от напряжения с показателем $n > 1$. Наличие сдвига t_0 обеспечивает регулярность коэффициента при $t = 0$. Исследуемое уравнение содержит оператор типа p -лапласиана и временную функцию $K_m(t)$, характеризующую затухание коэффициента диффузии.

В работе доказаны существование и единственность слабого решения начально-краевой задачи (2) в пространстве $L^2(0, T; W_0^{1,p}(0, L))$ при $1 < p < 2$. Доказательство основано на получении равномерных априорных оценок для приближённых решений с использованием неравенств Гронуолла. Полученные результаты подтверждают математическую корректность постановки задачи и создают основу для дальнейшего численного анализа и качественного исследования решений.

Умножая уравнение (2) на пробную функцию $w(x) \in W_0^{1,p}(0, L)$ и формально интегрируя по частям, получаем интегральное тождество, определяющее слабое решение

$$\int_0^L \partial_t u w dx + K_m(t) \int_0^L (|\partial_x u|^{p-2} \partial_x u) \partial_x w dx = \int_0^L f(t, x) w dx. \quad (4)$$

Определение 1. При $1 < p < 2$ функция $u \in L^2(0, T; W^{1,p}(0, L))$, для которой $\partial_t u \in L^2(0, T; L^2(0, L))$, называется *слабым решением* задачи (2), если она удовлетворяет тождеству (4) для каждого $w \in W_0^{1,p}(0, L)$ и почти всех $t \in (0, T)$, и выполнено начальное условие $u(0, x) = h(x)$ для всех $x \in (0, L)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $1 < p < 2$ и заданные функции $h(x)$, $f(t, x)$ удовлетворяют условиям

- $h(x) \in W_0^{1,p}(0, L)$,
- $f(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, L))$.

Тогда существует единственная функция $u \in L^2(0, T; W^{1,p}(0, L))$, $\partial_t u \in L^2(0, T; L^2(0, L))$, являющаяся *слабым решением начально-краевой задачи* (2) в смысле определения 1.

Для доказательства основной теоремы 2 мы приведем две теоремы: существования и единственности.

Доказательство существования задачи (2) слабого решения установлено с помощью интегрального неравенства Гронуолла и леммы Обена–Леонса о компактности [2]–[3].

Теорема 3. Существует слабое решение уравнения (4) такое, что $u \in L^2(0, T; W^{1,p}(0, L))$.

Единственность решения задачи (2) была доказана с использованием дифференциальной формы леммы Гронуолла [4] и основными неравенствами для p -лапласиана [5].

Теорема 4. Пусть u — решение уравнения (4). Тогда $u \in L^2(0, T; W^{1,p}(0, L))$ и $\partial_t u \in L^2(0, T; L^2(0, L))$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489433 «Математический анализ нелинейных k -обобщенных уравнений Кортевега-де Фриза в весовых дробных пространствах Соболева»).

Ключевые слова: начально-краевая задача, существование, единственность, уравнение Нортон-Бейли, p -лапласиан, слабое решение.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35B40, 35A01

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kassner M.E. *Fundamentals of Creep in Metals and Alloys*, Elsevier Science, Amsterdam (2009).
- [2] Aubin J.P. *Un théorème de compacité*, C.R. Acad. Sci. Paris, (1963).
- [3] Lions J.L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, (1969).
- [4] Evans L.C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence (2010).
- [5] Lindqvist P. *Notes on the p -Laplace equation*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, (2017).

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОТЕНЦИАЛА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А.К. ЛЕС

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

aydanales@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим уравнения Гельмгольца

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x). \quad (1)$$

Потенциал Гельмгольца задаётся следующей формулой

$$u(x) = L_G^{-1} f = \int_{\Omega} \varepsilon_n(x-y, -ik) f(y) dy, \quad (2)$$

где $\varepsilon(x-y, -ik)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца:

$$-\Delta_x \varepsilon_n(x-y, -ik) - ik \varepsilon_n(x-y, -ik) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть k^2 — произвольное вещественное число. Для любого $f \in L_2(\Omega)$ потенциал Гельмгольца $u = L_G^{-1} f \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1) и граничному условию:

$$\begin{aligned} G[u] &= -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_y}(x-y, -ik) u(y) dy - \\ &- \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y, -ik) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) dy = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Обратно, если $\forall u \in W_2^2(\Omega)$ функция удовлетворяет (1)-(4), то $u(x)$ совпадает с потенциалом Гельмгольца.

Теорема 1 при условии $k^2 \neq \lambda_k$, где λ_k — собственное значение спектральной задачи Дирихле, доказана в работе [1].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488701).

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, потенциал Гельмгольца, граничные условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 31A10, 35J05, 35J08, 35J25, 47A20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1.-2012. -Т.52, №6. -С.1063-1068.

[2] Kalmenov T. S., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potential, *Springer Basel*, 1:2 2011. — С. 187-210.

[3] Kalmenov T. S., Kabanikhin S. I., Les A. The Sommerfeld problem and inverse problem for the Helmholtz equation, in: *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, — 2021. — Т. 29. — №. 1. — С. 49-64.

ПРЕДГЕОМЕТРИИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ АЛГЕБРАМИ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ

С. Б. МАЛЫШЕВ

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

sergei2-mall@yandex.ru

Рассматриваются предгеометрии, возникающие из алгебр распределений бинарных изолирующих формул полной теории. Вводится оператор замыкания в смысле предгеометрического подхода [2], основанный на композиции изолирующих формул, и исследуются типы таких предгеометрий.

Пусть T — полная теория, $\mathfrak{M} \models T$, и $p(x)$ — фиксированный полный 1-тип над $\emptyset$. Формула $\varphi(x, y)$ называется *бинарной изолирующей*, если для любого $a \models p$ множество реализаций $\{b \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a, b)\}$ конечно и ненулевое, а также $\varphi(x, y)$ изолирует тип $q(y)$, сопряжённый с $p(x)$ [3]. Множеству классов эквивалентности бинарных изолирующих формул сопоставляется алгебра распределений $\mathfrak{B}(T, p)$ с операцией композиции [1].

$$[\varphi] \cdot [\psi] = \{[\theta] \mid \theta(x, z) \vdash \exists y(\varphi(x, y) \wedge \psi(y, z))\}.$$

Определение 1. Пусть $\mathfrak{B}(T, p)$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул, а M — носитель модели $\mathfrak{M} \models T$. Для множества $A \subseteq M$ определим оператор

$$\text{cl}_{\mathfrak{B}}(A) = \{b \in M \mid \exists a \in A \text{ и } b \text{ достижим из } a \text{ по некоторой } \varphi \in \mathfrak{B}(T, p)\},$$

то есть собираются все элементы $b \in M$, для которых найдутся $a \in A$ и бинарная изолирующая формула $\varphi(x, y) \in \mathfrak{B}(T, p)$ такие, что $\mathfrak{M} \models \varphi(a, b)$.

Лемма 2. Оператор $\text{cl}_{\mathfrak{B}}$ является оператором предгеометрии: он монотонен, идемпотентен и удовлетворяет обмену.

Определение 3. Предгеометрия $\langle M, \text{cl}_{\mathfrak{B}} \rangle$ называется *тривиальной*, если

$$\text{cl}_{\mathfrak{B}}(A) = \bigcup_{a \in A} \text{cl}_{\mathfrak{B}}(\{a\})$$

для любого $A \subseteq M$.

Теорема 4. Если в $\mathfrak{B}(T, p)$ композиция любых двух классов формул не расширяет множество достижимых реализаций (то есть для любых меток u, v композиция $u \cdot v$ не порождает новых меток, отличных от u и v), то индуцированная предгеометрия тривиальна.

Определение 5. Предгеометрия $\langle M, \text{cl}_{\mathfrak{B}} \rangle$ называется *локально конечной*, если для любого конечного $A \subseteq M$ множество $\text{cl}_{\mathfrak{B}}(A)$ конечно.

Теорема 6. Если каждая метка в $\mathfrak{B}(T, p)$ соответствует формуле с равномерно ограниченным числом реализаций, то индуцированная предгеометрия локально конечна.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2026-0032.

Ключевые слова: предгеометрия, бинарные изолирующие формулы, алгебра распределений, оператор замыкания, теория моделей.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C65.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Emel'yanov D.Yu. On the algebra distributions of binary formulas of unary theories. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **17** (2016), 23–36.
- [2] Pillay A. *Geometric Stability Theory*, Oxford, Clarendon Press, 1996. 361 p.
- [3] Emel'yanov D.Y., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. *Algebras of binary formulas: a monograph*. Novosibirsk, NSTU Publisher, 2023. 330 p.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Э.А. МАМАЗИАЕВА¹, Ч.Б. ЖОЛДОШОВА²

¹Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

²Ошского технологического университета имени М. Адышева, Ош, Кыргызстан

mamaziaeva@mail.ru

Аннотация. Особенность метода, называемого методом дополнительного аргумента, заключается в том, что его можно использовать для построения решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе рассмотрено построение решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. Начальная задача сводится к системе алгебраических уравнений. Доказана теорема о том, что задача Коши имеет столько же решений, сколько и система алгебраических уравнений.

Применения метода дополнительных аргументов для построения решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрены в работах [1-2].

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение в частных производных с вырожденным ядром вида:

$$D^2[-u(t, x)]D^2[u(t, x)]u(t, x) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{i=1}^l H_i(t)K_i(\tau, \xi)u(\tau, \xi) d\xi d\tau + g(t), \quad (t, x) \in R_1^2 \quad (1)$$

где оператор: $D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}$.

(1) В работе построено решение уравнения (1) со следующими начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0, x) = 0, \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \alpha + \beta x, \\ \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = -2\beta(\alpha + \beta x). \end{cases} \quad (2)$$

Данные в задачах (1), (2) принадлежат пространствам из [2]:

$$g(t), H_i(t) \in C(R_+, R), \quad K_i(\tau, \xi) \in C(R_1^2, R), \quad (i = 1, \dots, l), \quad \alpha, \beta \in R, \quad (k = 1, \dots, m).$$

Ключевые слова: нелинейное, частное, производная, дополнительный аргумент, вырожденное ядро, система, алгебраическое уравнение, единственное решение.

2020 Mathematics Subject Classification: 517.928

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аширбаева А.Ж. Построение решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром, *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям*, 27 (1998), 45–50.

[2] Аширбаева А.Ж. Построение решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с невырожденным ядром, *Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук*, 4 (2001), 68–72.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ж.И. МАМБЕТОВ¹, Г.К. АБДАКИМОВА²

Ошский технологический университет имени М. Адышева, Ош, Кыргызстан

^{1,2}Ошский технологический университет имени М. Адышева, Ош, Кыргызстан

zhoomart_mambetov@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача построения единственного решения линейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Рассматриваемое уравнение задано начальным условиям, то есть рассматривается задача Коши. При построении решения введено обозначение и использован метод дополнительного аргумента. Этот метод позволяет строить решения начальной задачи для некоторых линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Полученные результаты могут быть распространены и на уравнения более высокого порядка.

Построение решений уравнений в частных производных сложнее, чем обыкновенных дифференциальных уравнений. В зависимости от специфики некоторых уравнений рассматривается построение решений. Применение метода дополнительного аргумента при построении единственного решения начальной задачи рассмотрено в работах [1,2]. Вопросам построения решений систем уравнений в частных производных этим методом, даже при рассмотрении нелинейных случаев, посвящены работы [3,4]. В данной работе рассматривается задача построения решений уравнений в частных производных третьего порядка.

Применение метода дополнительного аргумента к уравнению третьего порядка и построение его единственного решения определяют актуальность нашей работы. Рассматриваемое в статье уравнение является линейным, неоднородным и имеет следующий вид:

$$u_t(t, x) + a(t, x)u_x(t, x) - u_{txx}(t, x) - a(t, x)u_{xxx}(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

$$(t, x) \in G_2(T) = [0, T] \times R.$$

Заданные функции в (1) непрерывные и ограниченные функции.

Рассмотрим (1) с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (2)$$

В работе получено единственное решение в явном виде.

Ключевые слова: Частная производная, дифференциальное уравнение, решение, единственное, метод дополнительного аргумента, начальное условие.

2020 Mathematics Subject Classification: 517.928

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аширбаева А.Ж. Построение решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром, *Поиск, Серия естественных и технических наук*, 2 (2013), 248–253.

[2] Аширбаева А.Ж. Построение решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с невырожденным ядром, *Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук*, 4 (2001), 68–72.

[3] Мамбетов Ж.И. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром, *Вестник ОшГУ*, 4 (2017), 113–116.

[4] Садыкова, Г.К. Построение решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, *Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана*, 7 (2021), 10–13.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ИСКУССТВЕННО ВЫДЕЛЕННУЮ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНУЮ ОБЛАСТЬ

И. МИРЗАЕВ¹, С.М ГАЙНАЗАРОВ²

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

¹Ташкентский архитектурно-строительный университет, Ташкент, Узбекистан

²Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

ibrakhim.mirzaev@gmail.com

При численном моделировании поведения подземных объектов в безграничной грунтовой среде на волновые воздействия требуется ограничение исследуемой области. При этом возникает необходимость обеспечения не отражения как внешних, так и внутренних волн на границах исследуемой области. В работе [1] впервые предложены формулы зависимости напряжений от скоростей частиц для плоских волн на искусственных границах. Следует отметить, что эти условия и их модификации являются приближенными условиями на границах. В работе [2] представлены точные условия прозрачности границ для плоских упругих волн. В настоящем исследовании впервые выведены точные граничные условия прозрачности в случае падающей плоской продольной волны на искусственно ограниченный параллелепипед.

Пусть на параллелепипед, выделенной из неограниченной области, падает плоская упругая волна, линия фронта которой параллельна нижней грани.

Распространение волны в указанной области определяется слабой формой уравнения движения [2]. Применяя метод частичной дискретизации конечными элементами, получим известную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Начальные условия нулевые.

Рассмотрим падающую на нижнюю грань параллелепипеда плоскую волну, скорости частиц которой задается в виде нарастающей гармонической волны с заданной частотой в виде $v_p = f(t_p)$, где f —заданная функции для продольной волны, t_p —время, представляющее разность между текущим временем и временем появления продольной волны в точке обзора, который зависит от координат точки вдоль искусственных границ.

Полная скорость частиц на искусственной границе области состоит из суммы скоростей частицы в заданной волне v , пришедшей к границе, и идущей к границе изнутри области. Выражая напряжения на границах области через скорости частиц и деформации и учитывая, что напряжения в волне на границах состоят из суммы двух напряжений: в падающей волне и возникшей внутри расчетной области, получим следующие условия на гранях параллелепипеда.

На нижней грани для усилия на единичной площади имеем:

$$P_{zz} = -c_p \rho \dot{u}_z + 2c_p \rho v_p - \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad P_{xz} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{yz} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (1)$$

аналогично, на верхней грани имеют место:

$$P_{zz} = -c_p \rho \dot{u}_z + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad P_{xz} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{yz} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (2)$$

на левой грани для усилия на единичной площади имеем:

$$P_{xx} = -c_p \rho \dot{u}_x - \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} - \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{zx} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad P_{yx} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (3)$$

на правой грани:

$$P_{xx} = -c_p \rho \dot{u}_x + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{zx} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad P_{yx} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (4)$$

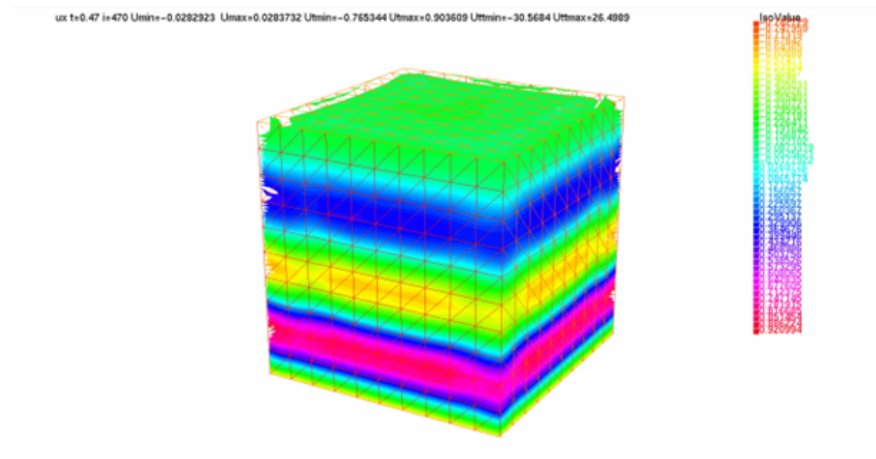


Рис. 1: Распространение продольной плоской волны в параллелепипедной области при $t=0.47$ с.

на передней грани для усилия на единичной площади имеем:

$$P_{yy} = -c_p \rho \dot{u}_y - \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{xy} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{zy} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad (5)$$

на задней грани:

$$P_{yy} = -c_p \rho \dot{u}_y + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{xy} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{zy} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad (6)$$

где c_p, c_s – скорости частиц продольных и поперечных волн в грунтовой среде; ρ – плотность материала; u_x, u_y, u_z – перемещения на границе области. Для решения задачи с граничными условиями (1)–(6) применяется неявный конечно-разностный метод Бате.

Рассмотрим задачу распространения плоской продольной упругой волны в прямоугольной области $100 \times 100 \times 100$ м, которая представляет однородный грунт со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга $E=150$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и плотность $\rho = 2000$ кг/м³. В расчетах приняты следующие значения параметров падающей волны: $A=1$ м/с, $t_s=0.5$ с, $\omega=3$ Гц. Динамический расчет проводился с шагом интегрирования 0.001 с в течение времени $t=2$ с. На рисунке время кадра взята при $t=0.47$ с.

Из рисунка видно, что волна проходит не отражаясь от границ области даже при грубом разбиении на конечные элементы.

Получены точные условия на прозрачных границах, когда заданная плоская волна поступает в искусственно ограниченную параллелепипедную область. Численно решена задача и приведена картина результатов расчета, показывающие хорошее качество условий прозрачности на искусственных границах. Результаты исследования показали правильность предложенной модели и адекватность распространения волны в пространственной области.

Ключевые слова: упругая среда, обделка, прозрачные границы, распространение волны, метод конечных элементов, метод интегрирования Бате.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lysmer J., Kuhlemeyer L. *Finite Dynamic Model for Infinite Media.*, *Engineering Mechanics Division, ASCE*, **4**, (1969), 859-887.

[2] Mirzaev I., Gaynazarov S. Impact of Plane Waves on Lining in Elastic Medium With Transparent Artificial Boundary. *WSEAS TRANSACTIONS on APPLIED and THEORETICAL MECHANICS*, **20** (2025), 31–40.

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛОРЕНЦА В КЛАССАХ ЛИПШИЦА

А.Б. МУКАНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан

mukanov.askhat@gmail.com

Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Через $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, обозначим класс Липшица

$$\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T}) : \omega(f, \delta) = O(\delta^\alpha), \delta > 0\},$$

где

$$\omega(f, \delta) = \sup_{0 < |h| \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}$$

– модуль непрерывности функции f .

В работе [3] Лоренц доказал следующую теорему.

Теорема 1. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются неотрицательными и невозрастающими. Тогда

$$f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}) \iff a_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

и

$$g \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}) \iff b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

В работе [1] Дьяченко и Тихонов распространили теорему Лоренца на класс обобщенно монотонных последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\gamma]}^{[\gamma n]} |a_k|,$$

для всех $n \geq 1$ и некоторых постоянных $C > 0$ и $\gamma > 1$. Основная особенность их результата состоит в том, что они не требуют неотрицательность коэффициентов рядов.

Мы получили непериодические аналоги результатов Дьяченко и Тихонова для классического преобразования Фурье:

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{iyx} dy, \quad f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Определение 2. Будем говорить, что комплекснозначная функция F , заданная на $\mathbb{R}_+$ и являющаяся функцией локально ограниченной вариации, является обобщенно монотонной, или $F \in \text{GM}$ [2], если существуют постоянные $C > 0$ и $\gamma > 1$ такие, что для любого $x > 0$ выполняется неравенство

$$\int_x^{2x} |dF(t)| \leq \frac{C}{x} \int_{\frac{x}{\gamma}}^{\gamma x} |F(t)| dt.$$

Теорема 3. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

(i) Если f – четная функция и $\widehat{f}|_{\mathbb{R}_+} \in \text{GM}$. Тогда для любого $0 < \alpha \leq 1$

$$f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}) \iff |\widehat{f}(t)| = O\left(\frac{1}{|t|^{\alpha+1}}\right), \quad t \neq 0.$$

(ii) Если f – нечетная функция и $\widehat{f}|_{\mathbb{R}_+} \in \text{GM}$. Тогда для любого $0 < \alpha < 1$

$$f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}) \iff |\widehat{f}(t)| = O\left(\frac{1}{|t|^{\alpha+1}}\right), \quad t \neq 0.$$

Более того удалось распространить теорему 3 на обобщенные классы Липшица, в которых мажоранты удовлетворяют условиям Бари-Стечкина.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488596).

Ключевые слова: преобразование Фурье, обобщенная монотонность, модули гладкости, классы Липшица.

2020 Mathematics Subject Classification: 26A16, 26A48, 42A38

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dyachenko M., Tikhonov S. Smoothness properties of functions with general monotone Fourier coefficients, *J. Fourier Anal. Appl.*, **24**:4 (2018), 1072–1097.

[2] Lifyand E., Tikhonov S. A concept of general motonicity and applications, *Math. Nachr.*, **284**:8-9 (2011), 1083–1098.

[3] Lorentz G. Fourier-koeffizienten und funktionenklassen, *Math. Z.*, **51** (1948), 135–149.

ТӨРТІНШІ РЕТТІ ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ТЕҢДЕУ ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫ

У.А. МУРАТБЕКОВА¹, Ә.М. СӘРСЕНБІ²

^{1,2}М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан
uldan1986@mail.ru

Келесі Дирихле шеттік есебін қарастырайық:

$$u^{(4)}(-x) = \lambda u(x) + f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(1) = 0, \quad u(-1) = 0, \quad u''(1) = u''(-1) = 0 \quad (2)$$

Берілген (1),(2) Дирихле есебінің Грин функциясын құру үшін алдымен біртекті емес теңдеуінің дербес шешімін табамыз.

$$u^{(4)}(-x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \quad (3)$$

ол үшін (3) теңдеуінің сызықтық тәуелсіз шешімдерін жазамыз

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\rho x} + e^{-\rho x}, \\ u_2(x) &= e^{\rho i x} + e^{-\rho i x}, \\ u_3(x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x}, \\ u_4(x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x}. \end{aligned}$$

мұндағы $\sqrt[4]{\lambda} = \rho$.

Теорема 1. Егер λ саны (3),(2) біртекті шеттік есебінің меншікті мәні емес болса және $f(x) \in C[-1, 1]$, онда (1),(2) біртекті емес шеттік есебінің жалғыз шешімі бар және мына-

дай түрде болады:

$$\begin{aligned}
 u(x) = \frac{1}{32\rho^3} & \left\{ -\frac{2(e^{\rho x} + e^{-\rho x})}{e^\rho + e^{-\rho}} \int_{-1}^1 [(e^\rho - e^{-\rho})(e^{\rho t} + e^{-\rho t})] f(t) dt \right. \\
 & - \frac{2(e^{\rho i x} + e^{-\rho i x})}{e^{\rho i} + e^{-\rho i}} \int_{-1}^1 [i(e^{\rho i} - e^{-\rho i})(e^{\rho i t} + e^{-\rho i t})] f(t) dt \\
 & + \frac{(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x})}{(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho})} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{2}(1+i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho} \right) \right. \\
 & \quad \left. \cdot (e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t}) \right] f(t) dt \\
 & + \frac{(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x})}{(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho})} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{2}(1-i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho} \right) \right. \\
 & \quad \left. \cdot (e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t}) \right] f(t) dt \left. \right\} + g_0(x)
 \end{aligned}$$

$$g_0(x, t, \lambda) = \frac{1}{32\rho^3} \left\{ \begin{aligned}
 & -2(e^{\rho x} + e^{-\rho x})(e^{\rho t} - e^{-\rho t}) - 2i(e^{\rho i x} + e^{-\rho i x})(e^{\rho i t} - e^{-\rho i t}) \\
 & + \sqrt{2}(1+i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} \right) \\
 & \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} \right) \\
 & + \sqrt{2}(1-i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} \right) \\
 & \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} \right), \\
 & \quad -1 \leq t < -x \\
 & 2(e^{\rho x} - e^{-\rho x})(e^{\rho t} + e^{-\rho t}) + 2i(e^{\rho i x} - e^{-\rho i x})(e^{\rho i t} + e^{-\rho i t}) \\
 & - \sqrt{2}(1+i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} \right) \\
 & \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} \right) \\
 & - \sqrt{2}(1-i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} \right) \\
 & \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} \right), \\
 & \quad -x \leq t \leq x \\
 & 2(e^{\rho x} + e^{-\rho x})(e^{\rho t} - e^{-\rho t}) + 2i(e^{\rho i x} + e^{-\rho i x})(e^{\rho i t} - e^{-\rho i t}) \\
 & - \sqrt{2}(1+i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho x} \right) \\
 & \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho t} \right) \\
 & - \sqrt{2}(1-i) \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho x} \right) \\
 & \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\rho t} \right), \\
 & \quad x < t \leq 1
 \end{aligned} \right.$$

ТӨРТІНШІ РЕТТІ ТАЗА ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ӨЗ ӨЗІНЕ ТҮЙІНДЕС ЕМЕС ОПЕРАТОРДЫҢ БАЗИСІ

Н.М. НАРБЕКОВА

¹М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан
nuraimnarbekova@gmail.com

Төртінші ретті таза инволюциялы дифференциалдық теңдеу берілген.

$$u^{(4)}(-x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

$$u'(-1) = u'(1), \quad u(-1) = 0, \quad u'''(-1) = u'''(1), \quad u''(-1) = 0. \quad (2)$$

(1), (2) спектралдық есептің меншікті мәндері:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{k1} = (\pi k)^4, \quad \lambda_{k2} = -(\pi k)^4, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Осы меншікті мәндерге сәйкес меншікті функциялар:

$$u_{k0}(x) = x + 1, \quad (3)$$

$$u_{k1}(x) = \cos(\pi kx) - \frac{(-1)^k(i-1)}{2(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi k} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi k})} (e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi kx} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi kx}) + \quad (4)$$

$$+ \frac{(-1)^k(1+i)}{2(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi k} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi k})} (e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi kx} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi kx}), \quad (5)$$

$$u_{k2}(x) = \sin(\pi kx). \quad (6)$$

$$(7)$$

(1), (2) спектралдық есепке түйіндес оператордың спектралдық есебі былай жазылады.

$$v^{(4)}(-x) = \bar{\lambda} v(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$v(-1) = v(1), \quad v'(-1) = 0, \quad v''(-1) = v''(1), \quad v'''(-1) = 0.$$

Түйіндес спектралдық есептің меншікті функциялары:

$$v_{k0}(x) = \frac{1}{2}, \quad (8)$$

$$v_{k1}(x) = \cos(\pi kx), \quad (9)$$

$$v_{k2}(x) = \sin(\pi kx) + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi k} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi k})} (e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi kx} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\pi kx}) - \quad (10)$$

$$- \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi k} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi k})} (e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi kx} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\pi kx}). \quad (11)$$

$$(12)$$

Теорема 1. Берілген (1), (2) өз өзіне түйіндес емес спектралдық есебінің меншікті функциялары (3) $L_2(-1, 1)$ кеңістігінде Рисс базисін құрайды.

Кілтті сөздер: меншікті функция, Рисс базисі, инволюция

2020 Mathematics Subject Classification: 34K08; 35S16; 39B22

ТЕОРЕМА ЭФРОСА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА С ЯДРОМ РАЙТА

М.Т. ОМАРОВ¹, Б.К. ШАЯХМЕТОВА²

^{1,2}КарНИУ академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

madiomarovt@gmail.com

Пусть $0 < \beta < 1, a > 0, \mu \in \mathbb{R}$. Функция Райта задаётся рядом

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\lambda k + \mu)}, \quad \lambda > -1, z \in \mathbb{C}.$$

Определим для $x \geq 0, t > 0$ функцию $w_{\mu}(x, t) = t^{\mu-1} W_{-\beta, \mu}(-\frac{x}{t^{\beta}})$. При фиксированном $x \geq 0$ функция $t \mapsto w_{\mu}(x, t)$ является оригиналом Лапласа функции $s \mapsto s^{-\mu} e^{-xs^{\beta}}$ в правой полуплоскости $\Re s > 0$, то есть $\int_0^{\infty} e^{-st} w_{\mu}(x, t) dt = s^{-\mu} e^{-xs^{\beta}}, \quad \Re s > 0$. Подобные пары Лапласа и их применение в рамках теоремы Эфроса подробно обсуждаются в работах, посвящённых функциям Райта второго рода и субординационным представлениям.

Для функций f , для которых интеграл имеет смысл, положим

$$(\mathcal{T}_{a, \mu} f)(t) = \int_0^t f(\tau) w_{\mu}(a\tau, t - \tau) d\tau, \quad t > 0$$

Оператор $\mathcal{T}_{a, \mu}$ является оператором Вольтерра (интегрирование по τ ведётся по промежутку $[0, t]$). В отличие от свёрточных операторов $(f * k)(t) = \int_0^t f(\tau) k(t - \tau) d\tau$, здесь ядро зависит от пары (τ, t) не только через разность $t - \tau$, но также через множитель $a\tau$. Таким образом, $\mathcal{T}_{a, \mu}$ относится к классу интегральных операторов Вольтерра несвёрточного (нестационарного) типа.

Обозначим $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s), G(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{T}_{a, \mu} f\}(s)$. Тогда при стандартных условиях существования преобразования Лапласа (например, при наличии экспоненциальной оценки f и допустимости применения теоремы Фубини) справедлива формула

$$G(s) = s^{-\mu} F\left(s + as^{\beta}\right), \quad \Re s > 0$$

где степень s^{β} понимается по главной ветви в правой полуплоскости. Эта формула реализует в области Лапласа операцию композиции $F(\cdot) \mapsto F(q(\cdot))$ с $q(s) = s + as^{\beta}$ и поэтому естественно интерпретируется как частный случай схемы Эфроса для составных образов.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (гранты № AP23488729, AP23488740).

Ключевые слова: преобразование Лапласа, теорема Эфроса, оператор Вольтерра, функция Райта.

2020 Mathematics Subject Classification: 44A10, 44A35, 35K05

ЛИТЕРАТУРА

[1] Górska K., Horzela A. *Subordination and memory dependent kinetics in diffusion and relaxation phenomena*. Fractional Calculus and Applied Analysis, 26 (2023), 480–512.

DOI: 10.1007/s13540-023-00141-8.

[2] Apelblat A., Mainardi F. *Applications of the Efros Theorem to the Wright Functions of the Second Kind and Other Results*. Lecture Notes of TICMI, 21(1) (2020), 9–28.

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Н. ОСПАНОВ

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

kordan.ospanov@gmail.com

Пусть $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -\pi < y < \pi\}$. Мы рассматриваем следующую задачу

$$-u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + q(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, -\pi) = u(x, \pi), u_y(x, -\pi) = u_y(x, \pi), \quad (2)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ - непрерывно дифференцируемые, $q(x, y)$ - непрерывная функции, а $f \in L_2(\Omega)$.

Обозначим через L замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора $L_0u = -u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + qu$, определенного на множестве $C_{0,\pi}^{(2)}(\Omega)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, финитных по x и удовлетворяющих условиям (2). Решением задачи (1), (2) назовем такой элемент $u \in D(L)$, что $Lu = f$.

Коэффициенты уравнения (1) вообще говоря не ограничены. Целью настоящей работы является поиск связей между коэффициентами (1), при которых задача (1), (2) корректно разрешима.

Эллиптические уравнения и системы с неограниченными коэффициентами интенсивно изучаются из-за их применений в стохастическом анализе, распространении колебаний в средах с сопротивлением и финансовой математике (см. V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner, S.V. Shaposhnikov, Fokker-Planck-Kolmogorov equations. 207 (2015), Providence, RI: AMS). Здесь, в частности, интересен случай, когда рост на бесконечности коэффициентов при первых производных искомой функции в уравнении не зависят от младшего коэффициента. Вопросы корректности и регулярности решения уравнения (1) и ее обобщений, когда a и b имеют линейный рост на бесконечности, исследованы S. Fornaro и L. Lorenzi (2007), M. Hieber и O. Sawada (2005). А когда они имеют рост порядка $|x| \ln |x|$, были изучены G. Metafunne, D. Pallara and V. Vespri (2005), M. Hieber, L. Lorenzi et al. (2009). Однако открытым остался вопрос: можно ли найти классы корректных эллиптических уравнений вида (1), когда коэффициенты a и b имеют другой порядок роста, чем $|x| \ln |x|$ и не контролируются потенциалом q .

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488049).

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, неограниченный коэффициент, обобщенное решение, корректная разрешимость.

2020 Mathematics Subject Classification: 35B65

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФфуЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

А.В. ПСХУ

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} -$$

оператор дробного дифференцирования Джрбашьяна–Нерсесяна, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}, \quad \gamma_k \in (0, 1], \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

порядка $\alpha \in (0, 2)$,

$$\alpha := \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m - 1,$$

определяемый равенством [1]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} := D_{0y}^{\gamma_m-1} D_{0y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0}.$$

Здесь D_{0y}^β — дробная производная (интеграл) Римана–Лиувилля порядка β по y [2].

Пусть

$$\Omega := \{(x, y) : z_1(y) < x < z_2(y), \quad 0 < y < T\},$$

где $z_1(y)$ и $z_2(y)$ — заданные непрерывные на отрезке $[0, T]$ функции, причем $z_1(y)$ не убывает, а $z_2(y)$ не возрастает, и имеет место неравенство $z_1(y) < z_2(y)$ для всех $y \in [0, T)$, $z_1(y) \leq z_2(y)$. Далее обозначаем $a := z_1(0)$ и $b := z_2(0)$.

В докладе обсуждается следующая задача: найти решение уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x, y) = \tau_k(x), \quad x \in (a, b), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

и нелокальным условиям

$$\int_0^y u(z_j(y), t) dt = h_j(y), \quad y \in (0, T), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где $\tau_k(x)$ и $h_j(y)$ — заданные непрерывные функции.

Заметим, что если $z_1(y)$ и $z_2(y)$ являются постоянными функциями, то Ω — прямоугольник, а рассматриваемая задача эквивалентна первой краевой задаче для уравнения (1) [3]. Для функций $z_1(y)$ и $z_2(y)$, отличных от постоянных, условия (2) представляют собой нелокальные условия по временной переменной y . В работе, в частности, показано, что условия гладкости на функции $z_1(y)$ и $z_2(y)$ обеспечивают однозначную разрешимость задачи (1)–(3).

Финансирование: Исследование выполнено при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488729).

Ключевые слова: дробная производная, оператор Джрбашьяна–Нерсесяна, нелокальная по времени задача, диффузионно-волновое уравнение, задача в нецилиндрической области

2020 Mathematics Subject Classification: 26A33, 35R11, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джрбашьян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Изв. АН Арм. ССР*, **3:1** (1968), 3–29.
- [2] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва (2003).
- [3] Псху А.В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81:6** (2017), 158–179.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ЛИНИЕЙ НАБЛЮДЕНИЯ

М.И. РАМАЗАНОВ¹, А.О. ТАНИН²

^{1,2}КарНИУ академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

ramamur@mail.com

В области $Q = \{(x, t), x > 0, t > 0\}$, найти решение нелокальной задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u(0, t) = \lambda \cdot u(\alpha(t), t) \\ \alpha(0) &= 0, \quad \lambda = \text{Const.}\end{aligned}$$

где функция $\alpha(t)$ задаёт подвижную линию наблюдения.

Актуальность исследования связана с тем, что нелокальные условия отражают процессы с обратной связью и запаздыванием, возникающие в задачах теплопереноса, управления и математической физики. В отличие от классических граничных условий Дирихле или Неймана, значение решения на границе определяется через его значение во внутренней точке области, причём эта точка перемещается вдоль кривой $x = \alpha(t)$. Особенность постановки заключается в том, что кривая проходит через начало координат, что приводит к вырождению нелокального условия при $t = 0$, и требует специального анализа согласованности начальных данных.

Основная цель работы - построение аналитического представления решения и исследование влияния функции $x = \alpha(t)$ на корректность задачи. Используется метод фундаментального решения уравнения теплопроводности и интегральные представления. Нелокальное условие приводит к особому интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода относительно следа $u(0, t)$, ввиду условия $\alpha(0) = 0$.

Существенную роль играет величина параметра λ : при $|\lambda| < 1$ оператор нелокального условия является сжимающим, что обеспечивает устойчивость решения; при больших значениях $|\lambda|$ возникают эффекты усиления обратной связи. В отличие от задач с фиксированной точкой наблюдения, подвижная линия приводит к дополнительной нелокальности по времени и изменяет структуру теплового потока через границу.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов теплопереноса с распределённой обратной связью, а также при исследовании нелокальных задач для параболических уравнений более общего вида.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (гранты № AP23488729, AP23488740).

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальное граничное условие, подвижная линия, интегральное представление, задача Вольтерра, корректность.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 45D05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nakhushev A.M. *Loaded Equations and Their Applications*, Nauka, Moscow (2012).
- [2] Dzhanaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations*, Gylm, Almaty (2010).

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

А.Б. РАСУЛОВ

НИУ МЭИ, кафедра Высшей математики, Москва, Россия

rasulzoda55@gmail.com

Хорошо известно, насколько важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек и газовую динамику.

Многие результаты исследований обобщенных аналитических функций, полученные в скалярном случае, были обобщены на системы с несколькими неизвестными функциями в случае регулярных коэффициентов (см., например, [2], [4]).

Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими неизвестными функциями, младшие коэффициенты которых имеют полярные сингулярности, изучены мало. Понятие сверхсингулярных особенностей введено в монографии Н. Р. Раджабова [3].

Настоящая работа посвящена представлению общего решения систем эллиптических уравнений в области D на плоскости с особенностями в младших коэффициентах. Главной частью этих систем уравнений является оператор Коши–Римана. Носителями особенностей служит множество $l = \{z : \rho(z) = 0\}$, состоящее как из изолированных особых точек, так и из некоторых линий. Это представление используется для исследования краевых задач.

Пусть D — область, содержащая начало координат и ограниченная границей $\Gamma \in C^{1,\mu}$, $0 < \mu < 1$, ориентированной против часовой стрелки, и пусть $D_0 = D \setminus \{l\}$.

В стандартной записи $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ в области D_0 рассмотрим систему эллиптических уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right)u + Au + \frac{1}{\rho_1}B\bar{u} = F, \quad (1)$$

где a — комплексное число и функция $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$ — скалярные величины, и для краткости через $\rho(z)$ обозначено одно из ее значений :

$$\rho(z) = \{\bar{z}|z|^{\alpha-1}; |z - \bar{z}|^\alpha; |R - |z||^\alpha\}, \quad \text{где } \alpha \geq 1. \quad (2)$$

Также в (1) $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ — искомый, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ — известный вектор функции, а ρ_1 также может принимать одно из значений ρ .

Относительно обратимых матриц $A \equiv A_{n \times n}$ и $B \equiv B_{n \times n}$ система (1) изучается в двух случаях: 1) когда все элементы этих заданных матриц комплексные числа;

2) когда все элементы этих заданных матриц аналитические функции комплексного переменного z .

В настоящей работе для систем линейных уравнений Коши–Римана с сильной полярной особенностью в младших коэффициентах (1) найдены явные интегральные представления и на основе которых получено решение задачи типа Дирихле. Полученные интегральные представления дают возможность свести граничную задачу типа Римана–Гильберта к известной аналогичной задаче теории аналитических функций.

Ключевые слова: система уравнений Коши–Римана, сильные особенности в коэффициентах, оператор Помпейю–Векуа, жордановая матрица, задача Дирихле, задача типа Римана–Гильберта.

2020 Mathematics Subject Classification: 30E20

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа М.: Наука, Главное издательство физико-математической литературы, 1988. — 510 с.
- [2]. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. И. А.П. Солдатов // Совр. Проблемы математики. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.
- [3]. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.
- [4]. Виноградов В.С., Краевая задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости, Дифференциальные уравнения, 1971, Т. 7, Вып. 8, 1440–1448

О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

А.В. РОГОВОЙ

Университет Мирас, Шымкент, Казахстан

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

startup@miras.edu.kz

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ дугой окружности

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, y > 0 \right\},$$

а при $y < 0$ — характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ однородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$sgny u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1)$$

Задача S. Найти в Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\delta} = 0, \quad (2)$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

причем должны выполняться следующие условия “склеивания” решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \quad (4)$$

Исходя из определения кривой σ_δ , обозначим угол подхода кривой σ_δ к линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$ следующим образом

$$\gamma_\delta = \operatorname{arcctg} 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi. \quad (5)$$

Следуя методам работ [1]-[2], доказана следующая теорема.

Теорема 1. При $\alpha \neq \pm 1$ существует бесконечное множество разрывных решений задачи S (задачи (1)–(4)), определяемых равенством

$$u_k(x, y) = \begin{cases} C \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\mu_k} + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\mu_k} \right), & y > 0, \\ C \left(\frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\mu_k} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{1}{1-x+y} - 1 \right)^{\mu_k} \right), & y < 0. \end{cases} \quad (6)$$

где $C = \text{const}$, $\mu_k = \frac{3\pi(1+4k)}{4\gamma_\delta}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488701).

Ключевые слова: разрывное решение, краевая задача со смещением, уравнение смешанного типа, краевое условие, условие согласования.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35M10, 35N30, 33C05

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rogovoy A.V. Properties of solutions of the tricom problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation at corner points, *Differential Equations*, **49**:12 (2013), 1650–1654.

[2] Роговой А.В. Существование нетривиального разрывного решения однородной задачи Трикоми и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Известия НАН РК. Серия физико-математическая*, **3** (2010), 126–129.

ДВУХТОЧЕЧНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ. АНАЛИЗ СЛУЧАЕВ

Н.Н. САЙРАМ¹, М.А. САДЫБЕКОВ²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

²Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

¹nurgul.sairam02@mail.ru, ²sadybekov@math.kz

Рассматривается спектральная задача для оператора двукратного дифференцирования

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

с линейным вхождением спектрального параметра в краевое условие

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$Y_1(y) + \lambda Y_2(y) = 0, \quad (3)$$

где $Y_j(y)$ -линейные формы вида

$$Y_j(y) = a_{j1}y'(0) + a_{j2}y'(1) + a_{j3}y(0) + a_{j4}y(1).$$

Спектральные свойства краевых задач для уравнения (1) в случае, когда в краевых условиях отсутствует спектральный параметр, полностью исследованы и эти результаты хорошо известны. Наиболее полно все случаи разобраны в [1]-[2].

В настоящей работе исследованы спектральные свойства задачи (1)-(3) с линейным вхождением спектрального параметра в одно краевое условие. В терминах коэффициентов краевого условия (3) выделены регулярные и нерегулярные краевые условия. Выделены и описаны все случаи поведения собственных значений и собственных функций.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23485279).

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, нелокальные краевые условия, спектральный параметр в краевом условии, спектральные свойства.

2020 Mathematics Subject Classification: 34L05, 34L10, 34L15

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . Analysis of Cases, *J. Math. Anal. And Appl.*, **146**:1 (1990), 148-191.

[2] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . Spectral Properties, *J. Math. Anal. And Appl.*, **141**:1 (1989), 538-558.

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕННИ-ЛЮКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Б.А. САЙФУЛЛАЕВА¹, Б.Х. ТУРМЕТОВ²

^{1,2}Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Ясави, Туркестан,
Казахстан

¹bibikhadisha.saifullaeva2024@ayu.edu.kz, ²batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Пусть $Q_T = \{(t, x) : 0 < t < T, 0 < x < p\}$, $T, p > 0$. Для любых действительных чисел a_0, a_1 и функции $v(x) \in L_2[0, p]$ введем оператор

$$\ell_a[v](x) = a_0 v(x) + a_1 v(p - x).$$

Рассмотрим в области Q_T следующую задачу.

Задача D. Найти функцию $u(t, x)$ удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\ell_a \left[\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right] \right) = f(t, x), (t, x) \in Q_T,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), 0 \leq x \leq p,$$

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = u(t, p) = u_{xx}(t, p) = 0, 0 \leq t \leq T.$$

В классическом случае аналогичные задачи исследованы в работе [1].

Сформулируем основное утверждение относительно задачи D.

Теорема. Пусть выполняются условия: $a_0 \pm a_1 \leq 0$, $\varphi(x) \in C^4[0, p]$, $\psi(x) \in C^3[0, p]$, $f(t, x) \in C_{t,x}^{0,2}(\bar{Q}_T)$ и

$$\varphi(0) = \varphi(p) = \varphi''(0) = \varphi''(p) = 0, \psi(0) = \psi(p) = 0,$$

$$f(t, 0) = f(t, p) = 0, 0 \leq t \leq T.$$

Тогда классическое решение $u(t, x)$ задачи D существует, единственно и представляется в виде ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k \cos(\sqrt{\mu_k} t) + \frac{\psi_k}{\sqrt{\mu_k}} \sin(\sqrt{\mu_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\mu_k}(1 - \lambda_k)} \int_0^t f_k(\tau) \sin(\sqrt{\mu_k}(t - \tau)) d\tau \right] X_k(x),$$

где

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{k\pi}{p} x, \mu_k = \left(\frac{k\pi}{p} \right)^2, k \geq 1, \varphi_k = (\varphi, X_k), \psi_k = (\psi, X_k), f_k(t) = (f, X_k).$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

Ключевые слова: Уравнение Бенни-Люка, начально-краевая задача, существование, единственность классического решения.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A02, 35L20, 35R10

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мегралиев Я.Т., Велиева Б.К. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни-Люка с нелокальными условиями, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:2 (2019), 166–182.

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУХМЕРНОЙ СИСТЕМЕ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ

А. САКАБЕКОВ¹, С. МАДАЛИЕВА²

^{1,2}*Satbayev University, Алматы, Казахстан*

При расчете гидродинамических характеристик движущего в жидкости тела или аэродинамических характеристик летательного аппарата в высокоскоростном потоке разреженного газа в уравнение Больцмана надо внести слагаемое, зависящее от скорости перемещения тела или движения летательного аппарата, а условие на подвижной границе должно содержать параметр, зависящий от температуры поверхности тела или летательного аппарата. Для определения скорости перемещения и температуры поверхности движущего в жидкости тела рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + U_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = J(f, f), \quad t \in (0, T), \quad x = (x_1, x_3) \in G, \quad c \in \mathbb{R}_c^3.$$

$$|f|_{t=0} = f_0(x, c), \quad (x, c) \in G \times \mathbb{R}_c^3,$$

$$f(t, x_{\partial G}, c) = \beta f(t, x_{\partial G}, c - 2(c, n_{\partial G}) n_{\partial G}) + (1 - \beta) \exp\left(-\frac{c^2}{2R}\right), \quad (n_{\partial G}, c) > 0, \quad x_{\partial G} \in \partial G. \quad (1)$$

Здесь $f \equiv f(t, x, c)$ — функция распределения частиц в пространстве по скорости и времени; $f_0 \equiv f_0(x, c)$ — распределение частиц в начальный момент времени (заданная функция);

$$J(f, f) \equiv \int_{\mathbb{R}_c^3} \int_{S^2} (f(c')f(c'_1) - f(c)f(c_1)) \sigma(\cos \chi) dc_1 dn$$

— нелинейный оператор столкновений, записанный для максвелловских молекул; G — ограниченная область в двухмерном пространстве; $n_{\partial G}$ — внешний единичный нормальный вектор границы ∂G области G ; $c = v - U$, $U = (U_1, U_3)$ — скорость движения погруженного в жидкость тела.

Уравнение Больцмана — сложное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Построить точное аналитическое решение этого уравнения невозможно. Поэтому применяют различные методы для построения приближенного решения уравнения Больцмана. Для построения приближенного решения задачи (1) применим моментный метод [1]–[3]. При этом получим начально-краевую задачу для системы уравнений в частных производных относительно моментов функции распределения частиц при соответствующих макроскопических граничных условиях. Если разложение функции распределения частиц в ряд Фурье около Максвелловского распределения по полной ортогональной системе функций в пространстве скоростей подставим в уравнение Больцмана и проинтегрируем по пространству скоростей, то уравнение Больцмана будет эквивалентно бесконечной системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно коэффициентов разложения. На практике ограничиваются изучением конечной системы дифференциальных уравнений. При этом возникают следующие взаимосвязанные вопросы: (1) как оборвать бесконечную систему дифференциальных уравнений? (2) как аппроксимировать микроскопическое граничное условие для функции распределения частиц? (3) будет ли полученная задача для конечной системы уравнений корректной, т.е. существует ли решение новой задачи, и если решение существует, то какому пространству оно принадлежит? В данной работе мы приведем ответы на вышеперечисленные вопросы, а именно, будет предложен один способ обрыва бесконечной системы дифференциальных уравнений, будет аппроксимировано микроскопическое граничное условие Максвелла и будет доказана корректность начально-краевой задачи для конечной системы дифференциальных уравнений в частных производных [4].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коган М.Н. *Динамика разряженного газа*. Наука, М. (1967), 440 с.
 [2] Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана*. Мир, М. (1978), 496 с.
 [3] Сакабеков А. *Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана*. Ғылым, Алматы (2002), 226 с.
 [4] Auzhan Sakabekov, Yerkanat Auzhani, Shinar Akimzhanova. Two-Dimensional System of Moment Equations and Macroscopic Boundary Conditions Depending on the Velocity of Movement and the Surface Temperature of a Body Moving in Fluid, *Mathematics*, **12** (2024), 1491. DOI: 10.3390/math12101491.

ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ БЕЙЛОКАЛ АНАЛОГЫ ҮШІН НАВЬЕ ТИПІНДЕГІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

А.Ә. ШАЛХАР

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

aynur131121@gmail.com

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ — бірлік шар, ал $\partial\Omega$ — оның шекарасы (бірлік сфера) болсын. $S_1, S_2, \dots, S_l$ — өзара коммутативті нақты симметриялы матрицалар, $1 \leq l \leq n$ және $S_i^2 = E$, мұндағы E — бірлік матрица. a_i — нақты сандар, Δ — Лаплас операторы. Келесі операторларды енгізейік:

$$\ell_a[u](x) = \sum_{i=0}^{2^l-1} a_i u(S_l^{i_1} \dots S_1^{i_1} x), L_a[u](x) = \ell_a[(-\Delta)^m u](x) = \sum_{i=0}^{2^l-1} a_i (-\Delta)^m u(S_l^{i_1} \dots S_1^{i_1} x), m \geq 1.$$

N есебі. $C^{2m}(\Omega) \cap C^{2(m-1)}(\bar{\Omega})$ класына тиісті және келесі шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу керек:

$$L_a u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\ell_{\mathbf{d}^{(k)}} [\Delta^k u](x) = g_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Мұндағы $\mathbf{d}^{(k)} = (d_0^{(k)}, d_1^{(k)}, \dots, d_{2^l-1}^{(k)})$ — берілген тұрақты векторлар.

Классикалық полигармониялық теңдеу үшін Навье есебі [1]-жұмыста зерттелген. N есебі $n = 2$ және $a_0 = 1, a_j = 0 (j = 1, \dots, 2^l - 1)$ дербес жағдайында [2]-жұмыста, ал $m = 1, c_0 = 1, c_j = 0 (j = 1, \dots, 2^l - 1)$ болғанда [3]-жұмыста қарастырылған.

(1)-(2) есебі үшін келесі негізгі нәтиже орынды:

Теорема 1. Егер және $\sigma_p(a) = \sum_{i=0}^{2^l-1} (-1)^{p \cdot a} a_i \neq 0$ және $\sigma_p(\mathbf{d}^{(k)}) = \sum_{i=0}^{2^l-1} (-1)^{p \cdot i} d_i^{(k)} \neq 0$ ($p = 0, \dots, 2^l - 1; k = 0, \dots, m-1$) шарттары орындалса, сонымен қатар $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $g_0(x) \in C(\partial\Omega)$ және $g_k(x) \in C^{1+\delta}(\partial\Omega)$ ($\delta > 0$) болса, онда N есебінің $C^{2m}(\Omega) \cap C^{2(m-1)}(\bar{\Omega})$ класында жалғыз шешімі бар және ол келесі түрде анықталады:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^m (-1)^k D_\nu G_{2k}^r(x, y) \ell_{\mathbf{d}^{(k)}}^{-1}[g_{k-1}](y) dS_y + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{\Omega} G_{2m}^r(x, y) \ell_a^{-1}[f](y) dy.$$

Бұл жұмыста сонымен қатар тиісті спектралдық есеп зерттелді.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP32724093) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: бейлокал оператор, Навье есебі, полигармониялық теңдеу, Грин функциясы, меншікті функциялар, меншікті мандер, меншікті функциялар жүйесінің толықтығы.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J40, 35J08, 35P10.

ӘДЕБИЕТ

[1] Karachik V.V. Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation, *Differential Equations*, **50** (2014), 1449-1456.

[2] Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **17**:2 (1974), 451-457.

[3] Турметов Б. Х., Карачик В. В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **31**:4 (2021), 651-667.

МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ДИАГОНАЛИ

Ж.А. САРТАБАНОВ

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актюбе, Казахстан
sartabanov42@mail.ru

Рассматривается система относительно n -вектор-функции $x = x(\tau, t)$ переменных $(\tau, t) \in R \times R$

$$Dx = f(\tau, t, x), \quad D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1)$$

$$f(\tau + \theta, t + \omega, x) = f(\tau, t, x) \in C_{\tau, t, x}^{(0,1,1)}(R \times R \times R^n), \quad \frac{\theta}{\omega} \in I,$$

где D — оператор дифференцирования по диагонали пространств переменных $(\tau, t) \in R^2$ введен в [1], $f(\tau, t, x)$ — вектор-функция класса $C_{\tau, t, x}^{(0,1,1)}(R \times R \times R^n)$ гладкости $(0, 1, 1)$ и (θ, ω) -периодических по $(\tau, t) \in R \times R$, периоды θ и ω — несоизмеримые, I — множество иррациональных чисел. Будем считать, что сплошная волновая среда из невзаимодействующих частиц описывается уравнениями в частных производных вида (1), следовательно, векторным полем, заданным переменными $(\tau, t) \in R^2$ и уравнениями его характеристик и интегралов:

$$dt = d\tau, \quad t = \eta + \tau - \xi \equiv h(\tau - \xi, \eta), \Leftrightarrow \eta = h(\xi - \tau, t), \quad (2)$$

$$h(\tau + k\theta - \xi, \eta + \omega) = h(\tau - \xi, \eta) + \omega - k\theta, \quad k \in Z.$$

Задача заключается в качественном исследовании многопериодической системы (1), рассматривая ее на различных многообразиях.

В случае частиц среда рассматриваемый процесс, с учетом (2) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{d\sigma} = f(\sigma, h(\sigma - \tau, t), y), \quad \xi \xrightarrow{\sigma} \tau, \quad (3)$$

$$f(\tau + \theta, t + \omega, y) = f(\tau, t, y) \in C_{\tau, t, y}^{(0,1,1)}(R \times R \times R^n), \quad \frac{\theta}{\omega} \in I.$$

Особенностью системы (1) является ее многопериодичность. Такая специфика должна сохраниться при переходе от (1)-(2) к (3) и обратно. Методы качественного исследования системы (1) связаны со стыковкой кинематической и геометрической трактовок [2].

Очевидно, что система (1) более общая, чем система (3) и позволяет изучить описываемые явление более шире и глубже.

Широта системы (1) заключается в том, что поле (2) можно рассматривать не только на R^2 , но и на других различных многообразиях пространства R^3 .

Заметим, что переменная τ , а следовательно и t , носят временной характер. Следовательно, их геометрический образы траекторий должен имеет постоянные кривизны. Это означает, что они должны изменяться либо вдоль прямых, либо вдоль окружностей. Данное замечание позволяет определить виды многообразий, где рассматривается характеристическое уравнение (2), а следовательно, система (1).

• Имеем три вида многообразий, которые определяют суть методов теории многопериодических систем с оператором дифференцирования по диагонали:

1. В качестве многообразия можно взять плоскость R^2 пространства R^3 , где переменные τ и t представляют длины отрезков. Оно целесообразно, когда исследуются незамкнутые решения системы (1). При этом определим характеристику $t = \delta(\tau - \xi, \eta)$, которая представляет прямую, параллельную диагонали.

2. Многообразием может служить сфера $S^2 \subset R^3$, где переменные τ и t выражают длины дуг одинаковых соприкасающихся окружностей S . Оно удобно, когда исследуется задача о замкнутых решениях с одинаковым периодом $\theta = \omega$. При этом характеристика обозначается в виде $t = \gamma(\tau - \xi, \eta)$, которая является экваториальной окружностью.

3. Наконец, многообразием может быть цилиндрическая поверхность $\mathcal{M} = R \times S_\theta \subset R^3$. Этот случай многообразия согласуется с задачей о замкнутых решениях при несоизмеримости периодов θ и ω и является более общим случаем. При этом характеристику обозначим в виде $t = \beta(\tau - \xi, \eta)$, представляющую винтовую линию.

Это есть краткое описание *методов качественного исследования* многопериодических систем с оператором дифференцирования по диагонали.

• К основам теории многопериодических систем вида (1) относится, прежде всего *условие многопериодичности* ее решений $x(\tau, t, u(\beta(\xi - \tau, t)))$ с начальным условием

$$x|_{\tau=\xi} = u(t) \in C_t^{(1)}(R).$$

Установлено (2), что при в случае выполнения условий теоремы существования и единственности таковым условием является *разрешимость функциональной системы*

$$u(t) = x(\xi + \theta, t, u(t)) \quad (4)$$

в классе функций $u(t + \omega) = u(t) \in C_t^{(1)}(R)$.

• К не менее важным вопросам основ теории многопериодических систем относится *условие приводимости* линейных однородных систем

$$Dx = P(\tau, t)x, \quad P(\tau + \theta, t + \omega) = P(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(\mathcal{M}), \quad \frac{\theta}{\omega} \in I. \quad (5)$$

Доказана теорема о том, что система (5) приводима к системе

$$Dz = \frac{1}{\theta} \Lambda(\beta(-\tau, t))z, \quad \Lambda(\eta + \omega) = \Lambda(\eta) \in C_\eta^{(1)}(R) \quad (6)$$

линейной заменой $x = T(\tau, t)z$, $\det T(\tau, t) \neq 0$, $T(\tau + \theta, t + \omega) = T(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(R \times R)$.

Как следствие из (4) имеем условие *квазипериодичности решений* квазипериодических систем. Из теоремы приводимости системы (5) к системе (6) вышеприведенным преобразованием следует *приводимость условно-периодической (квазипериодической) системы*

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, \tau)x, \quad A(\tau + \theta, t + \omega) = A(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(R \times R)$$

к линейной системе с постоянными коэффициентами на основе линейного квазипериодического преобразования. В целом, в работе обоснованы, что идеи методов Пуанкаре и Ляпунова,

разработанных для исследования периодических систем применимы и в случае многочастотных колебательных систем. Реализация этих идей осуществляется методом перехода от систем обыкновенных дифференциальных уравнений к системам с оператором дифференцирования по диагонали [1] на основе метода периодических (винтовых) характеристик [2].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP19676629).

Ключевые слова: приводимость, многопериодичность, оператор дифференцирования, периодическая характеристика, цилиндрическая поверхность.

2020 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35F05, 35R01, 34C46

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Харасахал В.Х. *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука Каз ССР, Алма-Ата (1970).
- [2] Сартабанов Ж. *Исследование многопериодических систем с оператором дифференцирования по диагонали методом периодических характеристик*, Принт А, Актобе (2025).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ДВА ВЗГЛЯДА НА ОДИН МОСТ

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

serovajskys@mail.ru

Принципиальное отличие математики от других наук состоит в том, что изучаемые в ней объекты принадлежат не окружающему нас реальному миру, а идеальному миру человеческих идей. Действительно, числа и функции, производные и алгоритмы, вероятности и многообразия, операторы и теоремы, группы и множества сами по себе в окружающем мире отсутствуют. И в то же время математические методы, в принципе, могут успешно использоваться для изучения чего угодно, что опять-таки отличает математику от всех других наук. Дело в том, что между реальным миром, изучаемым отдельными науками, и идеальным миром, с которым оперирует математика, существует мост. Этим мостом и является математическое моделирование.

Применение математических методов для исследования конкретного явления окружающего мира фактически осуществляется в три этапа. Сначала закономерности изучаемого явления, установленные средствами той или иной конкретной науки, переводятся на язык математики, результатом чего и является соответствующая математическая модель. Тем самым реализуется переход по мосту из реального мира в мир математики. Затем выявляются свойства полученной математической задачи математическими средствами, чаще всего с применением информационных технологий. Наконец, на третьем этапе осуществляется интерпретация полученных результатов, т.е. осуществляется обратный перевод выявленных закономерностей с языка математики на язык соответствующей предметной области с возвращением по мосту из абстрактного математического мира в мир реальный.

Указанные проблемы являются предметом книги S. Serovajsky. *Mathematical modelling*, принятой к изданию издательством Taylor and Francis Group (Великобритания). Книга посвящена различным аспектам построения математических моделей, их анализа и интерпретации их свойств. При этом обзор математических моделей осуществляется с двух позиций. Взгляд со стороны реального мира предполагает классификацию моделей по предметным областям. Этим вопросам посвящены главы, в которых дается обзор моделей в области физики, химии, биологии, медицины, экономики, социологии, экологии, политологии и др. С другой стороны, взгляд со стороны математики, предполагает обзор математических задач, используемых в качестве моделей. Здесь рассматриваются непрерывные и дискретные, детерминированные и

стохастические, сосредоточенные и распределенные, эволюционные и стационарные системы, а также задачи идентификации, управления, игровые, некорректные задачи и др.

Выход книги ожидается в 2027 году. Ее планируемый объем составляет более 500 страниц.

ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

А.П. СОЛДАТОВ

Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

soldatov48@gmail.com

В области D комплексной плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ с множеством узлов F , рассматриваются двумерные сингулярные интегралы вида

$$\psi(z) = \int_D Q_2(t, t-z) \varphi_2(t) dt, \quad z \in D,$$

и обобщенные интегралы типа Коши $\phi(z) = \int_\Gamma Q_1(t, t-z) \varphi_1(t) dt$, $z \in D$, где ядра $Q_k(t, \xi)$ однородны степени $-k$ по переменной $\xi \in \mathbb{C}$. Описываются условия, обеспечивающие принадлежность функций φ и ψ весовым пространствам Гельдера, соответственно $C_k^\mu(D, F)$ и $C_k^\mu(\Gamma, F)$. Обсуждается также принадлежность данных функций классам со степенью и логарифмической асимптотикой в узлах. Приводятся приложения этих интегралов к эллиптическим системам первого порядка.

Ключевые слова: сингулярные интегралы, интегралы типа Коши, весовые пространства Гельдера, эллиптические системы.

2020 Mathematics Subject Classification: 30E20, 35J56, 45E05

О ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ С ТЕПЛОВЫМИ ИМПУЛЬСАМИ НЕФУРЬЕРОВСКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ж.О. ТАХИРОВ

Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

prof.takhirov@yahoo.com

Инженерная практика требует надежных способов определения необходимых параметров, достаточных для характеристики поведения материала. Далее мы сосредоточимся на тепловом описании материалов, особенно гетерогенных материалов, таких как горные породы и пены. В недавних работах [1, 2] сообщается, что наличие различных неоднородностей может приводить к нефурье-эффекту теплопроводности. Эксперимент с тепловым импульсом (вспышкой) является хорошо известным и широко принятым методом измерения температуропроводности материала. В последние годы было замечено, что тепловое поведение гетерогенных материалов может показывать отклонение от классического уравнения Фурье, что приводит к другой температуропроводности и требует дополнительных тепловых параметров для идентификации. Кроме того, так называемое уравнение Гюйера-Крумхансля, успешно тестируется в этих экспериментах. Уравнением Гюйера-Крумхансля (ГК), это конститутивное уравнение читается в одном пространственном измерении

$$\tau_q q_t + q + \lambda T_x - \kappa^2 q_{xx} = 0. \quad (1)$$

Здесь τ_q — время релаксации для теплового потока q , а κ^2 — своего рода «параметр диссипации», обычно связанный со средней длиной свободного пробега. Уравнение (1) представляет собой уравнение эволюции во времени для теплового потока, и для того, чтобы иметь математически и физически полную систему, нам также необходим баланс внутренней энергии e ,

$$\rho c T_t + q_x = 0, \quad (2)$$

в котором используется уравнение состояния $e = cT$, где c — удельная теплоемкость.

В зависимости от цели полезно помнить, что для таких линейных моделей можно выбрать «первичную» переменную, что может упростить определение граничных условий в некоторых случаях. Для уравнения ГК в качестве кандидатов рассматриваются температура T и тепловой поток q , и их формы:

$$T\text{-представление: } \tau_q T_{tt} + T_t - \alpha T_{xx} - \kappa^2 T_{txx} = 0,$$

$$q\text{-представление: } \tau_q q_{tt} + q_t - \alpha q_{xx} - \kappa^2 q_{txx} = 0.$$

Отметим, что в T -представлении неизвестно, как определить граничное условие для q , поскольку это требует знания о q_{xx} . С другой стороны, в q -представлении говорить о T -границах становится бессмысленно. В предыдущем аналитическом решении уравнения ГК эта разница была неизбежна. В настоящей работе мы используем систему (1)-(2). Также интересно отметить, что модель ГК может восстановить решение уравнения Фурье, когда $\kappa^2 = \tau_q = \alpha$, это называется резонансом Фурье. В целом, коэффициенты τ_q , α и κ^2 должны быть подогнаны к заданной истории изменения температуры.

Ключевые слова: нефурьеровская теплопроводность; тепловой импульс; уравнение Гюйера–Крумхансля; температуропроводность.

2020 Mathematics Subject Classification: 80A20, 35K05, 35L05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Both S., Czél B., Fülöp T., Gróf Gy., Gyenis A., Kovács R., Ván P., Verhás J. Deviation from the Fourier law in room-temperature heat pulse experiments, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **41**:1 (2016), 41–48.
- [2] Ván P., Berezovski A., Fülöp T., Gróf Gy., Kovács R., Lovas A., Verhás J. Guyer-Krumhansl-type heat conduction at room temperature, *EPL*, **118**:5 (2017), 50005.

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБУЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ В ВЫЧИСЛИМЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ: РОЛЬ ОТНОШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Ж.Т. ТАЛАСБАЕВА

Международный инженерно-технологический университет, Алматы, Казахстан

talasbaeva1979@gmail.com

Введение. Алгоритмическая теория обучения (Algorithmic Learning Theory), основы которой были заложены Э.М. Голдом [1], изучает возможности идентификации объектов по растущей последовательности данных. В последние десятилетия концепции этой теории успешно применяются к алгебраическим структурам.

В данной работе исследуется проблема алгоритмического обучения в пределе (Ex-learning) для семейства всех **конечномерных подпространств** вычислимого векторного пространства. Главная цель — установить, является ли обучаемость данного семейства инвариантом векторного пространства или же она существенно зависит от его конструктивного представления.

Основные определения. Мы рассматриваем векторные пространства над вычислимым полем F (например, $F = \mathbb{Q}$).

Определение 1. Векторное пространство V называется *вычислимым*, если его носитель $|V|$ является вычислимым подмножеством натуральных чисел ω , операции сложения векторов и умножения на скаляр вычислимы, а отношение равенства разрешимо.

Определение 2. Вычислимое векторное пространство V имеет *разрешимое отношение зависимости*, если множество всех линейно зависимых конечных наборов векторов в V является вычислимым (рекурсивным) множеством.

В рамках классической модели обучения в пределе по Голду [1], обучающей машиной выступает машина Тьюринга M , получающая на вход конечные начальные фрагменты текста. Семейство подпространств называется *Ех-обучаемым*, если для любого подпространства из семейства и любого его текста последовательность гипотез машины сходится к правильному индексу данного подпространства.

В работе показано, что даже для случая конечномерных подпространств обучаемость строго определяется алгоритмической сложностью предиката линейной зависимости.

Теорема 3. Пусть V — вычислимое векторное пространство с разрешимым отношением линейной зависимости. Тогда семейство всех конечномерных подпространств пространства V является Ех-обучаемым.

Теорема 4. Существует вычислимое векторное пространство V , такое что семейство всех его конечномерных подпространств не является Ех-обучаемым.

Идея доказательства основана на построении V как фактор-пространства свободного бесконечномерного пространства по рекурсивно перечислимому идеалу соотношений. Построение ведется методом приоритетной диагонализации таким образом, чтобы разрушить попытки любой обучающей машины сойтись к правильной гипотезе путем целенаправленного обнуления генераторов. Таким образом, алгоритмическая сложность задачи обучения конечномерных подпространств диктуется не топологией самих подпространств, а конструктивными свойствами объемлющего пространства V .

Ключевые слова: алгоритмическое обучение, вычислимое векторное пространство, конечномерные подпространства, линейная зависимость, теория нумераций.

2020 Mathematics Subject Classification: 03D45, 68Q32

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gold E.M. Language identification in the limit, *Information and Control*, **10**:5 (1967), 447–474.
- [2] Harizanov V., Stephan F. On the learnability of vector spaces, *Journal of Computer and System Sciences*, **73**:1 (2007), 109–122.
- [3] Бадаев С.А., Гончаров С.С. Роджерсовские полурешетки семейств арифметических множеств, *Алгебра и логика*, **40**:5 (2001), 283–291.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ЛАУРИЧЕЛЛА

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ¹, Ж.К. УБАЕВА², Р.У. ЖАХИНА³

¹Западно-Казахстанский университет имени М. Утемисова, Уральск, РК

^{2,3}Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, Актобе, РК

¹tasmam@rambler.ru, ²zubayeva@zhubanov.edu.kz, ³riscul_75@mail.ru

Приводится классификация вырожденных гипергеометрических систем вида:

$$\begin{aligned}
z_i(1-z_i)W_{z_i z_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_j W_{z_j z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1)z_i] W_{z_i} - \alpha_i \beta_i W = 0, \quad i = 1, \bar{k}, \\
\sum_{j=1}^n z_j W_{z_j z_i} + (\gamma - z_i)W_{z_i} - \alpha_{i-k} W = 0, \\
i = \overline{k+1, k+l}, \\
\sum_{j=1}^n z_j W_{z_j z_i} + \gamma W_{z_i} - W = 0, \quad i = \overline{k+l+1, n}. \quad (1)
\end{aligned}$$

полученных из полной системы Лауричелла (1) путем предельных переходов. Конкретные примеры рассмотрены для случая: $n = 9, k = 3, n - k - l = 3, l = 3$. Для рассмотренных примеров построены:

1. Регулярные решения вблизи особенности $(0, 0, 0)$;
2. Решения типа Художникова:

$$\Phi_{B_n}^{k,l} \left(\begin{matrix} (\alpha_k), (\alpha'_l), (\beta_k) \\ \gamma \end{matrix} \middle| (z_n) \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{\prod (\alpha_k)_{i_k} (\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}} \prod (\alpha'_l)_{i_l+k} \quad (2)$$

3. Нормально-регулярные решения вида:

$$W(z_1, \dots, z_n) = \exp(\alpha_{1,0,0}z_1 + \dots + \alpha_{0,0,1}z_n) z_1^{\rho_{m_1}} \dots z_n^{\rho_{m_n}} \sum_{m_1, \dots, m_n} A_{m_1, \dots, m_n} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \quad A_{0,0, \dots, 0} \neq 0. \quad (3)$$

Доказаны теоремы вида:

Теорема 1. *Справедливы соотношения*

$$\Phi_{B,n}^{k,l} \left(((\alpha_k), (\alpha'_l), (\beta_k))_\gamma \middle| (z_n) \right) = \exp(\alpha_{1,0,0}z_1 + \dots + \alpha_{0,0,1}z_n) U(x_1, \dots, x_n)$$

между функцией Художникова (2) и нормально-регулярными решениями вида (3), где

$$U(x_1, \dots, x_n) = z_1^{p_{m_1}} \dots z_n^{p_{m_n}} \sum_{m_1, \dots, m_n} A_{m_1, \dots, m_n} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n},$$

$$\rho_i^{m_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad A_{m_i} \quad (i = 1, \dots, n; m_i = 0, 1, 2, \dots) -$$

неизвестные постоянные.

Ключевые слова: регулярные, соотношения, особенности, предельный переход, нормально-регулярные, классификация, система

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Appell P., Kampe de Fériet J. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynômes d'Hermite.*, Gauthier-Villars, Paris (1926).

[2] Tasmambetov Zh.N., Ubayeva Zh.K. Exceptions of formulating the normal-regular solutions of confluent hypergeometric systems obtained from the Lauricella system, *Lobachevskii journal of mathematics*, **43**:8 (2022), 2309–2321.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ¹, Г.М. АЙТЕНОВА², Г.А. УЗАКБАЕВА³

^{1,2,3}Западно-Казахстанский университет имени М. Утемисова, Уральск, Казахстан
tasman@rambler.ru

Исследованы свойства нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем типа (Φ_D) :

$$(1 - Z_i) \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \cdot W_{Z_j Z_i} + [\gamma - (\alpha + \beta_i + 1)Z_i] \cdot W_{Z_i} - \beta_i \sum_{j=1, j \neq i}^n Z_j \cdot W_{Z_j} - \alpha \beta_i \cdot W = 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n Z_j \cdot W_{Z_j Z_i} + (\gamma - Z_i)W_{Z_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^n Z_j \cdot W_{Z_j} - \alpha \cdot W = 0, \quad i = \overline{k+1, n}$$

Рассмотрены свойства нормально-регулярных решений различных вырожденных гипергеометрических систем, полученных из (1)(1) при $n = 0, k = 3$. Для этих случаев, построены решения вида Φ_D Художникова [1].

$$\Phi_D \left(\frac{\alpha, (\beta_k)}{\gamma} \middle| (Z_{k+l}) \right) = \sum_{i_1, \dots, i_{k+l}} \frac{(\alpha)_{\sum i_{k+1}} \cdot \prod (\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_{k+l}}} \cdot \prod \frac{(Z_{k+l})^{i_{k+l}}}{i_{k+l}!}$$

и нормально-регулярное решение [2].

Definition 1. Решение вида:

$$W = \exp(\alpha_{1,0,0}Z_1 + \alpha_{0,1,0}Z_2 + \alpha_{0,0,1}Z_3) \cdot Z_1^{\rho_{m_1}} Z_2^{\rho_{m_2}} Z_3^{\rho_{m_3}} \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^{\infty} A_{m_1, m_2, m_3} Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} Z_3^{m_3}, \quad A_{0,0,0} \quad (2)$$

называется нормально-регулярным решением 3-х переменных системы (1)(1), где ρ_{m_i} ($i = 1, 2, 3$), A_{m_1, m_2, m_3} ($m_1, m_2, m_3 = 0, 1, 2, \dots$), $\alpha_{1,0,0}, \alpha_{0,1,0}, \alpha_{0,0,1}$ — неизвестные постоянные.

Ряд в правой части (2) сходится вблизи особенности $(0, 0, 0)$.

Theorem 2. Вырожденная гипергеометрическая система, состоящая из трёх уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1 W_{Z_1 Z_1} + (\gamma - Z_1)W_{Z_1} - Z_2 W_{Z_2} - Z_3 W_{Z_3} - \lambda W &= 0 \\ Z_2 W_{Z_2 Z_2} + (\gamma - Z_2)W_{Z_2} - Z_1 W_{Z_1} - Z_3 W_{Z_3} - \lambda W &= 0, \\ Z_3 W_{Z_3 Z_3} + (\gamma - Z_3)W_{Z_3} - Z_1 W_{Z_1} - Z_2 W_{Z_2} - \lambda W &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

имеет нормально-регулярное решение вида:

$$W(Z_1, Z_2, Z_3) = \exp \sum_{k=1}^3 Z_k \cdot U(Z_1, Z_2, Z_3).$$

Theorem 3. Справедливо соотношение:

$$\Phi_D \left(\frac{\lambda}{\gamma} \middle| (z)_3 \right) = \exp \sum_{k=1}^3 Z_k \cdot U(Z_1, Z_2, Z_3),$$

где $U(Z_1, Z_2, Z_3)$ — решение промежуточной системы вида (3).

Ключевые слова: система, решение, нормально-регулярное, гипергеометрическая система, свойства, неизвестные постоянные, построены.

2020 Mathematics Subject Classification: 33C45

ЛИТЕРАТУРА

[1] Художников В.И. *Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними*// Дифференц. уравнения, 2003, 835-843.

[2] Тасмамбетов Ж.Н. *Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*, Изд-во. Актобе: ИП Жанадилова С. Т. (2015).

О РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С $P(|x|)$ -ЛАПЛАСИАНОМ

А.С. ТЕРСЕНОВ.¹, Р.Ч. САФАРОВ²

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия, 630090

²Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия, 630090

²Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан, 180119

r.safarov1@g.nsu.ru

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p(|x|)-2}\nabla u) = F(x, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad B_R \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial B_R, \quad (2)$$

где B_R – шар радиуса R , ∂B_R – граница B_R , $1 < p(|x|) < 2$. Наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение вариационных методов исследования разрешимости задачи (1), (2). Отметим также, что уравнения вида (1) обладают важным свойством: они не являются масштабно-инвариантными, что делает неприменимыми многие традиционные методы исследования разрешимости и анализа качественных свойств решений.

Нас интересует существование ограниченных радиально симметричных решений задачи (1), (2). Будем предполагать, что функция $F(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. В дальнейшем производную функции u по переменной r мы будем обозначать u' . Хорошо известно, что ограниченное радиально симметричное решение (1), (2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p(r)-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u' = F(r, u, u'), \quad r \in (0, R), \quad (3)$$

и краевым условиям

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \quad (4)$$

Одним из стандартных условий при исследовании разрешимости задачи (1), (2) является условие Бернштейна–Нагумо, налагаемое на функцию $F(x, u, \nabla u)$,

$$|F(x, u, q)| \leq c(1 + |q|^p) \quad \text{для} \quad (x, u, q) \in \bar{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

с некоторой постоянной c , при условии, что решение удовлетворяет условию $\max |u| \leq M$ с некоторой постоянной M . Нас интересует разрешимость краевых для задач для (1) без каких либо условий малости в случае, когда функция $F(x, u, q)$ имеет произвольный рост по переменной q .

Отметим, что мы не накладываем никаких условий на правую часть (3), гарантирующих знакоопределенность как самого решения, так и его производной. Таким образом, его решения мы ищем в классе слабых соболевских решений.

При определенных условиях на правую часть, связанных с монотонностью по переменной u , заменяющих условие (5), удалось доказать существование слабого соболевского решения, имеющего классическую производную непрерывную по Гельдеру

Представленный в тезисах результат будет опубликован в [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1]. А.С. Терсенов, Р.Ч. Сафаров. О радиально-симметричных решениях для эллиптического уравнения с $p(|x|)$ лапласианом, // Сибирский математический журнал, Т.67(2), 2026.

К ОБОБЩЕНИЮ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКО

Ж.А. ТОКИБЕТОВ¹, Г.Е. АБДУАХИТОВА²

^{1,2}Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Gulzhan.Abduahitova@kaznu.kz

Рассматривается обобщение четырехмерной системы Моисила-Теодореско

$$\begin{aligned} \partial_1 s - \partial_2 u - \partial_3 v - \partial_4 w &= 0, \\ \partial_1 u + \partial_2 s + \partial_3 w - \partial_4 v &= 0, \\ \partial_1 v - \partial_2 w + \partial_3 s + \partial_4 u &= 0, \\ \partial_1 w + \partial_2 v - \partial_3 u + \partial_4 s &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_1 &= b \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} - c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}, \\ \partial_2 &= \frac{\partial}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial y} - a \frac{\partial}{\partial z} - b \frac{\partial}{\partial t}, \\ \partial_3 &= c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

Если в этой системе положить $a = b = c = 0$, то получается известная система Моисила-Теодореско

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y - w_z &= 0, & u_t + s_x + w_y - v_z &= 0, \\ v_t - w_x + s_y + u_z &= 0, & w_t + v_x - u_y + s_z &= 0. \end{aligned}$$

Система (1) является нормальной, следовательно она эллиптична и ее решение гармонические функции.

Дается представление решений системы (1) через два решения уравнения второго порядка $(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_4^2) U = 0$ или $\Delta U = 0$

по формуле

$$\begin{aligned} u &= (\hat{\alpha}, \nabla \sigma) + (\hat{\beta}, \nabla \omega), & s &= (\hat{\gamma}, \nabla \sigma) + (\hat{\delta}, \nabla \omega), \\ v &= (\hat{\mu}, \nabla \sigma) + (\hat{\eta}, \nabla \omega), & w &= (\hat{\rho}, \nabla \sigma) + (\hat{\tau}, \nabla \omega), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= (a, -b, 1, -c), & \bar{\beta} &= (-c, -1, -b, a), & \bar{\gamma} &= (c, 1, b, -a), \\ \bar{\delta} &= (a, -b, 1, c), & \bar{\mu} &= (b, a, -c, 1), & \bar{\eta} &= (-1, c, a, b), \\ \bar{\rho} &= (1, -c, -a, -b), & \bar{\tau} &= (b, a, -c, 1), & \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

С помощью этого представления решения системы (1) задача Римана-Гильберта [1] о нахождении регулярного в области решения системы (1) удовлетворяющего на границе области условиям

$$a_i s + b_i u + c_i v + d_i w = f_i, \quad i = 1, 2,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i, f_i – заданные на границе функции, сводится к задаче о наклонной производной для гармонической функции [1]:

$$(a_i \bar{\gamma} + b_i \bar{\alpha} + c_i \bar{\mu} + d_i \bar{\delta}, \nabla \sigma) + (a_i \bar{\delta} + b_i \bar{\beta} + c_i \bar{\eta} + d_i \bar{\tau}, \nabla \omega) = f_i.$$

Задача Римана-Гильберта для системы (1) в любой области не удовлетворяет условию Лопатинского при любых коэффициентах, поэтому должна нарушаться нетеровость этой задачи [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бицадзе А.В. *Краевые задачи для эллиптических систем второго порядка*. М. Наука, 204С, (1966).

[2] Виноградов В.С. *Об одной эллиптической системе, не имеющей нетеровых граничных задач*. Докл. АН СССР, т.199, №5, С. 1008-1010, (1971).

БАКЛИ – ЛЕВЕРЕТТ МОДЕЛІ НЕГІЗІНДЕ ЕКІФАЗАЛЫҚ АРАЛАСПАЙТЫН ФЛЮИДТЕР АҒЫСЫ ҮШІН РИМАН ЕСЕБІНІҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Т.Ж. ТОЛЕУОВ

¹Қ.Жұбанов атындағы АӨУ, Ақтөбе, Қазақстан

timur_toleuov@mail.ru

Кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтердің сүзгіленуі мұнайды сумен ығыстыру, қабат қысымын ұстау және өндіру қарқынын болжау есептерінің классикалық математикалық моделіне жатады. Мұндай процестерді сипаттауда Бакли – Леверетт теңдеуі кеңінен қолданылады. Бұл модель сызықты емес гиперболалық типке жатады, сондықтан оның шешімдерінде соққы толқындары, сиректену толқындары және қанықтылықтың секіrmелі фронттары пайда болады. Осыған байланысты Риман есебі, энтропиялық шешім және жойылатын тұтқырлық әдісі негізгі зерттеу құралдары болып табылады.

Геометриялық қойылым. Айдау және өндіру ұңғымалары мұнай қабатында бір-біріне параллель және бір горизонталь жазықтықта орналасқан деп есептейік. Айдау ұңғымалары арқылы ығыстырушы флюид қабатқа беріледі, ал өндіру ұңғымалары арқылы мұнай қоспасы сыртқа шығарылады. Мұндай орналасу бірөлшемді сүзгілеу есебін қарастыруға мүмкіндік береді.

Физикалық модель және негізгі болжамдар. Қарастырылатын процесс – кеуекті ортадағы араласпайтын екі флюидтің сүзгіленуі. Модель келесі стандартты болжамдарға негізделеді: флюидтер сығылмайды; фазалар арасында масса алмасу жүрмейді; кеуекті орта біртекті және деформацияланбайды; сүзгілеу изотермиялық; капиллярлық қысым ескерілмейді.

Фазалардың қозғалысы салыстырмалы фазалық өтімділіктер арқылы жалпыланған Дарси заңы бойынша сипатталады, ал суға қанықтылық функциясы Бакли – Леверетт теңдеуіне бағынады [1–2].

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

мұндағы $S = S(x, t)$ – суға қанықтылық, $f(S)$ – фракциялық ағыс функциясы.

Риман типті бастапқы деректер және соққы фронты. Практикалық жағдайда айдау ұңғымасы маңында судың қанықтылығы жоғары, ал өндіру аймағында төмен болады. Сондықтан бастапқы дерек Риман типінде беріледі:

$$S(x, 0) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0, \end{cases} \quad S_L > S_R. \quad (2)$$

Бұл жағдайда (1) теңдеуінің энтропиялық шешімі соққы толқыны түрінде қалыптасады. Соққы фронтының жылдамдығы Ранкин – Гюгонио шартымен анықталады, ал шешімде қанықтылықтың секірісі пайда болады [1, 3]:

$$s = \frac{f(S_L) - f(S_R)}{S_L - S_R}. \quad (3)$$

Сонымен, Риман есебі қабаттағы ығыстыру фронтының таралуын, серпіліс уақытын және су басу аймағының қозғалысын сипаттайды.

Тұтқыр саусақтар және ығыстыру орнықсыздығы. Егер ығыстырушы флюидтің тұтқырлығы ығыстырылатын флюидтің тұтқырлығынан төмен болса, фронттың орнықтылығы бұзылады. Мұндай жағдайда макроскопиялық тұтқыр саусақтар пайда болып, ығыстыру тиімділігі төмендейді. Бұл құбылыс Саффман – Тейлор орнықсыздығымен байланыстырылады.

Жойылатын тұтқырлық әдісінің физикалық мағынасы. Соққы фронты бар шешімдерді талдау үшін (1) теңдеуіне аз тұтқырлық қосылады:

$$\frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(S^\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S^\varepsilon}{\partial x^2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Тұтқырлық мүшесі соққыны тегістеп, өтпелі қабаттың пайда болуына әкеледі. $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде бұл қабат энтропиялық шешімдегі секіріске жинақталады, ал өтпелі аймақтың қалыңдығы $O(\varepsilon)$ тәртібінде болады.

Жинақталу, соққы қабаты және орнықтылық. Жойылатын тұтқырлық әдісі Бакли – Леверетт моделі үшін физикалық мағынасы бар жалғыз шешімді таңдауға мүмкіндік береді. Тұтқырланған есептің шешімі соққы маңында жүгірмелі толқын түрінде ізделеді:

$$S^\varepsilon(x, t) = U\left(\frac{x - st}{\varepsilon}\right), \quad (5)$$

мұндағы s жылдамдық (3) формуласы бойынша анықталады. Осыдан тұтқыр шешімнің энтропиялық секірмелі шешімге өту механизмі түсіндіріледі.

Теорема 1. $f \in C^1([0, 1])$ болсын, ал бастапқы дерек $S_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ болсын. Онда $\varepsilon_n \rightarrow 0$ болатын тізбек үшін (4) теңдеуінің S^{ε_n} шешімдерінен $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ кеңістігінде Бакли – Леверетт теңдеуінің Кружков мағынасындағы жалғыз энтропиялық шешіміне жинақталатын тізбекше бөліп шығаруға болады.

Теорема 2. Егер бастапқы дерек (2) түрінде беріліп, f функциясы дөңес болса, онда тұтқырланған есептің соққы маңындағы өтпелі аймағы (5) түріндегі жүгірмелі толқынмен сипатталады және оның сипаттамалық қалыңдығы $O(\varepsilon)$ тәртібінде болады.

Теорема 3. Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімдері L^1 нормасында орнықты және жалғыз, яғни кез келген $t \geq 0$ үшін

$$\|S_1(\cdot, t) - S_2(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|S_{1,0} - S_{2,0}\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (6)$$

бағалауы орындалады.

Осы теоремалар жойылатын тұтқырлық әдісінің тек формаль математикалық құрал емес екенін, оның физикалық іріктеу принципі ретіндегі рөлін де көрсетеді. Атап айтқанда, тұтқыр жуықтаулар Риман есебінің соққы толқынын дұрыс таңдайды, ал L^1 -орнықтылық шешімнің жалғыздығын қамтамасыз етеді. Бұл нәтижелер кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысын сипаттайтын модельдің математикалық дұрыстығын негіздейді және сандық эксперименттерді интерпретациялауда маңызды рөл атқарады.

Кілтті сөздер: Бакли – Леверетт теңдеуі, Риман есебі, жойылатын тұтқырлық әдісі, энтропиялық шешім, екіфазалық сүзгілеу, тұтқыр саусақтар.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L65, 76S05, 35B40.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

- [1] Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands, *Trans. AIME*, **146** (1942), 107–116.
- [2] Welge H.J. A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive, *J. Pet. Technol.*, **4** (1952), 91–98.
- [3] Salas M.D. The Curious Events Leading to the Theory of Shock Waves, *Shock Waves*, **16:6** (2007), 477–487.
- [4] Bressan A. The unique limit of the Glimm scheme, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **130:3** (1995), 205–230.
- [5] Toleuov T., Aldanov Y., Tasbolatuly N. Construction of approximate solutions to the Riemann problem for two-phase flow of immiscible liquids by modifying the vanishing viscosity method, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, **3(4–117)** (2022), 40–48.
- [6] Toleuov T., Sakhabaeva A., Baishemirov Zh., Sadirbekova D. Problems of two-phase immiscible liquids and methods for their solution, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, **12:6** (2025), 2216–2224.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

К.С. ТУЛЕНБАЕВ¹, К.М. ТУЛЕНБАЕВ²

¹Алматинский Технологический Университет, г. Алматы, Казахстан

²КазНУ им. Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

¹tkanats@mail.ru, ²kasart4@mail.ru

В работах О.А. Ладыженской и Н.Н. Уралцевой получены фундаментальные результаты по разрешимости краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка [1]. В данной работе рассматривается краевая задача с граничным условием, задаваемым общим оператором первого порядка при минимальных требованиях на гладкость данных. Рассмотрим следующую задачу:

$$\alpha_{ij}(x, u, u_x)u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$b(x, u, u_x) = \phi(x), \quad x \in \delta\Omega, \quad (2)$$

где Ω — область в R^n , $\delta\Omega$ — ее граница. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Априорные оценки решений задачи (1)–(2) получены в работах [2], [3].

Теорема 1. Пусть для всех решений $u(x) \in W_q^2$, $q > n$, задачи (1)–(2) справедлива оценка $\max|u(x)| \leq M$, $x \in \Omega$. Пусть далее выполняются условия

$$\nu \xi^2 \leq \alpha_{ij}(x, u, p) \xi_i \xi_j \leq \nu^{-1} \xi^2, \quad \forall \xi \in R^n,$$

$$|a(x, u, p)| \leq \mu p^2 + \psi(x).$$

На функции, входящие в задачу (1)–(2), наложены условия, обеспечивающие априорную оценку решения в пространстве $C^{1+\alpha}(\Omega)$ [3]. Пусть $\delta\Omega \in C^2$, $\phi \in W_q^{1-\frac{1}{q}}(\delta\Omega)$, $\psi(x) \in L^q(\Omega)$, $q > n$. Тогда существует решение задачи (1)–(2) в соболевском пространстве $W_q^2(\Omega)$.

Доказательство основано на принципе Лерэ — Шаудера [4].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31714735).

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, однородное тело, граничный оператор общего вида, неограниченные особенности данных.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Обзор результатов разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности, *Успехи математических наук*, т.41, 1:5, (1986), 59–83.
- [2] Туленбаев К.С., Уральцева Н.Н. Нелинейная краевая задача для эллиптических уравнений общего вида, в кн: *Дифференциальные уравнения с частными производными*, СО АН СССР Институт Математики, Новосибирск (1987), №2, 95–112.
- [3] Туленбаев К.С., Жадыранова А.А. Непрерывность по Гельдеру первой производной решения нелинейной краевой задачи для эллиптических уравнений общего вида, *Сборник тезисов Международной научной конференции "Актуальные вопросы междисциплинарных научных исследований"* приуроченной к 100-летию академика Е.А. Букетова, 17-20 июня 2025г., Караганда, 117–120.
- [4] Tulenbayev K., Karybayeva G. On the existence of solutions of boundary value problems for quasilinear elliptic equations of general form in Sobolev spaces, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, vol.28, №5, (2025), 1941–1954

О КОМПАКТНОСТИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

М. ТУРГУМБАЕВ

Карагандинский национальный исследовательский университет имени
Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан

mentur60@mail.ru

В данной работе приводятся достаточные условия компактности коммутатора для сингулярного интеграла $[b, T]$ в обобщенных пространствах Морри M_p^w .

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, w измеримая неотрицательная функция на $(0, \infty)$. Обобщенное пространство Морри $M_p^w \equiv M_p^w(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой $\|f\|_{M_p^w} \equiv \sup_{\substack{r>0, \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left\| w(r) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\infty(0,\infty)}$, где $B(x, r)$ шар с центром в точке x и с радиусом r .

Пространство M_p^w совпадает с известным пространством Морри M_p^λ при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$,

Сингулярный интеграл T определяется следующим образом $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-n} f(y) dy$,

Для функции $b \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ через M_b обозначим мультипликативный оператор $M_b f = bf$, где f - измеримая функция. Тогда коммутатор для сингулярного интеграла T и оператора M_b определяется равенством

$$[M_b, T] = M_b T - T M_b = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{[b(x) - b(y)] f(y)}{|x - y|^n} dy.$$

Говорят, что функция $b(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $BMO(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|b\|_* = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| dx = \sup_{Q \in \mathbb{R}^n} M(b, Q) < \infty,$$

где Q - куб из $\mathbb{R}^n$ и $b_Q = \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$. Через $VMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим BMO -замыкание пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем.

Theorem 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $b \in VMO(\mathbb{R}^n)$, функции $w_1, w_2 \in \Omega_{p,\infty}$ удовлетворяют условию

$$\int_r^\infty \ln \left(e + \frac{l}{r} \right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} w_1(s) dt}{t} \leq C w_2(r).$$

Тогда коммутатор $[b, T]$ является компактным оператором из $M_p^{w_1}$ в $M_p^{w_2}$.

Для случая пространства Морри подобный результат получен в [1]. При доказательстве Теоремы 1 используется результаты работы [2].

финансирование: Исследование было поддержано грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP26196065). **ключевые слова :** сингулярный интеграл, коммутатор, компактность.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D15, 46B45

REFERENCES

- [1] Y. Chen , Y. Ding Reduction theorems for the discrete Hardy operator on the cones of monotone sequences, J. Math. Sci. (N.Y.), **291**:2 (2025), 217–223.
 [2] Bokayev N., Matin D., Akhazhanov T. and Adil Khanov A. Compactness of Commutators for Riesz Potential on Generalized Morrey Spaces. Mathematics. (2024). –V. 304. no. 12 P.1–16

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Б.Х. ТУРМЕТОВ¹, Д.Н. АЛТЫНБЕК²

¹МКТУ им.Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан

²ЮКУ им.М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан, Туркестан, Казахстан

¹batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz, ²dinara.altynbek@ayu.edu.kz,

Пусть Ω - единичный шар, $\partial\Omega$ - единичная сфера, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ открытый цилиндр. Рассмотрим отображения $S_j x = (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$.

Отображения $S_1, S_2, \dots, S_n$ являются отражениями относительно координатных гиперплоскостей $x_j = 0$ и порождают конечную абелеву группу G порядка 2^n . Каждый элемент группы G имеет вид $S_{\mathbf{k}} = S_1^{k_1} S_2^{k_2} \dots S_n^{k_n}$ где мультииндекс $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \{0, 1\}$.

Для достаточно гладкой функции $u(t, x)$ введем операторы

$$L_a[u](t, x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \Delta u \left(t, S_1^{k_1} S_2^{k_2} \dots S_n^{k_n} x \right),$$

$$D_c u(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial r} + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k u(t, S_1^{k_1} S_2^{k_2} \dots S_n^{k_n} x),$$

где $\frac{\partial}{\partial r}$ - производная по направлению радиус вектора $r = |x|$, Δ - оператор Лапласа, a_k, c_k - некоторый набор действительных чисел, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

В области Q_T рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - L_a[u](t, x) = f(t, x), (t, x) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \tau(x), u_t(0, x) = \rho(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$D_c u(t, x) = 0, 0 \leq t \leq T, x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $f(t, x), \tau(x)$ и $\rho(x)$ заданные функции.

Отметим, что в одномерном случае прямые и обратные задачи для гиперболических уравнений с инволюцией исследовались в работах [1, 2].

Рассматриваемая нами задача (1)-(3) решается путем её сведения к вспомогательным начально-краевым задачам для классического гиперболического уравнения. При этом в полученных задачах часть краевых условий задается в виде условия Неймана, а другая часть — в виде условия Робена. Далее для исследования этих вспомогательных задач используется методика, предложенная в работе В. А. Ильина [3].

Введем числа

$$\varepsilon_i(a) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\langle i, k \rangle} a_k, \varepsilon_i(c) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\langle i, k \rangle} c_k, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

Основной результат относительно задачи (1)-(3) изложен в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть в задаче (1)-(3) коэффициенты a_k, c_k таковы, что $\varepsilon_i(a) > 0, \varepsilon_i(c) \geq 0$, а функции $\tau(x), \rho(x)$ и $f(t, x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) функция $\tau(x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, имеет в этой области непрерывные производные до порядка $[n/2] + 2$ и квадратично интегрируемые производные порядка $[n/2] + 3$. Кроме того, функции $\tau(x), \Delta\tau(x), \dots, \Delta^k\tau(x)$, где $k = [(n+2)/4]$, удовлетворяют граничному условию (3).

2) функция $\rho(x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, имеет в этой области непрерывные производные до порядка $[n/2] + 1$ и квадратично интегрируемые производные порядка $[n/2] + 2$. Кроме того, функции $\rho(x), \Delta\rho(x), \dots, \Delta^k\rho(x)$, где $k = [n/4]$, удовлетворяют граничному условию (3).

3) функция $f(t, x)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $Q_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ и имеет в нем непрерывные производные до порядка $[n/2] + 1$ и квадратично интегрируемые производные порядка $[n/2] + 2$. Кроме того, функции $f(t, x), \Delta f(t, x), \dots, \Delta^k f(t, x)$, где $k = [n/4]$, удовлетворяют граничному условию (3). Тогда решение задачи (1)-(3) существует и единственно.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP32724093).

Ключевые слова: инволюция, гиперболическое уравнение, нелокальная задача, задача Неймана, задача Робена.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20, 35P10

[1] Tapdigoglu R., Torebek B.T. Inverse source problems for a wave equation with involution, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **3** (2018), 75–82.

[2] Yuldashev T., Kilichev O. Inverse problem for a hyperbolic integro-differential equation with two redefinition conditions at the end of the interval and involution, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **14**:1 (2024), 3–22.

[3] Ильин В. А. (1957). К вопросу об обосновании метода Фурье для уравнения колебаний, *Успехи математических наук*, **12**:4 (1957), 289–296.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Д.А. ТУРСУНОВ¹, П.Ж. КОЖОБЕКОВА², А.О. МАМЫТОВ³

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

dtursunov@oshsu.kg

Определение правых частей дифференциальных уравнений, либо значений начальных или граничных условий для таких уравнений, либо нахождение их решений с некоторыми дополнительными условиями о решении прямой задачи называют обратными задачами. Математические модели актуальных проблем геофизики, океанологии, атмосферных исследований, технической физики и других научных дисциплин описываются дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка.

Данная статья посвящена изучению разрешимости обратной задачи, а именно восстановлению правой части в начально-краевой задаче для дифференциального уравнения дробного порядка при известном значении искомого решения на прямой $x = x_0, 0 < x_0 < 1$, то есть при наличии дополнительного условия внутри области. Впервые нами доказано разрешимость задачи, существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи. Для достижения поставленной цели использованы классические методы: приведение обратной задачи к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а также метод функций Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с однородными граничными условиями. В ходе исследования получены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи, связанной с восстановлением правой части дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка.

Сначала исходная задача преобразуется в эквивалентную, с использованием функций Грина, после чего доказывается теорема существования и единственности её решения. Далее, применяя методы теории обратных задач, формулируются интегральное уравнение Вольтерра второго рода, и доказывается существование и единственность решения уравнений [1].

Исследуем разрешимость обратной задачи:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t, x) = a_0 \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} u(t, x) + a_1(t, x) u(t, x) + \varphi(t) f(t, x) + F(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} u(t, x) \Big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial t^{\alpha-2}} u(t, x) \Big|_{t=0} = \psi_2(x), \quad 0 < x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1). \quad (4)$$

где ([2])

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{u(s, x)}{(t-s)^{\alpha-1}} ds,$$

при $1 < \alpha \leq 2$, и выполняется

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} u(t, x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} u(t, x) \right),$$

при $1 < \alpha, \beta \leq 2$; где $0 < T, 0 < a_0, x_0$ — заданные постоянные, $a_1, f, F \in C(\Omega)$,

$$\Omega = \{(t, x) \mid 0 < t < T, 0 < x < 1\},$$

$\psi_1, \psi_2 \in C[0, 1]$, кроме того

$$a_1(t, x), f(t, x), F(t, x), \psi_1(x), \psi_2(x), g(t) —$$

заданные функций, $g \in C^\alpha[0, T]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$,

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}}g(0) = \psi_1(x_0), \quad \frac{d^{\alpha-2}}{dt^{\alpha-2}}g(0) = \psi_2(x_0),$$

$\varphi(t)$ и $u(t, x)$ — неизвестные функций.

Найдены достаточные условия разрешимости поставленной обратной задачи и доказана разрешимость обратной задачи (1)–(4).

Полученные результаты представляют собой важный шаг в развитии теории обратных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными. Ключевым аспектом исследования стало доказательство достаточных условий существования и единственности решения обратной задачи, что является основой для дальнейшего изучения аналогичных задач в более сложных условиях.

Применение метода редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода продемонстрировало его эффективность и универсальность, поскольку позволяет рассматривать задачи с дробными производными, которые характеризуются более сложными свойствами по сравнению с классическими производными. Важным аспектом работы является то, что предложенные условия корректности задачи могут быть адаптированы для других типов дробных производных, таких как производные Капуто, а также для более сложных операторов. Это открывает широкие перспективы для изучения обратных задач в различных прикладных областях.

Финансирование: Данное исследование финансируется Ошским государственным университетом (грант № 1-2025).

Ключевые слова: производная дробного порядка, обратная задача, дифференциальное уравнение, разрешимость.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tursunov D. A., Kozhobekov K. G., Mamytov A. O., Matieva B. E. *Solvability of one class of inverse problem for partial differential equations*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45:7** (2024), 3453–3462.

[2] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego (1999).

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

К.И. УСМАНОВ¹, К.Ж. НАЗАРОВА²

^{1,2}Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави,
Туркестан, Казахстан

kairat.usmanov@ayu.edu.kz, kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

Известно, что дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами играют существенную роль при моделировании процессов в медицине, биологии, экономике и других областях. Некоторые виды отклоняющихся аргументов обладают особыми структурными свойствами. Дифференциальные уравнения, в которых наряду с искомой функцией $u(x)$ присутствуют значения $u(\sigma(x))$, где $\sigma(x)$ является инволютивным преобразованием, называются уравнениями с инволюцией. На отрезке $[a, b]$ в качестве такого преобразования часто рассматривается отображение вида $\sigma(x) = a + b - x$.

К настоящему времени корректность краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с различными типами инволюции, их качественные свойства, а также

спектральные характеристики достаточно подробно изучены. В работе [1] исследуются спектральные вопросы краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с инволюцией.

В данной работе с помощью метода параметризации профессора Д.Джумабаева [2], исследуются условия разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения

$$y'(x) = b_0 y(x) + b_1 y(1-x) + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

$$c_0 y(0) + c_1 y(1) = d, \quad (2)$$

где

$$b_0, b_1, c_0, c_1 \in R, \quad f(x) \in C[0, 1].$$

Введя обозначения $\mu = y\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $y(x) = u(x) + \mu$, из краевой задачи (1), (2) перейдем к следующей эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$u'(x) = b_0 u(x) + b_1 u(1-x) + f^*(x), \quad (3)$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (4)$$

$$c_0 u(0) + c_1 u(1) + (c_0 + c_1)\mu = d. \quad (5)$$

где

$$f^*(x) = f(x) + (b_0 + b_1)\mu.$$

При $\lambda < 0$ используя преобразование Лапласа, найдем решение задачи Коши (3), (4) в виде:

$$u(x) = \frac{b_0}{\sqrt{-\lambda}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin(\sqrt{-\lambda}(x-s)) f^*(s) ds + \frac{b_1}{\sqrt{-\lambda}} \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin(\sqrt{-\lambda}(x-1+s)) f^*(s) ds + \\ + \int_{\frac{1}{2}}^x \cos(\sqrt{-\lambda}(x-s)) f^*(s) ds. \quad (6)$$

Учитывая, что $f^*(x) = f(x) + (b_0 + b_1)\mu$ и подставляя полученное решение в краевое условие (5), получим линейное уравнение относительно введенного параметра. На основании однозначной разрешимости данной системы устанавливаем критерий однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2).

Theorem 1. Пусть $\lambda = b_0^2 - b_1^2 < 0$. Тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $q = (c_0 + c_1) \cos(\sqrt{-\lambda}(\frac{1}{2})) \neq 0$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

Ключевые слова: инволюция, краевая задача, метод параметризации, параметр, задача Коши, разрешимость.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34K06, 34K10

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кожанов А. И., Бжеумихова О. И. *Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией*, Сибирский математический журнал. – 2024. – Т. 65. – №. 5. – С. 953-964.

[2] Dzhumabayev DS. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, Maths Math Phys. – 1989. – 29(34). P. 34-46.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Е.М. ХАЙРУЛЛИН¹, А.С. АЖИБЕКОВА²

^{1,2}*Satbayev University, Алматы, Казахстан*

aliya_azhibek@mail.ru

Рассматривается уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta U(x, t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1)$$

в области $Q_{T_0} \equiv \{(x', x_n, t) : x' \in R^{n-1}, x_n \in]0, l[, t \in [0, T_0[\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$U(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\sum_{|k| \leq m} a_k^{(1)} D_x^k U(x, t)|_{x_n=0} = f_1(x', t), \quad (3)$$

$$\sum_{|k| \leq m} a_k^{(2)} D_x^k U(x, t)|_{x_n=l} = f_2(x', t), \quad m \in N, \quad (4)$$

где $a_k^{(i)}$ - заданные постоянные, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \dots D_{x_n}^{k_n}$, $D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, $a_{0,0,\dots,m} \neq 0$, $f_i(x', t)$ - заданные функции.

Решение задачи (1)-(4) ищется в виде теплового потенциала двойного слоя [1,2]:

$$\begin{aligned} U(x, t) = & - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Psi_1(\xi', \tau) \frac{\partial}{\partial x_n} g(x' - \xi', x_n, t - \tau, a) d\xi' + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Psi_2(\xi', \tau) \frac{\partial}{\partial x_n} g(x' - \xi', l - x_n, t - \tau, a) d\xi'. \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения предела производных функции $U(x, t)$, определяемой формулой (5), приведем Лемму.

Лемма 1. Если функция $\Psi(x', t) \in C_{x', t}^{m, [\frac{m}{2}]}(Q_{T_0})$, то

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\partial^{2k_n-1}}{\partial x_n^{2k_n-1}} D_{x'}^{k'} U(x, t) = \frac{1}{a^{2k_n}} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F^{k_n} [D_{\xi'}^{k'} \Psi(\xi', \tau)] g(x' - \xi', 0, t - \tau, a) d\xi', \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\partial^{2k_n}}{\partial x_n^{2k_n}} D_{x'}^{k'} U(x, t) = \\ - \frac{1}{a^{2k_n}} \lim_{x_n \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F^{k_n} [D_{\xi'}^{k'} \Psi(\xi', \tau)] \frac{\partial}{\partial x_n} g(x' - \xi', x_n, t - \tau, a) d\xi' = \\ = \frac{F^{k_n} [D_{x'}^{k'} \Psi(x', t)]}{a^{2k_n}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$F = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_{x'}, \quad \Delta_{x'} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Аналогично можно найти предел функции $U(x, t)$ при $x_n \rightarrow l$.

Подставляя функцию $U(x, t)$, определяемую формулой (5) в граничные условия (3) и (4), при этом используя Лемму 1, получим систему интегро-дифференциальных уравнений с оператором теплопроводности и производной от пространственных переменных x' :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{|k'|=m-2i} \frac{a_{k',2i}^{(1)}}{a^{2i}} F^i \left[D_{x'}^{k'} \Psi_1(x', t) \right] - \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{|k'|=m-2i+1} \frac{a_{k',2i-1}^{(1)}}{a^{2i-1}} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F^i \left[D_{\xi'}^{k'} \Psi_1(\xi', \tau) \right] g(x' - \xi', 0, t - \tau, a) d\xi' + \\ & + \sum_{|k| \leq m} a_k^{(1)} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} D_{\xi'}^{k'} \Psi_2(\xi', \tau) D_{x_n}^{k_n} g(x' - \xi', l, t - \tau, a) d\xi' = f_1(x', t), \quad m = 2n, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{|k'|=m-2i} \frac{a_{k',2i}^{(2)}}{a^{2i}} F^i \left[D_{x'}^{k'} \Psi_2(x', t) \right] - \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{|k'|=m-2i} \frac{a_{k',2i-1}^{(2)}}{a^{2i-1}} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F^i \left[D_{\xi'}^{k'} \Psi_2(\xi', \tau) \right] g(x' - \xi', 0, t - \tau, a) d\xi' + \\ & + \sum_{|k| \leq m} a_k^{(2)} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} D_{\xi'}^{k'} \Psi_2(\xi', \tau) D_{x_n}^{k_n} g(x' - \xi', l, t - \tau, a) d\xi' = f_2(x', t), \quad m = 2n + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Используя обратный оператор } F^{-m}[f] = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} f(\xi', \tau) \frac{(t-\tau)^{m-1}}{\Gamma(m)} g(x' - \xi', t - \tau) d\xi', \quad (8)$$

и (9) можно свести к системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \Psi_j(x', t) + \sum_{i=1}^m \sum_{|k'|=i} a_{k',m-i}^{(j)} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} D_{\xi'}^{k'} \Psi_j(\xi', \tau) \mathcal{H}_i(x' - \xi', t - \tau) d\xi' + \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Psi_{\alpha}(\xi', \tau) \mathcal{H}_{\alpha,j}(x' - \xi', t - \tau) d\xi' = \Phi_j(x', t), \end{aligned} \quad (10)$$

где функции $\Phi_j(x', t)$ зависят от заданной функции $f_j(x', t)$, ядра $\mathcal{H}_{\alpha,j}(x', t)$ удовлетворяют неравенству

$$|\mathcal{H}_{\alpha,j}(x', t)| \leq \mathcal{M}_{\alpha,j} \frac{\exp[-\frac{|x'|^2}{t}]}{(\sqrt{t})^{n-1}}, \quad (\alpha, j = 1, 2).$$

Характеристическую часть системы (10) можно решить применяя интегральные преобразования Фурье-Лапласа. Справедлива теорема.

Теорема 2. Если функции $f_j(x', t) \in C_{x',t}^{2,1}(Q_{T_0})$ и если q_k — корни характеристического уравнения

$$\sum_{\alpha=0}^m b_{\alpha}(\sigma') \lambda^{m-\alpha} = 0, \quad \sigma' = \frac{s'}{|s'|}, \quad s' = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$$

удовлетворяют неравенству $\text{Re} q_k^2(\sigma') > -1$, то существует функция $U(x, t) \in C_{x,t}^{m, [\frac{m}{2}]}(Q_{T_0})$.

Ключевые слова: тепловые потенциалы, граничные условия, производные высокого порядка, многомерное пространство.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K45, 58J35

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ким Е.И. Об условиях разрешимости одной граничной задачи уравнения теплопроводности, *Доклады АН СССР*, **3**:36 (1961), 253–258.

[2] Khairullin E.M., Azhibekova A.S. A general boundary value problem for heat and mass transfer equations with high order normal derivatives in boundary conditions. In: AIP Conf. Proc., vol. 2325(1):020011, pp. 1–6. AIP Publishing (2021).

О ЗАДАЧЕ ТИПА ФРАНКЛЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.У. ХУБИЕВ

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

khubiev_math@mail.ru

В 1956 году Ф. И. Франкль в работе [1] поставил задачу нового типа для уравнения Чаплыгина

$$k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (*)$$

где $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$.

Пусть Ω_0 – односвязная область, ограниченная отрезком AB $x = 0$, характеристикой DC уравнения (*), и кривой σ с концами в точках A и C , целиком лежащей в полуплоскости $y \geq 0$,

$$A = A(0, 1), \quad B = B(0, -1), \quad C = C(a, 0).$$

Задача ставится следующим образом: найти решение уравнения (*) при $y \neq 0$, $x \neq -y$, непрерывное в $\bar{\Omega}_0$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_{\sigma} = \varphi, \quad u_x|_{AB} = 0, \quad u(0, y) - u(0, -y) = f(y),$$

где $f(y)$ – заданная нечетная функция.

Эта задача впервые была решена А. В. Бицадзе для уравнения Лаврентьева-Бицадзе [2]. Впоследствии задачи с нелокальными условиями такого типа – связывающими значения функций на границах областей разного типа уравнений – стали называть задачами с условиями типа Франкля (аналогами задачи Франкля и т.д.). К этой задаче обращались многие авторы (библиографию см., например, в [3]–[6]). Отметим работы [5] и [6], в которых рассматривались нелокальные краевые задачи с условиями типа Франкля для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа в областях, гиперболическая часть которой не является прямоугольником.

Рассмотрим нагруженное [7] уравнение

$$\begin{cases} u_x - u_{yy} + \lambda u(x, 0) = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \mu u(x - y, 0) = 0, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1 > 0$ при $y > 0$, отрезками AC и BC характеристик $x + y = 0$ и $x - y = 1$ уравнения (1) при $y < 0$, $\lambda, \mu = \text{const}$.

Обозначим через

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\},$$

$$\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right), \quad \theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$$

аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(t, 0)$, с характеристиками AC и BC соответственно, а через $\theta(t) = (t, 1)$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Для уравнения нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа (1) рассматривается нелокальная задача с условиями типа Франкля, где краевое условие связывает между собой значения искомого решения на параболической части границы и в гиперболической части границы области – на характеристиках AC и BC [6].

Задача F. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u_y(y, 1) = \varphi_1(y), \quad 0 < y < 1, \quad (2)$$

$$\alpha u[\theta_0(t)] + \beta u[\theta_1(t)] = \gamma u[\theta(t)], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где $\varphi_0(y), \varphi_1(y)$ – заданные функции, $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$.

Для неоднородного уравнения (1) при $\lambda = \mu = 0$ задача F исследована в работе [6]. При $\gamma = 0$ условие (3) переходит в хорошо известную задачу со смещением [8].

В данной работе найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи F.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, нагруженное уравнение, нелокальная задача, задача Франкля.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся скачком уплотнения, *Прикладная математика и механика*, **20**:2 (1956), 196–202.
- [2] Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкля, *Доклады АН СССР*, **109**:6 (1956), 1091–1094.
- [3] Сабитов К.Б. О единственности решения задачи Франкля для уравнений смешанного типа, *Дифференц. уравнения*, **24**:5, (1988), 904–906.
- [4] Псху А.В. О решении задачи Франкля, *Дифференц. уравнения*, **36**:3 (2000). 421–422.
- [5] Псху А.В. Задача Франкля для гиперболо-параболического уравнениями, *Дифференц. уравнения*, **9**:1 (2003), 105–112.
- [6] Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. О задаче типа Франкля для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа, *Сиб. матем. журн.*, **58**:2 (2017), 298–304.
- [7] Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применение*. Наука, Москва (2012).
- [8] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. Наука, Москва (2006).

МУЛЬТИАГЕНТНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ: СРЕДНЕЕ ПОЛЕ И ОПЕРАТОР НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТИ

С.А. ЯКУНИН¹, О.И. КРИВОРОТЬКО²

^{1,2} Университет «Сириус», федеральная территория «Сириус», Россия

y.akunin.sa@talantiuspeh.ru

В задачах прогнозирования социально-экономических и финансовых временных рядов существенную роль играют взаимодействия большого числа агентов (домохозяйств, фирм, участников рынка), приводящие к нелинейной обратной связи между индивидуальным поведением и агрегированными показателями. В рамках работы рассматривается вычислительная схема, которая служит базовым элементом для дальнейшего перехода к играм среднего поля и нейросетевому приближению операторов динамики.

Постановка. Пусть состояние отдельного агента описывается процессом X_t (или C_t), а коллективное влияние задаётся распределением $\mu_t = \text{Law}(X_t)$ и агрегатами. Целью является построение оператора прогноза вида

$$\hat{y}_{t+1} = f_\theta(\mu_t, z_t), \quad (1)$$

где y_t — наблюдаемый временной ряд, z_t — набор наблюдаемых ковариат, f_θ — параметризованная (в частности, при помощи нейронных сетей) модель. Для корректной идентификации и валидации такого оператора требуется воспроизводимый контур: прямая задача (генерация траекторий по параметрам) и обратная задача (калибровка параметров по данным).

Численный контур инверсии. В качестве полигона рассматривается связанная экономико-эпидемиологическая динамика, где по годовым наблюдениям $y_k^{\text{obs}} = \log(Y_{\text{obs}}(t_k))$ и эпидемиологическому индикатору i_k^{obs} восстанавливается вектор параметров θ путём минимизации функционала несогласованности

$$\theta^* \in \arg \min_{\theta \in \Theta} J(\theta), \quad J(\theta) = W_Y L_Y(\theta) + W_I L_I(\theta), \quad (2)$$

где L_Y и L_I — функции ошибок по экономическому и эпидемиологическому каналам, включающие профилированный гауссовский NLL и штраф на «изломанность» остатков по времени. Минимизация (2) реализована численной оптимизацией по заданным диапазонам параметров с использованием Optuna.

Эксперимент. На данных из открытых источников (социально-экономические показатели и эпидемическая динамика) продемонстрирована работоспособность контура «модель, функционал, оптимизация» и получены параметры, обеспечивающие согласованное воспроизведение двух наблюдаемых рядов. Результаты используются как базовый шаг к постановке задач среднего поля: далее планируется перейти от конечномерных параметров к оцениванию параметров MFG-модели и построению нейросетевого оператора (1) для ускорения прогнозирования и решения обратных задач на финансовых временных рядах.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта государственной программы федеральной территории «Сириус» «Научно-технологическое развитие федеральной территории «Сириус»» (соглашение № 26-03 от 07.07.2025).

Ключевые слова: игры среднего поля; мультиагентные модели; обратные задачи; калибровка параметров; глубокое обучение.

2020 Mathematics Subject Classification: 91A16, 91G80, 49L20, 68T07

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Huang M., Malhamé R.P., Caines P.E. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean–Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle, *Communications in Information & Systems*, vol. 6, no. 3, pp. 221–252, 2006.
- [2] Lasry J.-M., Lions P.-L. Mean field games, *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 2, pp. 229–260, 2007.
- [3] Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 115, no. 772, pp. 700–721, 1927.
- [4] Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, no. 1, pp. 65–94, 1956.
- [5] Akiba T., Sano S., Yanase T., Ohta T., Koyama M. Optuna: A Next-generation Hyperparameter Optimization Framework, *Proc. of KDD*, 2019.

Solution of two-phase problems for the heat equation with non-local boundary conditions

N.T. ABDYRAKHIMOV¹, U.K. KOILYSHOV²

^{1,2}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹nabdyrakhimov@mail.ru, ²koylyshov@math.kz

We consider a two-phase initial-boundary value problem for the heat equation on the interval $0 \leq x \leq 1$, which is divided by an interior point $x = \frac{1}{2}$ into two subdomains:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \left\{ (x, t) : 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < t < T \right\}, \\ \Omega_1 &= \left\{ (x, t) : \frac{1}{2} < x < 1, 0 < t < T \right\}.\end{aligned}$$

In each subdomain, the function $u(x, t)$ satisfies the heat equation

$$Lu(x, t) = \begin{cases} u_t(x, t) - k_1^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < \frac{1}{2} \\ u_t(x, t) - k_2^2 u_{xx}(x, t), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} = f(x, t), \quad (1)$$

where $k_i > 0, (i = 1, 2)$ are the thermal conductivity coefficients of the corresponding media.

The initial condition is prescribed as

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

At the endpoints of the interval, the following nonlocal boundary conditions are imposed:

$$\begin{cases} u(0, t) - u(1, t) = 0, \\ \alpha_1 u_x(0, t) - \alpha_2 u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

where $\alpha_i > 0, (i = 1, 2)$ are given constants.

At the interface point $x = \frac{1}{2}$, the conjugation conditions are given by

$$\begin{cases} u(\frac{1}{2} - 0, t) = u(\frac{1}{2} + 0, t), \\ k_1 u_x(\frac{1}{2} - 0, t) = k_2 u_x(\frac{1}{2} + 0, t), \end{cases} \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

The problem consists in finding a function $u(x, t)$ that satisfies the differential equations in each subdomain, the initial condition, the nonlocal boundary conditions, and the conjugation conditions at the interface.

The theorem of existence and uniqueness of the solution to problem (1)-(4) has been proven.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: nonlocal boundary conditions, heat equation, two-phase problem, conjugation conditions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 34B24

Boundedness of generalized fractional maximal functions in generalized weight Lorentz spaces

A.N. ABEK¹, A. GOGATISHVILI²

¹*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

²*Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic*

¹azhar.abekova@gmail.com, ²gogatish@math.cas.cz

We give a characterization of the boundedness of generalized fractional maximal functions M_Φ between weighted Lorentz spaces. We show that this problem is equivalent to the boundedness of a supremum operator involving a Hardy operator

$$T_\Phi(f)(x) = \sup_{t \in (x, \infty)} \Phi(t^{\frac{1}{n}}) \int_0^t f$$

in the weighted Lebesgue space restricted to the cone of non-negative decreasing functions.

Suppose f is a locally-integrable function on $\mathbb{R}^n$. Then its non-increasing rearrangement f^* is given by

$$f^*(t) = \inf \{ \lambda > 0; |\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}| \leq t \}, \quad t \in (0, \infty),$$

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f^*(u) du.$$

Quite many familiar function spaces can be defined using the non-increasing rearrangement of a function. One of the most important classes of such spaces is the so-called classical Lorentz spaces.

Let $p \in (0, \infty)$ and let v be a weight, that is, a non-negative measurable and a.e. finite function on $(0, \infty)$. Then the classical Lorentz space $\Lambda^p(v)$ is defined as the set of all measurable functions f whose non-increasing rearrangement satisfies

$$\|f\|_{\Lambda^p(v)} := \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Let $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ be a locally integrable function and $\Phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ a function that determines a generalized fractional maximal operator via

$$(M_\Phi f)(x) = \sup_{r>0} \Phi(r) \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

where $B(x, r)$ is a ball with the center at the point $x \in \mathbb{R}^n$ and radius r .

Definition 1. [1] Let $n \in \mathbb{N}$ and $R \in (0; \infty]$. We say that a function $\Phi : (0; R) \rightarrow \mathbb{R}_+$ belongs to the class $A_n(R)$ if:

- (1) Φ is decreases and continuous on $(0; R)$;
- (2) the function $\Phi(r)r^n$ is quasi-increasing on $(0, R)$.

For example, $\Phi(t) = t^{-\alpha} \in A_n(\infty)$, $0 < \alpha < n$.

Theorem 2. [2] Let $\Phi \in A_n(\infty)$. Then there exists a positive constant C , depending only on Φ and n , such that

$$(M_\Phi f)^*(t) \leq C \sup_{t < s < \infty} s \Phi(s^{1/n}) f^{**}(s), \quad t \in (0, \infty),$$

for every $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. This inequality is sharp in the sense that for every $\varphi \in L^+_0(0, \infty; \downarrow)$ there exists a function $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ such that $f^* = \varphi$ a.e. on $(0, \infty)$ and

$$(M_\Phi f)^*(t) \geq C_1 \sup_{t < s < \infty} s \Phi(s^{1/n}) f^{**}(s), \quad t \in (0, \infty),$$

where C_1 is a positive constant which depends only on Φ and n .

For the case of classical fractional maximal function, such theorem was proved in [3].

Theorem 3. Let $0 < p, q < \infty$. Let be $\Phi \in A_n(\infty)$. The following inequality

$$\left(\int_0^\infty (M_\Phi(f^*)(x))^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty ([f^*(x)]^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

holds for all $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, if and only if the following inequality

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{x < s < \infty} \varphi(s) s f^{**}(s) \right)^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \left(\int_0^\infty (f^*(x))^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

holds for all $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. where $\varphi(t) := \Phi(t^{1/n})$.

Using the result from [4], we can obtain the following result:

Theorem 4. Let $0 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$. Assume that $\Phi \in A_n$, v and w are given non-negative weight functions. Then the inequality (1) holds for all $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ if and only if the following inequality is valid:

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{x \leq t < \infty} \phi(t) \int_0^t \left(\int_s^\infty h(y) dy \right) ds \right)^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty h(x)^p V(x)^p v(x)^{1-p} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

holds for all non-negative measurable functions h .

Theorem 5. [5] Let $0 < q \leq \infty$, $0 < p < 1$. Assume that $\Phi \in A_n$, v and w are given non-negative weight functions. Then the inequality (1) holds for all $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ if and only if the following inequality is valid:

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{x \leq t < \infty} \phi(t)^p \int_0^t s^{p-1} \left(\int_s^\infty h(y) dy \right) ds \right)^{\frac{q}{p}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty h(x) V(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

holds for all non-negative measurable functions h .

The characterization of inequalities (2) and (3) is given in the papers [6] and [7].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22686420).

Keywords: non-increasing rearrangements of functions, generalized fractional-maximal functions, reduction theorems, Hardy operators, Supremum operators, weighted inequalities, weighted Lotrentz spaces.

2020 Mathematics Subject Classification: 26B40, 26D10, 26D15, 41A44, 45P05, 47G10

References

[1] Bokayev, N.A., Gogatishvili, A., Abek, A.N. Cones generated by a generalized fractional maximal function, *Bulletin of the Karaganda University Mathematics series*, **110:2** (2023), 53–62.

- [2] Bokayev, N.A., Gogatishvili, A., Abek, A.N. On estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function, *Eurasian Math. J.*, **14**:2 (2023), 13–26.
- [3] Cianchi, A., Kerman, R., Opic, B., Pick, L. A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator, *Studia Mathematica*, **138**:3 (2000), 277–284.
- [4] Gogatishvili, A., Stepanov V.D. Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions, *Russian Math. Surveys*, **68**:4 (2013), 3–68.
- [5] Gogatishvili, A., Pick, L. A reduction theorem for supremum operators, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **208** (2007), 270–279.
- [6] Gogatishvili, A., Pick, L., Opic, B. Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema, *Collect. Math.*, **57**:3 (2006), 227–255.
- [7] Křepela M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema, *Collect. Math.*, **68**:1 (2017), 21–50.

On an equivalent embedding for generalized discrete Riesz potentials

A. ABSAMATOVA¹, G. KENZHEBEKOVA²

^{1,2}L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

¹adiya261198@gmail.com, ²gulmira0703@yandex.kz

The classical Riesz potential

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n,$$

is well known.

Let $0 < \alpha < n$ and $x = \{x(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{R}$ be a sequence. The discrete Riesz potential I_α is defined by

$$(I_\alpha x)(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n / \{k\}} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{n-\alpha}},$$

where $\|m_1, m_2, \dots, m_n\|_\infty = \max\{|m_i|, 1 \leq i \leq n\}$.

We say that the nonnegative sequence $\Phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ belongs to the class B_n , if the following conditions hold:

1. Φ decreases on $\mathbb{Z}_+$;
2. There exists a constant $C \in \mathbb{R}_+$ such that $\sum_{k=0}^r \Phi(k)k^{n-1} \leq C\Phi(r)r^n$, $r \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$.

The generalized discrete Riesz potential is defined by

$$(I_\omega x)(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n / \{k\}} \omega(k-i)x(i),$$

where the kernel ω satisfies the following condition $\omega(k) \cong \Phi(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, where $\Phi \in B_n$.

When $\omega(k) = \|k\|_\infty^{\alpha-n}$ the generalized discrete Riesz potential coincides with the discrete Riesz potential I_α ($0 < \alpha < n$).

The nonincreasing rearrangement of $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$ with respect to the counting measure μ is given by $u^*(k) = \inf\{\lambda > 0 : D_u(\lambda) \leq k\}$, for $k \in \mathbb{Z}^+$. Also define $u^{**}(k) = k^{-1} \sum_{i=1}^k u^*(i)$.

We consider the following cones of rearrangements, equipped with positive homogeneous functional

$$M_2 = \{h(k) = u^{**}(k), k \in \mathbb{Z}^+ : u \in H_{l_p}^\omega\},$$

$$\rho_{M_2}(h) = \inf\{\|u\|_{H_{l_p}^\omega} : x \in H_{l_p}^\omega, u^{**}(k) = h(k), k \in \mathbb{Z}^+\}.$$

In the following theorem we establish a criteria for embedding a generalized discrete potential space (the continuous case was considered in [1]-[2]).

Theorem 1. *For generalized discrete Riesz potential the embedding*

$$H_{l_p}^\omega(\mathbb{Z}^n) \hookrightarrow l_p(\mathbb{Z}^n)$$

is equivalent to the embedding $M_2 \hookrightarrow \tilde{l}_p(\mathbb{Z}^+)$, where $\tilde{l}_p$ is the Luxemburg representation for l_p , i.e. $\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} = \|x^*\|_{\tilde{l}_p(\mathbb{Z}^+)}$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26196065).

Keywords: Riesz potential, generalized discrete Riesz potential, cones of rearrangements, positive homogeneous functional.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D15

References

- [1] Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. Criteria for embedding generalized Bessel and Riesz potentials into rearrangement invariant spaces, *Eurasian Mathematical Journal*, **10**:2 (2019), 08–29.
- [2] Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. Cones of function with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials, *Mathematics notes*, **104**:3 (2018), 356–373.

On a method of proof of the completeness of derivative chains for a fourth-order polynomial operator pencil

A.R. ALIEV¹, G.M. GASIMOVA², E.S. RZAYEV³

^{1,2}Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan

^{1,3}Institute of Mathematics, Baku, Azerbaijan

¹alievaraz@asoiu.edu.az, ²gunel.qasimova@asoiu.edu.az, ³Elvin.Rzayev88@gmail.com

In a separable Hilbert space H we consider a fourth-order polynomial operator pencil:

$$P(\lambda) = \lambda^4 E + A^4 + \sum_{j=1}^4 \lambda^{4-j} A_j, \quad (1)$$

where E is the identity operator, A is a self-adjoint positive-definite operator, and A_j , $j = 1, 2, 3, 4$, are linear and generally speaking unbounded operators.

As is known, the domain of definition of the operator A^α ($\alpha \geq 0$) becomes the Hilbert space H_α with respect to the scalar product $(x, y)_\alpha = (A^\alpha x, A^\alpha y)$, $x, y \in D(A^\alpha)$; for $\alpha = 0$ we assume $H_0 = H$.

Below, by $L(X, Y)$ we mean the set of linear bounded operators acting from a Hilbert space X to another Hilbert space Y .

In this paper, we study the completeness of the derivative chain corresponding to the boundary value problem on the half-axis

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

$$u''(0) - Ku'(0) = \varphi, \quad u'''(0) = \psi \quad (3)$$

and constructed from the eigen- and adjointed vectors of the pencil (1), where $K \in L(H_{5/2}, H_{3/2})$, $\varphi \in H_{3/2}$, $\psi \in H_{1/2}$, $u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$ (see [1]). Here, derivatives are understood in the sense of distribution theory.

We established sufficient conditions on the operator coefficients of the boundary value problem (2), (3) for the completeness of the derivative chain of the pencil (1) in the space $H_{3/2} \oplus H_{1/2}$, and for this we used the results of the paper [2].

Funding: This research is funded by the Azerbaijan State Oil and Industry University under Internal Grant (Grant No. ED-07/2025).

Keywords: Hilbert space, polynomial operator pencil, completeness of derivative chains, boundary value problem, eigen- and adjointed vectors.

2020 Mathematics Subject Classification: 34G10, 34L10, 35J40

References

- [1] Lions J.L., Magenes E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Dunod, Paris, 1968; Mir, Moscow, 1971; Springer, Berlin, 1972.
- [2] Aliev A.R., Rzayev E.S. Solvability of boundary value problem for elliptic operator-differential equations of fourth order with operator boundary conditions, *Proc. Inst. Math. Mech. Nats. Acad. Sci. Azerb.*, **40**:Special Issue (2014), 13–22.

On algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories: piecewise monotonic-to-left case

A.B. ALTAYEVA¹, B.Sh. KULPESHOV²

¹*International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*

²*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

¹vip@altayeva.mail.ru, ²b.kulpeshov@kbtu.kz

This lecture concerns the notion of weak circular minimality being a variant of o-minimality for circularly ordered structures. Algebras of binary isolating formulas are studied for $\aleph_0$ -categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal theories of convexity rank greater than 1 with a trivial definable closure having a piecewise monotonic-to-left function to the definable completion of a structure. On the basis of the study, the authors present a description of these algebras. It is shown that for this case there exist only non-commutative algebras. A strict s -deterministicity of such algebras for some natural number s is also established.

Algebras of binary formulas are a tool for describing relationships between elements of the sets of realizations of an one-type at the binary level with respect to the superposition of binary definable sets. A *binary isolating formula* is a formula of the form $\varphi(x, y)$ such that for some parameter a the formula $\varphi(a, y)$ isolates a complete type in $S(\{a\})$. The concepts and notations related to these algebras can be found in the papers [1]–[2].

The *circular order* is described by a ternary relation K satisfying the following conditions:

- (co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow K(y, z, x))$;
- (co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;
- (co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow \forall t [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)])$;
- (co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \vee K(y, x, z))$.

The notion of *weak circular minimality* was studied initially in [3]. Let $A \subseteq M$, where M is a circularly ordered structure. The set A is called *convex* if for any $a, b \in A$ the following property is satisfied: for any $c \in M$ with $K(a, c, b)$, $c \in A$ holds, or for any $c \in M$ with $K(b, c, a)$, $c \in A$ holds. A *weakly circularly minimal structure* is a circularly ordered structure $M = \langle M, K, \dots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many convex sets in M .

Let M be an $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structure, $G := \text{Aut}(M)$. The group G is called *k-transitive* if for any pairwise distinct $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ and pairwise distinct $b_1, b_2, \dots, b_k \in M$ there exists $g \in G$ such that $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \dots, g(a_k) = b_k$. A *congruence* on M is an arbitrary G -invariant equivalence relation on M . The group G is called *primitive* if G is 1-transitive and there are no non-trivial proper congruences on M .

The *definable completion* $\overline{M}$ of a structure M consists of M together with all definable cuts in M that are irrational (essentially $\overline{M}$ consists of endpoints of definable subsets of the structure M).

Let $F(x, y)$ be an L -formula such that $F(M, b)$ is convex infinite co-infinite for each $b \in M$. Let $F^\ell(y)$ be the formula saying y is a left endpoint of $F(M, y)$:

$$\begin{aligned} & \exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, y, z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1, t_1, y) \wedge t_1 \neq y \rightarrow \neg F(t_1, y)) \wedge \\ & \quad \forall t_2 (K(y, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq y \rightarrow F(t_2, y))], \end{aligned}$$

where $K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge y \neq x \wedge y \neq z \wedge x \neq z$.

We say that $F(x, y)$ is *convex-to-right* if

$$M \models \forall y \forall x [F(x, y) \rightarrow F^\ell(y) \wedge \forall z (K(y, z, x) \rightarrow F(z, y))].$$

Consider $F(M, a)$ for arbitrary $a \in M$. In general, $F(M, a)$ has no the right endpoint in M . For example, if $dcl(\{a\}) = \{a\}$ holds for some $a \in M$ then for any convex-to-right formula $F(x, y)$ and any $a \in M$ the formula $F(M, a)$ has no the right endpoint in M . We write $f(y) := \text{rend } F(M, y)$, assuming that $f(y)$ is the right endpoint of the set $F(M, y)$ that lies in general in the definable completion $\overline{M}$ of M . Then f is a function mapping M in $\overline{M}$.

Let $E(x, y)$ be an $\emptyset$ -definable equivalence relation partitioning M into infinite convex classes. Suppose that y lies in $\overline{M}$ (non-obligatory in M). Then

$$E^*(x, y) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 \neq y_2 \wedge \forall t (K(y_1, t, y_2) \rightarrow E(t, x)) \wedge K_0(y_1, y, y_2)].$$

Let f be a function from M to $\overline{M}$. We say f is *monotonic-to-right (left) on M* if it preserves (reverses) the relation K_0 . We also say that f is *piecewise monotonic-to-right (left) on M* if there exists an $\emptyset$ -definable non-trivial equivalence relation $E(x, y)$ partitioning M into finitely many infinite convex classes so that f is monotonic-to-right on each E -class and f is not monotonic-to-left (right) on M/E , where by M/E we denote the set of representatives of E -classes in M .

Theorem 1. [4] *Let M be an $\aleph_0$ -categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal structure of convexity rank greater than 1, $dcl(\{a\}) = \{a\}$ for some $a \in M$. Suppose that there exists a convex-to-right formula $R(x, y)$ such that $r(y) := \text{rend } R(M, y)$ is piecewise monotonic-to-left on M . Then M is isomorphic up to binarity to*

$$M'_{s,m,k} := \langle M, K^3, E_1^2, E_2^2, \dots, E_s^2, E_{s+1}^2, R^2 \rangle,$$

where M is a circularly ordered structure, M is densely ordered, $s \geq 1$; E_{s+1} is an equivalence relation partitioning M into m infinite convex classes without endpoints; E_i for every $1 \leq i \leq s$ is an equivalence relation partitioning every E_{i+1} -class into infinitely many infinite convex E_i -subclasses without endpoints so that the induced order on E_i -subclasses is dense without endpoints; $R(M, a)$ has no right endpoint in M and $r^k(a) = a$ for all $a \in M$ and some $k \geq 2$, where $r^k(y) := r(r^{k-1}(y))$; for every $1 \leq i \leq s+1$ and any $a \in M$

$$M'_{s,m,k} \models \neg E_i^*(a, r(a)) \wedge \forall y (E_i(y, a) \rightarrow \exists u [E_i^*(u, r(a)) \wedge E_i^*(u, r(y))]),$$

$m \geq 4$, k is even and k divides m ; r is monotonic-to-left on every E_{s+1} -class and r is monotonic-to-right on M/E_{s+1} .

Let M be an 1-transitive structure. We denote every binary isolating formula acting in M by a label $u \in \rho_M$, where ρ_M denotes the set of all labels for the algebra $\mathcal{P}_M$ of binary isolating formulas of the structure M . We say that the algebra $\mathcal{P}_M$ is *m-deterministic* if the product $u_1 \cdot u_2$ consists of at most m elements for any labels $u_1, u_2 \in \rho_M$. We also say that an m -deterministic algebra $\mathcal{P}_M$ is *strictly m-deterministic* if it is not $(m-1)$ -deterministic.

Theorem 2. *The algebra $\mathfrak{P}_{M'_{s,4,4}}$ of binary isolating formulas with piecewise monotonic-to-left function r has $8s+9$ labels, is non-commutative and strictly $(2s+3)$ -deterministic for every $s \geq 1$.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685890).

Keywords: algebra of binary formulas, $\aleph_0$ -categorical theory, weak circular minimality, circularly ordered structure, convexity rank.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07

References

- [1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 380–407.
- [2] Sudoplatov S.V. *Classification of countable models of complete theories*, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (2018).
- [3] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, *Mathematical Logic Quarterly*, **51**:4 (2005), 377–399.
- [4] Kulpeshov B.Sh. Definable functions in the $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures, *Siberian Mathematical Journal*, **50**:2 (2009), 282–301.

Heat Equation driven by mixed local-nonlocal operators with non-regular space-dependent coefficients

A. ALTYBAY¹, M. RUZHANSKY²

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Ghent University, Krijgslaan 281, Building S8, B 9000 Ghent, Belgium*

²*School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London, United Kingdom*

¹arshyn.altybay@gmail.com, ²michael.ruzhansky@ugent.be

In this paper, we study the Cauchy problem for a heat equation governed by a mixed local–nonlocal diffusion operator with spatially irregular coefficients. We first establish classical well-posedness in an energy framework for bounded, measurable coefficients that satisfy uniform positivity, and we derive an a priori estimate ensuring uniqueness and continuous dependence on the initial data. We then extend the notion of solution to distributional coefficients and initial data by a Friedrichs-type regularisation procedure. Within this very weak framework, we establish the existence and uniqueness of solution nets and prove consistency with the classical weak solution whenever the coefficients are regular.

Motivated by ecological models in which individuals move by a superposition of (i) local Brownian diffusion and (ii) long-range Lévy-type jumps, Dipierro and Valdinoci [1] derived evolution equations whose dispersal mechanism is governed by the mixed operator

$$\mathcal{L}_0 u := -\Delta u + (-\Delta)^s u, \quad s \in (0, 1). \quad (1)$$

Here the local part $-\Delta$ describes short-range random motion, whereas the fractional Laplacian $(-\Delta)^s$ encodes long-range interactions and jump processes. In the whole space $\mathbb{R}^d$, $(-\Delta)^s$ may be defined via the principal value integral

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{d,s} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2s}} dy,$$

so that $\mathcal{L}_0$ corresponds (up to sign conventions) to the infinitesimal generator of a stochastic motion obtained by superposing a Brownian component with an independent symmetric α -stable jump process, $\alpha = 2s$ [2,3]. In bounded domains, the mixed nature of (1) leads naturally to boundary conditions that combine a classical Neumann constraint for the local part with a genuinely nonlocal flux condition for the fractional component, as proposed in [1]. A systematic PDE analysis of elliptic problems driven by (1) was later developed in [4].

In this paper, we extend (1) by allowing variable coefficients and consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2)$$

where $\mathcal{L}$ is the mixed local–nonlocal operator

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + (-\Delta)^{s/2} (b(x)(-\Delta)^{s/2}u) + c(x)u, \quad 0 < s < 1.$$

Here u denotes a scalar state variable (e.g., temperature, concentration, density), u_0 is the initial datum. The coefficients a, b, c are assumed real-valued, with $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$, and $c(x) \geq c_0 \geq 0$ for a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. Moreover, $(-\Delta)^{s/2}$ denotes the (Riesz) fractional Laplacian. Note that when $b \equiv \text{const}$, the fractional term reduces to $b(-\Delta)^s u$.

More precisely, the divergence-form term $-\nabla \cdot (a(x)\nabla u)$ models heterogeneous classical diffusion, whereas the fractional component $(-\Delta)^{s/2} (b(x)(-\Delta)^{s/2}u)$ incorporates nonlocal effects of order $2s$ modulated by $b(x)$. The lower-order term $c(x)u$ may be interpreted, depending on the application, as reaction, damping, or absorption.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (No. AP27508473).

Keywords: heat Equation, mixed local-nonlocal operator, very weak solutions, singular coefficients, energy estimate.

2020 Mathematics Subject Classification: 35D99, 35K67, 34A45

References

- [1] S. Dipierro, E. Valdinoci, Description of an ecological niche for a mixed local/nonlocal dispersal: An evolution equation and a new Neumann condition arising from the superposition of Brownian and Lévy processes, *Physica A* 575 (2021) 126052.
- [2] Z.-Q. Chen, P. Kim, R. Song, Global heat kernel estimates for $\Delta + \Delta^{\alpha/2}$ in half-space-like domains, *Electron. J. Probab.* 17 (2012) no. 32, 1–32.
- [3] Z.-Q. Chen, P. Kim, R. Song, Z. Vondráček, Boundary Harnack principle for $\Delta + \Delta^{\alpha/2}$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (2012) 4169–4205.
- [4] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, E. Vecchi, Mixed local and nonlocal elliptic operators: regularity and maximum principles, *Commun. Partial Differ. Equ.* 47 (2022) 585–629.

Necessary conditions for solvability of q -fractional boundary value problems

Ainash ALTYNBEKKYZY¹, N.S. TOKMAGAMBETOV²

^{1,2}*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*

¹ainashaltunbek@gmail.com, ²nariman.tokmagambetov@gmail.com

Consider the fractional q -difference equation with generalized Robin boundary conditions

$$\begin{cases} D_{q,a}^{\alpha} y(t) + h(t) = 0, & a < t < b, \\ l I_{q,a}^{2-\alpha} y(a) - m D_{q,a}^{\alpha-1} y(a) = 0, \\ n y(b) + p D_{q,a}^{\alpha-1} y(b) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $1 < \alpha \leq 2$, $h \in L_q(a, b)$, and $l, p \geq 0$, $m, n > 0$ are real parameters [1].

Theorem 1 (*q*-Green's function). *Problem (1) has a unique solution $y(t) = \int_a^b G_q(t, s)h(s) d_qs$, where*

$$G_q(t, s) = \begin{cases} G_{q,1}(t, s), & a < s \leq t \leq b, \\ G_{q,2}(t, s), & a < t \leq s \leq b, \end{cases}$$

with

$$G_{q,1}(t, s) = G_{q,2}(t, s) - \frac{(t-s)_q^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)},$$

$$G_{q,2}(t, s) = \frac{l(t-a)_q^{\alpha-1} + m(\alpha-1)_q(t-a)_q^{\alpha-2}}{A_q} \left(\frac{n(b-s)_q^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)} + p \right),$$

$(\alpha-1)_q = (1-q^{\alpha-1})/(1-q)$, and $A_q = ln(b-a)_q^{\alpha-1} + mn(\alpha-1)_q(b-a)_q^{\alpha-2} + lp\Gamma_q(\alpha)$.

Theorem 2 (Positivity and bounds). *The q -Green's function satisfies $G_q(t, s) > 0$ for all $(t, s) \in (a, b] \times (a, b]$. Moreover,*

$$\max_{s \in [a, b]} G_q(t, s) = G_q(t, t), \quad t \in [a, b],$$

and

$$(t-a)^{2-\alpha} G_q(t, t) \leq \frac{l(b-a)^{2-\alpha}(b-a)_q^{\alpha-1} + m(\alpha-1)_q M_q}{A_q} \left(\frac{n(b-a)_q^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)} + p \right),$$

where $M_q = \max_{t \in [a, b]} (t-a)^{2-\alpha}(t-a)_q^{\alpha-2}$. Furthermore,

$$\int_a^b (t-a)^{2-\alpha} G_q(t, s) d_qs \leq \frac{l(b-a)^{2-\alpha}(b-a)_q^{\alpha-1} + m(\alpha-1)_q M_q}{A_q} \left(\frac{n(b-a)_q^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)} + p(b-a) \right).$$

Using these estimates and a fixed point argument in $C_{2-\alpha}[a, b]$, we obtain the following q -Lyapunov inequality.

Theorem 3 (*q*-Lyapunov inequality). *If the boundary value problem*

$$\begin{cases} D_{q,a}^\alpha y(t) + q(t)y(t) = 0, & a < t < b, \\ l I_{q,a}^{2-\alpha} y(a) - m D_{q,a}^{\alpha-1} y(a) = 0, \\ n y(b) + p D_{q,a}^{\alpha-1} y(b) = 0, \end{cases}$$

has a nontrivial solution with $q \in C(a, b)$, then

$$\int_a^b (s-a)^{\alpha-2} |q(s)| d_qs > \frac{A_q \Gamma_q(\alpha)}{[n(b-a)_q^{\alpha-1} + p\Gamma_q(\alpha)] [l(b-a) + m(\alpha-1)_q M'_q]},$$

where $M'_q = \max_{t \in [a, b]} (t-a)^{2-\alpha}(t-a)_q^{\alpha-2}$ (same as M_q).

Special choices of parameters yield q -analogues of classical cases [2]:

- For $l = p = 0$ (left-focal conditions): $\int_a^b (s-a)^{\alpha-2} |q(s)| d_qs > \frac{\Gamma_q(\alpha)}{b-a}$.
- For $l = n = 1, m = p = 0$ (Dirichlet): $\int_a^b (s-a)^{\alpha-2} |q(s)| d_qs > \Gamma_q(\alpha) \left(\frac{4}{b-a} \right)^{\alpha-1}$.
- For $l = m = n = p = 1$ (Robin): a more involved constant appears.

These results extend the classical Lyapunov inequality ($\alpha = 2$, $q \rightarrow 1^-$) and its fractional analogues to the quantum calculus setting. Full details and applications to eigenvalue problems and q -Mittag-Leffler functions will appear in a forthcoming paper.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22687134, 2024-2026).

Keywords: q -fractional calculus, Lyapunov inequality, boundary value problems, Green's function, quantum calculus.

2020 Mathematics Subject Classification: 39A13, 34A08, 34B15, 26D15

References

- [1] Basua D., Jonnalagadda J.M. Lyapunov-type inequalities for Riemann-Liouville type fractional boundary value problems, *Novi Sad J. Math.*, **49**:2 (2019), 137–152.
- [2] Annaby M.H., Mansour Z.S. *q-Fractional Calculus and Equations*, Lecture Notes in Mathematics 2056, Springer (2012).

On the construction of a solution to a boundary value problem with a time-asymmetric condition for the viscous-transonic equation in a semi-infinite domain

Yu.P. APAKOV¹, Kh.K. IBROKHIMOV²

¹ V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

^{1,2} Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan

¹yusupjonapakov@gmail.com, ²xusniddin571@mail.ru

Third-order partial differential equations play a significant role in addressing problems within nonlinear acoustics theory, as well as in the hydrodynamic study of space plasma and fluid flow through porous media [1].

In [2], taking into account the properties of viscosity and thermal conductivity of the gas, a third-order equation with multiple characteristics was obtained from the Navier-Stokes system, containing the second derivative with respect to time

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y}u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const.}$$

For $\nu = 1$, this equation models an axisymmetric flow, whereas for $\nu = 0$, it represents a plane-parallel flow [3].

Let us consider the following equation

$$L[u] \equiv u_{xxx} + u_{yy} + \mu u = 0, \tag{1}$$

in the domain $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < q\}$. Here $\mu, q \in \mathbb{R}$.

Problem B_1 . Find a regular solution $u(x, y)$ of Equation (1), which belonging to the class $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$ of the functions and as $x \rightarrow +\infty$, the first-order derivative with respect to y and the second-order derivative with respect to x are bounded and uniform with respect to the variable y , moreover, $u_y \in L_2(D^+)$, and satisfying the following boundary conditions:

$$u(x, 0) = u_y(x, q) = 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \tag{2}$$

$$\begin{cases} au(0, y) + bu_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \\ u_x(0, y) = \psi_2(y), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq y \leq q \tag{3}$$

where, $\Gamma_1 = \partial D^+$ is boundary of the domain D^+ and a, b are given constants such that : $a^2 + b^2 \neq 0$. Additionally, $\psi_i(y)$, $(i = 1, 2)$ are given sufficiently smooth functions, and they satisfy the following conditions:

$$\psi_i(0) = \psi'_i(q) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Theorem 1. *If there exists a solution to Problem B_1 and satisfy conditions $ab \leq 0$, $\mu \leq 0$ then it is unique.*

Proof. Let assume that, Problem B_1 have two solutions $u_1(x, y)$ and $u_2(x, y)$. The Equation (1) is linear equation, since that, the function $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ is solution to Equation (1) with homogeneous boundary conditions. Let us prove that $u(x, y) \equiv 0$ is in $D^+ \cup \Gamma_1$.

In the domain D^+ the following identity is valid:

$$u L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) - u_y^2 + \mu u^2 = 0. \quad (5)$$

Integrating identity (5) over domain $D_p^+ = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$, we have

$$\int_0^p \int_0^q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) \right] dx dy - \int_0^p \int_0^q u_y^2 dx dy + \mu \int_0^p \int_0^q u^2 dx dy = 0, \quad (6)$$

where $p > 0$. If $p \rightarrow +\infty$, then $D_p^+ \rightarrow D^+$, taking the homogeneous boundary conditions of Problem B_1 into account and the condition $a \neq 0$, we obtain that:

$$\frac{1}{2p} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^q u_x^2(p, y) dy - \frac{b}{a} \int_0^q u_{xx}^2(0, y) dy + \iint_{D^+} u_y^2(x, y) dx dy - \mu \iint_{D^+} u^2(x, y) dx dy = 0. \quad (7)$$

Assume that $\mu = 0$. Then, by the conditions of Theorem 1, namely $ab \leq 0$, we obtain $u_y(x, y) = 0$. From this, we have $u(x, y) = f(x)$. Taking into account the boundary condition (2), which implies $u(x, 0) = 0$, we conclude that $f(x) = 0$. Therefore, $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D^+ \cup \Gamma_1$.

If $\mu < 0$, then from the fourth term it follows directly that $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D^+ \cup \Gamma_1$.

In the case $b \neq 0$, the equality $u(x, y) \equiv 0$ can be established in the domain $D^+ \cup \Gamma_1$ in an analogous manner.

Theorem 2. *If $\psi_i(y) \in C^2[0, q]$, $(i = 1, 2)$ $a \neq bk_n^2$ and (4) are satisfied, then a solution of the problem B_1 exists.*

Theorem 2 is proven using the method of separation of variables; that is, the solution is sought as a product of two functions, $X(x)$ and $Y(y)$. To determine $Y(y)$, a second-order ordinary differential equation was obtained with two asymmetric conditions at the boundaries of the segment $[0, q]$. For this problem, eigenvalues and their corresponding eigenfunctions were found for $n \in \mathbb{N}$. The completeness of the system of eigenfunctions $Y_n(y)$ is demonstrated in [4]. The solution to the specified problem is found in the form of an infinite series; its uniform convergence and the possibility of term-by-term differentiation under certain conditions on the given functions are proven. While justifying the uniform convergence of the solution, the absence of a "small denominator" is established.

Keywords: Equations with multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, method of separated variables, eigenvalue, eigenfunction, functional series, absolute and uniform convergence.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J08, 35G10, 35C10

References

- [1] T.K. Yuldashev. Inverse problem for a Fredholm third order partial integro-differential equation. *Bulletin of Samara state technical university, Series Physical and mathematical sciences* **34**, No 1, 56-65, (2014). [in Russian]

[2] O.S. Ryjov. Asymptotic picture of the flow around bodies of revolution with a sound flow of viscous and heat-conducting gas. *Appl. Mathematics and Mechanics*. **29**, No 6, 1004-1014, (1962). [in Russian]

[3] V.N. Diesperov. O funktsii Grina linearizovannogo vyazkogo transzvukovogo uravneniya. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics* **12**, No 5, 1265-1279, (1972). [in Russian]

[4] Yu.P. Apakov., R.A. Umarov. On the completeness of eigenfunctions of a boundary value problem with asymmetric conditions for a third-order equation with multiple characteristics. *Non-classical equations of mathematical physics and their applications: Proceedings of the International Scientific Conference dedicated to the 90th anniversary of Academician T.D. Dzhusraev: Conference Abstract*. p.124, (2024). [in Russian]

Vibration transport solution of the two dimensional Klein-Gordon-Fock equation

G.D. AREPOVA¹, L.A. ALEXEYEVA², A. ISHAN³

^{1,3}SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

²Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

¹gaukhar.arepova@sdu.edu.kz, ²alexeeva@math.kz, ³241101010@sdu.edu.kz

Let us consider the two-dimensional Klein-Gordon-Fock equation:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right) + m^2 u(x_1, x_2, t) = F(x_1, x_2, t), \quad (1)$$

here

$$F(x_1, x_2, t) = G(x_1, x_2 + \vartheta t) e^{i\omega t}. \quad (2)$$

If the right side of the equation is of the form (1), then it is natural to look for a solution in the form:

$$u(x_1, x_2, t) = g(x_1, x_2 + \vartheta t) e^{i\omega t} = g(x_1, z) e^{i\omega t}, \quad (3)$$

where $z = x_2 + \vartheta t$.

In work [1], solutions were obtained for the wave equation in the following cases: subsonic, sonic, supersonic. Here we obtain solutions for the Klein-Gordon-Fock equation in the following cases: subluminal, luminous, superluminal.

Theorem 1. *The solutions of the two dimensional Klein-Gordon-Fock equation for different values of the Mach number can be represented as follows:*

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, t) = g_1(x_1, x_2 + \vartheta t) e^{i\omega t}, & \text{if } M < 1, \\ u_2(x_1, x_2, t) = g_2(x_1, x_2 + \vartheta t) e^{i\omega t}, & \text{if } M > 1, \\ u_3(x_1, x_2, t) = g_3(x_1, x_2 + \vartheta t) e^{i\omega t}, & \text{if } M = 1, \end{cases} \quad (4)$$

where the functions $g_i(x_1, x_2 + \vartheta t)$ are convolutions of the fundamental solutions $E_i(x_1, x_2 + \vartheta t)$ with source functions $G_i(x_1, x_2 + \vartheta t)$:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2 + \vartheta t) &= E_1(x_1, x_2 + \vartheta t) * G_1(x_1, x_2 + \vartheta t), \\ g_2(x_1, x_2 + \vartheta t) &= E_2(x_1, x_2 + \vartheta t) * G_2(x_1, x_2 + \vartheta t), \\ g_3(x_1, x_2 + \vartheta t) &= E_3(x_1, x_2 + \vartheta t) * G_3(x_1, x_2 + \vartheta t), \end{aligned} \quad (5)$$

corresponding to the following fundamental solutions

$$\begin{aligned} E_1(x_1, x_2 + \vartheta t) &= -\frac{ie^{\frac{iz}{\mu^2} \frac{Mk}{2}}}{4\mu} H_0^{(1)} \left(\frac{\beta_1}{\mu} \sqrt{\mu^2 x_1^2 + z^2} \right), \\ E_2(x_1, x_2 + \vartheta t) &= \frac{e^{-iz \frac{Mk}{\mu^2}} H\left(\frac{z}{\mu} - |x_1|\right)}{2\mu} J_0 \left(\frac{\beta_1}{\mu} \sqrt{z^2 - \mu^2 x_1^2} \right), \\ E_3(x_1, x_2 + \vartheta t) &= \frac{H(z)}{\sqrt{8\pi i k z}} e^{\left(i \frac{k x_1^2}{2z} - iz \frac{\beta_3^2}{2k}\right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674789).

Keywords: Klein-Gordon-Fock equation, vibration transport solution, fundamental solution, Mach number.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q40, 35L10, 35K10

References

[1] Alekseeva L.A. Subsonic vibration transport solutions of the wave equation in spaces of dimension $N=1,2,3$, *Bulletin of the NAS RK. Physical and Mathematical Series.*, **4**:352 (2024), 42–59.

An Operator-Theoretic Approach to the Well-posedness of Advection-Diffusion Equations

Allaberen ASHYRALYEV¹, Maksat ASHYRALIYEV²

¹*Department of Mathematics, Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye*

¹*Peoples Friendship University Russia, Ul Miklukho Maklaya 6, Moscow 117198, RF*

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Malardalen University, Sweden*

allaberen@gmail.com, mashyr@yahoo.com

This paper develops and applies an operator-theoretic method for the analysis of stability properties of differential equations of the advection-diffusion type. Such equations arise naturally in the mathematical modeling of transport phenomena in physics, engineering, biology, and environmental sciences, where the combined effects of convection and diffusion are essential. The proposed approach is based on an operator formulation of the associated initial-boundary value problems in appropriate Hilbert and Banach spaces.

Operators corresponding to advection-diffusion equations with classical and nonclassical boundary conditions are investigated. Their spectral and resolvent properties are analyzed, and semigroup theory together with operator-based energy estimates is employed to establish sufficient conditions for well-posedness and stability.

The results show that the operator approach provides a unified and rigorous framework for the stability analysis of advection-diffusion equations and related evolutionary problems, and it can be extended to more general classes of partial differential equations with involution, mixed, or nonlocal boundary conditions.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR24993094).

Keywords: advection-diffusion equation, operator method, Banach space, well-posedness, positive operator, initial-boundary value problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B10, 35K10, 49K40

References

- [1] Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Operator Theory: Advances and Applications, **148**, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004.
- [2] Lunardi A. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- [3] Skubachevskii A. L. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1997.
- [4] Krein S.G. *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971.

Stability Analysis for Advection–Diffusion Equations and Their Numerical Approximations

Allaberen ASHYRALYEV¹, Maksat ASHYRALIYEV², Ezgi SOYKAN URUN³

¹*Department of Mathematics, Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye*

¹*Peoples Friendship University Russia, Ul Miklukho Maklaya 6, Moscow 117198, RF*

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Malardalen University, Sweden*

³*Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye*

allaberen@gmail.com, mashyr@yahoo.com, ezgiisoykan@gmail.com

Advection–diffusion type partial differential equations arise in many fields of science and engineering. In the numerical solution of these equations, the issue of stability is of critical importance. A particularly effective framework for stability analysis is provided by unconditionally absolutely stable difference schemes involving unbounded operators. The present paper is devoted to study of the initial value problem for advection-diffusion equations. Theorems on stability estimates for the solutions of this problem are established. The first and second order of accuracy difference schemes for approximately solving this initial value problem are presented. Theorems on stability estimates for the solutions of these difference schemes are established. In practice, theorems on stability estimates for the solutions of four initial boundary value problems for the advection-diffusion equations are proved. Numerical analysis and simulation are given.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR24993094).

Keywords: advection-diffusion equation, operator method, Hilbert space, difference Schemes, stability, positive operator, initial boundary value problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B10, 35K10, 49K40

References

- [1] Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Operator Theory: Advances and Applications, **148**, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004.
- [2] Lunardi A. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- [3] Skubachevskii A. L. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1997.
- [4] Krein S.G. *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971.
- [5] Sobolevskii P. E. *Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations*, Voronezh State University Press, Voronezh, 1975. (Russian).
- [6] Ashyralyev A., Sarsanbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38:10,(2017),1295-1305.

On an example of non-orthogonality of 1-types in linearly ordered theories

B.S. BAIZHANOV¹, O.A. UMBETBAYEV², T.S. ZAMBARNAYA³

^{1,2,3}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

¹baizhanov@math.kz, ²umbetbayev@math.kz, ³zambarnaya@math.kz

In o-minimal, weakly o-minimal, and quite o-minimal theories, the set of all realizations of an arbitrary complete 1-type is convex. In general, however, this is not true. There can be several 1-types with the same convex closure. We generalize the notions of non-orthogonality for weakly o-minimal theories and introduce definitions of weak convex-orthogonality and almost convex-orthogonality of the convex closures of complete 1-types in theories with a linear order. We describe the relationships between weak, almost orthogonalities, weak and almost convex-orthogonalities of types. In weakly o-minimal theories, if p and q are in $S_1(A)$ such that $p \not\perp^w q$, then p is definable if and only if q is definable [2]. However, in general, this is not true as shown by Example 5.

Definition 1. 1) The *convex closure* of a formula $\varphi(x, \bar{a})$ is the following:

$$\varphi^c(x, \bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 (\varphi(y_1, \bar{a}) \wedge \varphi(y_2, \bar{a}) \wedge (y_1 \leq x \leq y_2)).$$

2) The *convex closure* of a type $p(x) \in S_1(A)$ is the following type:

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x, \bar{a}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Definition 2. We say that p^c is *not weakly convex-orthogonal* to q^c and write $p^c \not\perp^{cw} q^c$ for this, if there exists a convex monotonic on $p^c(\mathfrak{M})$ A -definable formula $\varphi(x, y)$, such that for each $\alpha \in p^c(\mathfrak{M})$, there exist $\beta_1, \beta_2 \in q^c(\mathfrak{M})$ with $\beta_1 \in \varphi(\mathfrak{M}, \alpha)$, $\beta_2 \notin \varphi(\mathfrak{M}, \alpha)$ and $\beta_1 < \beta_2$.

Definition 3. We say that p^c is *not almost convex-orthogonal* to q^c and write $p^c \not\perp^{ca} q^c$ for this, if there exists an A -definable convex monotonic on $p^c(\mathfrak{M})$ formula $\varphi(x, y)$, such that for all $\alpha \in p^c(\mathfrak{M})$ there are $\gamma_1, \gamma_2 \in q^c(\mathfrak{M})$ such that $\emptyset \neq \varphi(\mathfrak{M}, \alpha)$ and $\gamma_1 < \varphi(\mathfrak{M}, \alpha) < \gamma_2$.

Remark 4. Let $A \subset N$, $\mathfrak{M}$ be an $|A|^+$ -saturated model of a theory with a linear order, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types. Then

- 1) $p \not\perp^w q \Leftrightarrow q \not\perp^w p$;
- 2) $p \not\perp^a q \Rightarrow p \not\perp^w q$;
- 3) $p^c \not\perp^{ca} q^c \Rightarrow p^c \not\perp^{cw} q^c$;
- 4) $p^c \not\perp^{cw} q^c \Rightarrow p_0 \not\perp^w q_0$ for each $p_0 \in S_1(A)$ with $p_0^c = p^c$ and each $q_0 \in S_1(A)$ with $q_0^c = q^c$;
- 5) $p^c \not\perp^{ca} q^c \Rightarrow p_0 \not\perp^a q_0$ for each $p_0 \in S_1(A)$ with $p_0^c = p^c$ and some $q_0 \in S_1(A)$ with $q_0^c = q^c$.

Example 5. Let $\mathfrak{M} = \langle M; =, <, P^1, S^1, \varphi^2 \rangle$, where $M = (0, 1) \cup (1, +\infty) \subset \mathbb{R}$, P and S are unary predicates such that $P(\mathfrak{M}) = (0, 1)$ and $S(\mathfrak{M}) = (1, +\infty)$, and $<$ comes from the natural ordering of $\mathbb{R}$. For all $a, b \in M$ let $\mathfrak{M} \models \varphi(b, a)$ imply $\mathfrak{M} \models (P(b) \wedge S(a))$. And let for all $a_1, a_2 \in S(\mathfrak{M})$ the sets $\varphi(\mathfrak{M}, a_1)$ and $\varphi(\mathfrak{M}, a_2)$ be infinite disjoint mutually dense subsets of $P(\mathfrak{M})$. More precisely, $\varphi(\mathfrak{M}, a_1)$ and $\varphi(\mathfrak{M}, a_2)$ are both dense in $(0, 1)$ and disjoint.

Let $A := \mathbb{Q} \cap S(\mathfrak{M})$ and $a \in S(\mathfrak{M})$. We put $q_a := tp(a/A)$. Let $\gamma_a \in \varphi(\mathfrak{M}, a)$. Let $p_a := tp(\gamma_a/A)$. Notice that p_a is principal if $a \in A$. Also, $p_{\sqrt{2}} \not\perp^w q_{\sqrt{2}}$ such that for each $\delta \in p_{\sqrt{2}}(\mathfrak{M})$, $\varphi(\delta, \mathfrak{M}) = \{\sqrt{2}\}$ and $\delta \in \varphi(\mathfrak{M}, \sqrt{2})$. The type $p_{\sqrt{2}}$ is non-principal and undefinable. To prove this, let $\theta(x, z_1, z_2) := \exists y(\varphi(x, y) \wedge z_1 < y < z_2)$. For all $a_1, a_2 \in A$, $\theta(x, a_1, a_2) \in p_{\sqrt{2}}$ if and only if $\mathbb{R} \models a_1 < \sqrt{2} < a_2$. The element $\sqrt{2}$ defines in A an irrational cut. If there is a formula guaranteeing definability of the type $p_{\sqrt{2}}$, it means the irrational cut is definable, which is impossible in this structure. Also $p_{\sqrt{2}} \not\perp^w p_a$ for all $a \in S(\mathfrak{M})$ and since the relation of non weak orthogonality is symmetric, $p_a \not\perp^w p_{\sqrt{2}}$. It shows that non weak orthogonality does not preserve definability and isolation of types. Indeed, for $a \in A$, p_a is isolated and consequently is definable, and $p_{\sqrt{2}}$ is non definable and non-isolated. At the same time $p_{\sqrt{2}}$ and p_a are non weakly orthogonal.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14971869).

Keywords: linear order, convex closure, weak orthogonality, almost orthogonality, definable type.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64

References

- [1] Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1, *Annals of Pure and Applied Logic*, **169** (2018), 1190–1209.
- [2] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.
- [3] Baizhanov B., Umbetbayev O. Constant expansion of theories and the number of countable models, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **20:2** (2023), 1037–1051.

Orthogonality of 1-types and the number of countable models of linearly ordered theories

B. BAIZHANOV¹, N. TAZABEKOVA², T. ZAMBARNAYA³

^{1,2,3}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2}*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

²*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

¹baizhanov@math.kz, ²tazabekova.nargiz@gmail.com, ³zambarnaya@math.kz

Let $\mathfrak{M} = \langle M; =, <, \dots \rangle$ be a linearly ordered structure.

Definition 1. 1) A formula $\varphi(x, \bar{y}, \bar{a})$ is a *convex* formula, if for every $\bar{b} \in M$ the set $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{a})$ is convex in every model of $Th(\mathfrak{M})$ containing $\bar{b}$ and $\bar{a}$.

2) The *convex closure* of a formula $\varphi(x, \bar{a})$ is the following formula:

$$\varphi^c(x, \bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 (\varphi(y_1, \bar{a}) \wedge \varphi(y_2, \bar{a}) \wedge (y_1 \leq x \leq y_2)).$$

3) The *convex closure* of a type $p(x) \in S_1(A)$ is the following type:

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x, \bar{a}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Definition 2. Let $p^c, q^c \in S^c(A)$. We say that p^c is *not weakly convex-orthogonal* to q^c , $p^c \not\perp^{cw} q^c$, if there exists a convex formula $H(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, such that $H(\mathfrak{M}, \alpha, \bar{a}) \cap q^c(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$ and $\neg H(\mathfrak{M}, \alpha, \bar{a}) \cap p^c(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$ for all (equivalently, for some) $\alpha \in p^c(\mathfrak{M})$.

Definition 3. Let $1 \leq n < \omega$, $\Gamma = \{p_1^c, p_2^c, \dots, p_n^c\} \subseteq S^c(A)$. We say that the family Γ is *not weakly convex orthogonal* if there is an A -formula $H(\bar{y})$ ($\text{ln}(\bar{y}) = n$) such that there exists $1 \leq i \leq n$ such that $H(\bar{y})$ is convex in y_i and for some $\alpha_1 \in p_1^c(\mathfrak{M}), \alpha_2 \in p_2^c(\mathfrak{M}), \dots, \alpha_{i-1} \in p_{i-1}^c(\mathfrak{M}), \alpha_{i+1} \in p_{i+1}^c(\mathfrak{M}), \dots, \alpha_n \in p_n^c(\mathfrak{M})$,

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \mathfrak{M}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \cap p_i^c(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$$

and

$$\neg H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \mathfrak{M}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \cap p_i^c(\mathfrak{M}) \neq \emptyset.$$

Definition 4. Let $A, B \subseteq M$, $H(x, y)$ be an A -formula, and $E(x, y)$ be a (parametrically definable) equivalence relation with convex classes.

1) The formula $H(x, y)$ *monotonically increases(decreases) on B* , if for all $b_1, b_2 \in B$, with $b_1 < b_2$, the following holds:

$$H(\mathfrak{M}, b_1)^- \subseteq H(\mathfrak{M}, b_2)^- \text{ and } H(\mathfrak{M}, b_2)^+ \subseteq H(\mathfrak{M}, b_1)^+ \\ (H(\mathfrak{M}, b_2)^- \subseteq H(\mathfrak{M}, b_1)^- \text{ and } H(\mathfrak{M}, b_1)^+ \subseteq H(\mathfrak{M}, b_2)^+)$$

and for some distinct $b_3, b_4 \in B$, $H(\mathfrak{M}, b_3) \neq H(\mathfrak{M}, b_4)$.

2) The formula $H(x, y)$ *monotonically increases (decreases) on B/E* , if for all $b_1, b_2 \in B$, with $b_1 < b_2$ and $\mathfrak{M} \models \neg E(b_1, b_2)$, the following holds:

$$H(\mathfrak{M}, b_1)^- \subseteq H(\mathfrak{M}, b_2)^- \text{ and } H(\mathfrak{M}, b_2)^+ \subseteq H(\mathfrak{M}, b_1)^+ \\ (H(\mathfrak{M}, b_2)^- \subseteq H(\mathfrak{M}, b_1)^- \text{ and } H(\mathfrak{M}, b_1)^+ \subseteq H(\mathfrak{M}, b_2)^+),$$

and for some distinct $b_3, b_4 \in B$, $\mathfrak{M} \models \neg E(b_3, b_4)$ and $H(\mathfrak{M}, b_3) \neq H(\mathfrak{M}, b_4)$.

Let $H(y_1, y_2, \dots, y_n)$ be an A -formula, $i, j \leq n$ be arbitrary and distinct, and $\bar{b} \in \mathfrak{M}$ be an $(n-2)$ -tuple. Then we let $H_{i,j}^{\bar{b}}(y_j, y_i)$ be the result of the substitution of $\bar{b}$ for all the parameters of H but y_i and y_j .

Definition 5. 1) An A -formula $H(y_1, y_2, \dots, y_n)$ *monotonically increases (decreases) in y_j with respect to y_i* ($1 \leq i \neq j \leq n$) *on*

$$B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_n \subseteq M,$$

if the formula $H_{i,j}^{\bar{b}}(x_j, x_i)$ *monotonically increases (decreases) on B_i* for all assignments

$$\bar{b} = (b_k)_{k \neq i,j}, \quad b_k \in B_k, \quad k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

2) An A -formula $H(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ *monotonically increases (decreases) on equivalence classes in y_j with respect to y_i* ($1 \leq i \neq j \leq n$) *on $B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_n \subseteq M$* , if the formula $H_{i,j}^{\bar{b}}(x_j, x_i)$ *monotonically increases (decreases) on $B_i/E_i(x, y, \bar{b})$* for some equivalence relation $E_i(x, y, \bar{z})$ and all assignments $\bar{b} = (b_k)_{k \neq i,j}, b_k \in B_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

In the talk, we use the previous notions to define the concepts of a theory with monotonic non-orthogonality, as well as a theory with monotonic non-orthogonality on equivalence classes.

Theorem 6. *Let T be a small theory with monotonic non-orthogonality on equivalence classes. Let Γ be a pairwise weakly convex orthogonal set of non-isolated convex types from $S^c(A)$ for a finite set A . Then Γ is weakly convex orthogonal.*

Corollary 7. *Let T be a countable complete linearly ordered theory with monotonic non-orthogonality on equivalence classes, and let Γ be an infinite family of pairwise weakly convex orthogonal convex 1-types from $S^c(A)$ for a finite set A . Then $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.*

Proposition 8. *Weakly o-minimal theories are theories with monotonic non-orthogonality on equivalence classes.*

Corollary 9. *Let T be a weakly o-minimal theory, and let Γ be an infinite family of pairwise weakly orthogonal non-isolated 1-types over a finite set A . Then $T(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.*

Corollary 10. *Let T be a weakly o-minimal theory, let $p, q \in S_1(A)$ for some subset A of an $|A|^+$ -saturated model $\mathfrak{M} \models T$. Then if $p \perp^a q$ and $p \not\perp^w q$, then the type p is quasisolitary and the depth of the convex formula guaranteeing $p \not\perp^w q$ on some formula from $p(\mathfrak{M})$ is equal to 1.*

Theorem 11. *Let T be a weakly o-minimal theory having less than $2^{\aleph_0}$ countable models. Let each type p over a finite set be non-social (equivalently, quasisolitary). Let Γ be an infinite set of pairwise non-weakly orthogonal and almost orthogonal non-isolated types over some finite subset A of an $|A|^+$ -saturated model $\mathfrak{M} \models T$. Then $\aleph_0 \leq I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: linear order, convex closure, monotonicity, weak orthogonality, almost orthogonality, weak convex orthogonality, small theory, weakly o-minimal theory, number of countable models.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

- [1] Marker D. Omitting types in o-minimal theories, *Journal of Symbolic Logic*, **51** (1986), 63–74.
- [2] Mayer L.L. Vaught’s conjecture for o-minimal theories, *Journal of Symbolic Logic*, **53** (1988), 146–159.
- [3] Baizhanov, B.S., Verbovskii, V.V. O-Stable Theories, *Algebra and Logic*, **50** (2011), 211–225.
- [4] Baizhanov B., Umbetbayev O., Zambarnaya T. Non-Orthogonality of 1-types in Theories with a Linear Order, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*, **53** (2025), 131–140.
- [5] Baizhanov B., Tazabekova N., Zambarnaya T. On One Laura Mayer’s Theorem, *Symmetry*, **17**:10 (2025), 1641.

Solutions to Multilayer Heat Conduction Problems with Nonlocal Boundary Conditions

S.M. BARMAGAMBETOV¹, U.K. KOILYSHOV²

^{1,2}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹saginish.2000@mail.ru, ²koylyshov@math.kz

In papers [1–2], Sturm-type boundary value problems for the heat equation with discontinuous coefficients were studied for the case of a single discontinuity point. The present work is devoted to justifying the Fourier method for solving multilayer diffusion problems.

Let us consider an initial-boundary value problem for the heat conduction equation with a discontinuous coefficient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

in the domain $\Omega = \bigcup \Omega_i$. $\Omega_i = \{(x, t) : l_{i-1} < x < l_i, 0 < t < T\}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ with the initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad l_0 \leq x \leq l_m, \quad (2)$$

and the boundary conditions of the following type

$$\begin{cases} u_1(l_0, t) - u_m(l_m, t) = 0, \\ k_1 \frac{\partial u_1(l_0, t)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u_m(l_m, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

and the conjugation conditions

$$\begin{cases} u_i(l_i - 0, t) = u_{i+1}(l_i + 0, t), \\ k_i \frac{\partial u_i(l_i - 0, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(l_i + 0, t)}{\partial x}, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq T, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (4)$$

Theorem 1. Let $\varphi(x)$ be a continuously differentiable function satisfying

$$\begin{aligned}\varphi(l_0) &= \varphi(l_m), & k_1\varphi'(l_0) &= k_m\varphi'(l_m), \\ \varphi(l_i - 0) &= \varphi(l_i + 0), & k_j\varphi'(l_i - 0) &= k_{j+1}\varphi'(l_i + 0), \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).\end{aligned}$$

Then the function

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n X_n(x) + \tilde{\varphi}_n \tilde{X}_n(x)) e^{-\lambda_n t}$$

is the unique classical solution of problem (1)–(4), where the coefficients $\varphi_n, \tilde{\varphi}_n$ are determined by

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \varphi_i(\xi) X_n(\xi) d\xi, \quad \tilde{\varphi}_n = \sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \varphi_i(\xi) \tilde{X}_n(\xi) d\xi.$$

Where

$$X_n(x) = C \begin{cases} x_{1n} = \cos\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{x - l_0}{k_1}\right)\right), & l_0 < x < l_1, \\ x_{2n} = \cos\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_3 - l_2}{k_3} + \dots + \frac{l_m - l_{m-1}}{k_m} + \frac{l_2 - x}{k_2}\right)\right), & l_1 < x < l_2, \\ x_{3n} = \cos\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_4 - l_3}{k_4} + \dots + \frac{l_m - l_{m-1}}{k_m} + \frac{l_3 - x}{k_3}\right)\right), & l_2 < x < l_3, \\ \dots & \dots \\ x_{m-1,n} = \cos\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_m - l_{m-1}}{k_m} + \frac{l_{m-1} - x}{k_{m-1}}\right)\right), & l_{m-2} < x < l_{m-1}, \\ x_{mn} = \cos\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_m - x}{k_m}\right)\right), & l_{m-1} < x < l_m. \end{cases}$$

$$\tilde{X}_n(x) = C \begin{cases} \tilde{x}_{1n} = \sin\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{x - l_0}{k_1}\right)\right), & l_0 < x < l_1, \\ \tilde{x}_{2n} = -\sin\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_3 - l_2}{k_3} + \dots + \frac{l_m - l_{m-1}}{k_m} + \frac{l_2 - x}{k_2}\right)\right), & l_1 < x < l_2, \\ \tilde{x}_{3n} = -\sin\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_4 - l_3}{k_4} + \dots + \frac{l_m - l_{m-1}}{k_m} + \frac{l_3 - x}{k_3}\right)\right), & l_2 < x < l_3, \\ \dots & \dots \\ \tilde{x}_{m-1,n} = -\sin\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_m - l_{m-1}}{k_m} + \frac{l_{m-1} - x}{k_{m-1}}\right)\right), & l_{m-2} < x < l_{m-1}, \\ \tilde{x}_{mn} = -\sin\left(\frac{2\pi n}{s_m} \left(\frac{l_m - x}{k_m}\right)\right), & l_{m-1} < x < l_m. \end{cases}$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: Heat equation, Fourier method, spectral problem, orthonormal basis.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Koilyshov U.K., Sadybekov M.A Two-phase tasks of thermal conductivity with boundary conditions of the Sturm type. Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Abstract book of the conference ICAAM, 31.10.2022-06.11.2022, Antalya, Turkey.
- [2] Koilyshov U.K., Sadybekov M.A Two-phase heat conduction problems with Sturm-type boundary conditions, *Boundary Value Problems*, **2024**:149 (2024).<https://doi.org/10.1186/s13661-024-01964-x>

Inverse problem for Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type fractional equation with the Caputo derivative

R.R. ASHUROV¹, N.A. BAXRIDDINOVA²

¹V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science

²V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science

¹ashurov@gmail.com, ²baxriddinovanigorabonu@gmail.com

Let $A : H \rightarrow H$ be a positive self-adjoint operator (unbounded) on the separable Hilbert space H , possessing a complete orthonormal eigenfunction $\{v_k\}$ with corresponding positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. By reindexing as needed, we may assume the eigenvalues satisfy

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty.$$

The Caputo fractional derivative of order $0 < \rho < 1$ is defined as following (see, [1]):

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

Consider the following problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + A^a(D_t^\rho u(t)) + A^b u(t) = f, & 0 < t \leq T; \\ u(+0) = \varphi, \\ \int_0^T u(\tau) \omega(\tau) d\tau = \psi, & 0 < \tau \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

where $\varphi, f \in H$, $0 < \rho < 1$ and $a, b > 0$.

Definition 1. If the functions $u(t) \in C([0, T]; H)$ and $f \in H$ with the properties $D_t^\rho u(t)$, $A^a(D_t^\rho u(t))$, $A^b u(t) \in C((0, T]; H)$ and satisfying conditions (1), then the pair of functions $\{u(t), f\}$ is called the solution of the inverse problem (1).

Theorem 2. Let $0 < \rho < 1$. If $c = \max(a, b)$, $\varphi, \psi \in D(A^c)$, and the function $\omega(t)$ is sign-preserving on the interval $(0, T]$, then the inverse problem (1) admits a unique solution $\{u(t), f\}$, and this solution has the form:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k^a} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right] v_k$$

and

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k,$$

where

$$f_k = \left(\frac{\psi_k - \varphi_k \int_0^T \omega(\tau) E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho) d\tau}{\int_0^T \omega(\tau) \tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho) d\tau} \right) (1 + \lambda_k^a).$$

In this paper, an equation of similar structure to that in [2] is investigated, and the existence and uniqueness of the solution to the inverse problem are proved.

Keywords: Cauchy problem, Caputo derivative, Mittag-Leffler function, inverse problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11, 34A12.

References

- [1] Lizama C. Abstract linear fractional evolution equations, in: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, De Gruyter, Berlin (2019), 465–497.
- [2] Ruzhansky M., Serikbaev D., Tokmagambetov N., Torebek B.T. Direct and inverse problems for time-fractional pseudo-parabolic equations, *Quaestiones Mathematicae*, **45**:7 (2022), 1071–1089.

Approximation numbers of some classes of Fourier series operators

D.B. BAZARKHANOV

Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, Kazakhstan

dauren.mirza@gmail.com

Let F, G be linear normed spaces endowed with norms $\|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G$ respectively, $T : F \rightarrow G$ linear bounded operator, G^* space conjugate to G .

Then N -th approximation number $a_N(T : F \rightarrow G)$ of the operator T is N -th linear width $\lambda_N(T(B_F), G)$ of the image $T(B_F)$ of the unit ball B_F of F in space G , i.e.

$$a_N(T : F \rightarrow G) = \lambda_N(T(B_F), G) = \inf_{g_\nu^*, g_\nu} \sup_{f \in B_F} \|Tf - \sum_{\nu=1}^N \langle g_\nu^*, Tf \rangle g_\nu\|_G,$$

where $\inf$ is taken over all collections of functionals $g_\nu^* \in G^*$ and elements $g_\nu \in G$ ($\nu = 1, \dots, N$).

For a class (collection) $\mathfrak{M}$ of operators $T : F \rightarrow G$, we put

$$a_N(\mathfrak{M}) := \sup\{a_N(T : F \rightarrow G) : T \in \mathfrak{M}\}.$$

In the talk, we will discuss weak asymptotics of $a_N(\mathfrak{M})$ where we take as F and G the isotropic Nikol'skii – Besov (Lizorkin – Triebel) spaces $B_{pq}^s(\mathbb{T}^m)$ ($L_{pq}^s(\mathbb{T}^m)$) and Lebesgue spaces $L_r(\mathbb{T}^m)$, respectively, and as collection $\mathfrak{M}$ a subset of Fourier series operators of the form

$$T_\sigma^\phi(f, x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \phi(x, \xi)}$$

with symbols $\sigma(\cdot, \cdot)$ belonging to Hörmander's class $S_{\rho\delta}^t(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ and phases $\phi(\cdot, \cdot)$ being positively homogeneous of order 1 when $\xi \neq 0$ and satisfying the following conditions: for any multi-indexes $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ and $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ such that $|\alpha| = 1$ and $|\beta| = 1$,

$$\partial_x^\alpha \Delta_\xi^\beta \phi(x, \xi) \in S_{00}^0(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$$

and, moreover,

$$|\det(\partial_x \Delta_\xi \phi(x, \xi))| \geq c > 0,$$

$$|\partial_x^\alpha \phi(x, \xi)| \leq c_\alpha |\xi|, \quad \xi \neq 0;$$

$$\langle \nabla_\xi \phi(x, \xi) \rangle \asymp 1,$$

$$\langle \nabla_x \phi(x, \xi) \rangle \asymp \langle \xi \rangle,$$

under some relations between parameters of spaces $B_{pq}^s(\mathbb{T}^m)$ ($L_{pq}^s(\mathbb{T}^m)$) and $L_r(\mathbb{T}^m)$ and class $S_{\rho\delta}^t(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$.

Here, $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ is m -dimensional torus; for $z \in \mathbb{R}^m$, $|z|$ is its Euclidean length, $\langle z \rangle = \sqrt{1 + |z|^2}$; and for $g \in G$, $g^* \in G^*$, $\langle g^*, g \rangle$ is the action of the functional g^* on the element g .

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: Fourier series operator, isotropic Nikol'skii – Besov (Lizorkin – Triebel) space, approximation number, multidimensional torus.

2020 Mathematics Subject Classification: 47B06, 41A46, 41A63, 47G30

A Boundary Value Problem for a Nonlocal Mixed-Type Equation with Involution and a Degeneracy Line

F.Kh. BEGIMQULOV

Nordic International University, Tashkent, Uzbekistan

f.begimqulov@nordicuniversity.org

Let ε and m be arbitrary real parameters with $m > 0$. We consider the following mixed-type partial differential equation with an involution operator

$$u_{yy} + \operatorname{sgn} y |y|^m (u_{xx}(x, y) + \varepsilon u_{xx}(-x, y)) = 0, \quad (1)$$

which is elliptic for $y > 0$, hyperbolic for $y < 0$, and degenerates on the line $y = 0$.

Problem YF. Find a bounded function $u(x, y)$ satisfying equation (1) in the vertical half-strip

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < 0\},$$

such that

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0 \quad \text{uniformly with respect to } x \in [0, 1], \quad (3)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad y \geq -\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (6)$$

$$\sup_{y > 0} |u_y(x, y)| < \infty \quad \text{for all } x \in [0, 1]. \quad (7)$$

Here $\varphi(x)$ is a given function satisfying

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (8)$$

Problem YF'. Find a bounded function $u(x, y)$ satisfying equation (1) in the rectangular domain

$$\widetilde{\Omega} = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}, \quad \widetilde{\Omega}_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < \beta\},$$

$$\widetilde{\Omega}_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < 0\} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

such that

$$u(x, y) \in C(\widetilde{\Omega}) \cap C^1(\widetilde{\Omega}) \cap C^2(\widetilde{\Omega}_1 \cup \widetilde{\Omega}_2), \quad (9)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (10)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad u(x, \beta) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (12)$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ satisfy

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0. \quad (13)$$

The following result holds.

Theorem 1. Let the coefficient ε satisfy the condition $|\varepsilon| < 1$. Then, if a solution to YF(YF') exists in the domain Ω ($\widetilde{\Omega}_1$), it is unique.

Boundary value problems with nonlocal conditions for mixed-type equations with degeneration have been widely studied using spectral methods. In particular, Bitsadze–Samarskii-type nonlocal

problems for degenerate elliptic and mixed-type equations were investigated in [1]. A substantially nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation in a half-strip was considered in [2].

An exception is [3], where a degenerate elliptic equation with involution of the form

$$u_{xx}(x, t) + t u_{tt}(x, t) + a u(-x, t) = 0$$

was investigated under Dirichlet boundary conditions in a rectangular domain. By employing a priori estimates and imposing suitable restrictions on the coefficient a , a uniqueness theorem for the regular solution was proved. Existence was established via the spectral method, which reduced the original problem to an ordinary differential equation with involution solved by successive differentiation.

In the present work, a nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation with an involution operator is studied. This provides a natural extension of previously known results to a broader class of equations with degeneracy lines.

Conclusion. A nonlocal boundary value problem for an elliptic–hyperbolic equation with an involution operator and a degeneracy line is investigated. The equation is elliptic in one part of the domain and hyperbolic in the other, with a change of type occurring along the degeneracy line. By applying the method of spectral separation of variables, the problem is reduced to a family of ordinary differential equations whose solutions are expressed in terms of modified Bessel functions. The existence of a classical solution is established by constructing a Fourier series expansion with respect to a Riesz basis of eigenfunctions. The uniform convergence of the series and its partial derivatives is justified by sharp asymptotic estimates. The uniqueness of the solution is proved by means of the energy method, while the existence is established by the integral equation method.

Keywords: degenerate elliptic equation, nonlocal boundary value problem, involution operator, spectral method, Fourier series, existence and uniqueness.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35J70, 35B65

References

- [1] Sabitova Yu. K. *Boundary value problem with a nonlocal integral condition for equations of mixed type with degeneration on the transition line*, Springer, Berlin (2015).
- [2] Sidorenko O. G. A substantially nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation in a half-strip, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mathematics*, **2007**:3 (2007), 60–64.
- [3] Lesev V. N., Bzheumikhova O. I., Zheldasheva A. O., Etuev N. Kh. Boundary value problem for a model differential equation with involution, in: *Mezhdunarodnyi Nauchno-Issledovatel'skii Zhurnal*, Publisher, City (2023), 1–7.

The compatibility conditions in the boundary value problems for the parabolic equations

G.I. BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

galina_math@mail.ru

It is known that the Hölder spaces $C_{x, l}^{2+k+\alpha, 1+\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$ contains the continuous functions with all its acceptable derivatives in the closure of domain, here $k = 0, 1, \dots$, $\alpha \in (0, 1)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

When we study initial – boundary value problems for the parabolic equations in the Hölder spaces, we require the fulfillment of the compatibility conditions of the initial and boundary data. If the compatibility conditions are not fulfilled, then smooth solutions will not exist, even if the given functions have greater smoothness than necessary. The compatibility conditions are the identities

on the boundary of domain at the initial moment of time including given functions. The definition of the compatibility conditions one can find in the book [1, Ch. IV, § 5, p.363].

The fulfillment of the compatibility conditions are also required in the investigation of the problems for parabolic equations in the Sobolev spaces, for instance, $W_q^{2,1}(QT)$, $q > 3/2$ [1, Ch. IV, § 9, p. 388, Theorem 9.1].

If the compatibility conditions of all acceptable orders are fulfilled in the problem, then this means that the physical process whose mathematical model is the problem under consideration proceeds continuously, and the initial moment of time is the point of continuity of the process. But if the problem describes a physical process from its very beginning at $t = 0$ or from the moment of the jump of the given functions, coefficients at $t = t_0$, then the compatibility conditions in the problem at $t = 0$ and $t = t_0$, respectively, are not fulfilled. However, a physical process can take place and the problem can also have a solution.

The very first problem with incompatibility of the initial and boundary data was posed by Josef Stefan in the investigation of the phase transitions in media, and it is known now as the Stefan problem. A singular solution to the problem was constructed explicitly, and the incompatibility conditions of the data of the problem provide the physical process (melting or crystallization of a medium) [2]. This problem started the development of the theory of problems with a free (unknown) boundary.

Linear problems for parabolic equations with incompatibility of the given functions on the boundary of the domain at the initial moment of time were investigated by G.I. Bizhanova in [3]–[6], G.I. Bizhanova and M.N. Shaimardanova [7], G.I. Bizhanova and Sh.N. Nurmukhanbet [8].

Incompatibility of data led to the appearance of non-smooth functions, i.e. singular solutions. Singular solutions in the explicit form of the first and second boundary value problems for the heat equations with constant coefficients were constructed in [3], of a two-phase problems with the conjunction conditions $(u_1 - u_2)|_{x=0} = \varphi(t)$, and $(\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2 \partial_x u_2)|_{x=0} = \psi(t)$, $t \in (0, T)$ in [4] and $(u_1 - u_2)|_{x=0} = \varphi(t)$, and $(\partial_t u_1 + \lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2 \partial_x u_2)|_{x=0} = \psi(t)$, $t \in (0, T)$ in [8] and of the problem with the time derivative on the boundary of the domain [7].

Also, there were proved that the solutions of the one-dimensional first and second boundary value problems for a general parabolic equation with variable coefficients [5], and of the multidimensional first and second boundary value problems for the heat equations with constant coefficients [6] belong to the found weighted Hölder spaces with the weight $t^{1/2} e^{\mu^2 \rho^2(x)/t}$, $\mu = \text{const} > 0$, where $\rho(x) = x$ in the one-dimensional problem and $\rho(x) = x_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, in the multidimensional one.

We point out that the constructed singular solutions in the explicit form belong to the corresponding weighted Hölder spaces mentioned above.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: Parabolic equation, boundary value problems, conjugation condition, incompatibility of initial and boundary data, singular solution, regular solution.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 35C05, 35B25.

References

- [1] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Nauka, Moscow (1967), 3–736.
- [2] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow (1972), 3–736.
- [3] Bizhanova G.I. Solution in the Hölder spaces of boundary value problems for the parabolic equations with incompatibility of the initial and boundary data, *Contemporary Mathematics. Fundamental directions*, **36** (2010), 12–23 (English transl. *J. Math. Sci.*, **171**:1 (2010), 9–21.)
- [4] Bizhanova G.I. Classical solution of a nonregular conjunction problem for the heat equations, *Matematicheskii Zhurnal*, **10**:3 (2010), 37–48.

[5] Bizhanova G.I. Investigation of the solvability of the first boundary value problem for a parabolic equation with an incompatibility of the initial and boundary data, *Zapiski POMI*, **208** (2021), 39–72 (English transl. *J. Math. Sci.*, **283**:5 (2024), 721–744).

[6] Bizhanova G.I. On the classical solvability of boundary value problems for parabolic equations with incompatible initial and boundary data, *Progress in nonlinear differential equations and their applications*, **80** (2011), 57–80.

[7] Bizhanova G.I., Shaimardanova M.N. Solution of an irregular problem for the heat equation with a time derivative in the boundary condition, *Matematicheskii Zhurnal*, **16**:1, (2016), 35–57 (in Russian).

[8] Bizhanova G.I., Nurmukhanbet Sh.N. Singular solutions of a two-phase problem for the parabolic equations with a time derivative in the conjugation conditions under the incompatibility of the initial and boundary data, *Kazakh Mathematical Journal* **23**:2 (2023) 23–53.

Reduction theorems and characterization of weighted inequalities for a discrete supremal operator including the discrete Hardy operator

N. BOKAYEV¹, A. GOGATISHVILI², N. KUZEUBAYEVA³, T. ÜNVER⁴

^{1,3}L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Republic of Kazakhstan

²Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic

³Kirikkale University, Kirikkale, Türkiye

¹bokayev2011@yandex.ru, ²gogatish@math.cas.cz, ³nurgul.kuzeubaeva@mail.ru,

⁴tugceunver@kku.edu.tr

In this abstract, we discuss the characterization of weighted discrete Hardy-type inequalities involving the supremum operator:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{m \leq i < \infty} u(i) \sum_{k=1}^i x(k) \right)^q a(m) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(m)^p b(m) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

restricted to the cone of non-negative, non-increasing sequences $\mathbf{x} = \{x(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Theorem 1. Let $0 < p, q < \infty$. Assume that $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{u}$ are given non-negative sequences with $b(1) > 0$ and $\sum_{m=1}^{\infty} b(m) < \infty$. Then inequality (1) holds for all non-negative, non-increasing sequences $\mathbf{x}$ if and only if

$$C_0 := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{m \leq i < \infty} u(i) i \right)^q a(m) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b(m) \right)^{-\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (2)$$

Moreover, if C denotes the best constant in (1), then $C \approx C_0$, where the implicit multiplicative constants in the equivalence depend only on p and q .

Theorem 2. Let $0 < q < \infty$ and $1 \leq p < \infty$. Assume that $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{u}$ are given non-negative sequences with $\sum_{m=1}^{\infty} b(m) = \infty$. Then inequality (1) holds for all non-negative, non-increasing sequences $\mathbf{x}$ if and only if the inequality

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{m \leq i < \infty} u(i) \sum_{k=1}^i \left(\sum_{j=k}^{\infty} y(j) \right) \right)^q a(m) \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \mathcal{D} \left(\sum_{m=1}^{\infty} y(m)^p B(m+1)^{p-1} B(m) b(m+1)^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (3)$$

holds for all non-negative sequences $\mathbf{y} = \{y(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$. Moreover, if C and $\mathcal{D}$ denote the best constants in (1) and (3), respectively, then $C \approx \mathcal{D}$, where the implicit multiplicative constants in the equivalence depend only on p and q .

Reduction theorems for the discrete Hardy operator on cones of monotone sequences were considered in papers [1] and [2]

Funding: The research was supported by the grant Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project no. AP26196065). The research of A. Gogatishvili was partially supported by the grant project 23-04720S of the Czech Science Foundation (GAČR).

Keywords: Weighted inequalities, discrete supremum operator, discrete Hardy operator, reduction theorems.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D15, 46B45

References

- [1] Bokayev N., Gogatishvili A., Karshygina G., Kuzeubayeva N., Ünver T. Reduction theorems for the discrete Hardy operator on the cones of monotone sequences, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **291**:2 (2025), 217–223.
- [2] Bokayev N., Gogatishvili A., Kuzeubayeva N. Reduction theorems for discrete Hardy operator on monotone sequence cones ($0 < p < 1$), *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **128**:4 (2025)

Comparison principle for nonlinear fractional diffusion equation

M. BORIKHANOV

Faculty of Engineering and Natural Sciences, SDU University, Kaskelen, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

meiirkhan.borikhanov@sdu.edu.kz, borikhanov@math.kz

In this paper, we consider an initial–boundary value problem for a nonlinear time–space fractional diffusion equation posed in a smoothly bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. The equation combines the Caputo time-fractional derivative $\mathcal{D}_{0|t}^\alpha$ of order $\alpha \in (0, 1)$ (see [1]) with the fractional p -Laplacian $(-\Delta)_p^s$, and includes the reaction terms $\gamma|u|^{m-1}u + \mu|u|^{q-2}u$, where $s \in (0, 1)$, $p \geq 2$, $m > 0$, $q \geq 1$, and $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$. The model is supplemented by the initial condition $u(x, 0) = u_0(x)$ and a nonlocal Neumann-type boundary condition $\mathcal{N}s, pu = 0$ on $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, formulated through an integral flux operator.

We present a simple proof of the comparison principle for this problem based solely on algebraic identities, under various assumptions on γ, μ, m , and q . As applications of the comparison principle, we characterize both the blow-up phenomenon and the existence of global weak solutions.

Finally, we note that the same problem under Dirichlet boundary conditions was studied in [2].

Funding: This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26195417).

Keywords: parabolic equations, nonlocal operator, polynomial nonlinearity comparison principle.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35A01, 35B51, 35K55

References

- [1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. *North-Holland Mathematics Studies*, (2006).
- [2] Borikhanov M.B., Ruzhansky M., Torebek B.T. Qualitative properties of solutions to a nonlinear time-space fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **26**:1 (2023), 111–146.

Sequence of meromorphic connections in Riemann sphere. Some properties of k -differentials in Riemann surfaces

M.A. BOTIROV¹, M.S. KHOLIKOVA²

^{1,2}*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

¹botirovmuhammadqodir45@gmail.com, ²khalikovamadina9@gmail.com

In this work we study meromorphic connections on the Riemann sphere and the structure of their geodesics via local 1-form representations and residues. We also discuss the residue approximation problem, showing that connections with real residues can be approximated by ones with rational residues under the global residue constraint on $\mathbb{P}^1$.

Definition 1. A meromorphic connection on the tangent bundle TS of a Riemann surface S is a $\mathbb{C}$ -linear map

$$\nabla : \mathcal{M}_{TS} \rightarrow \mathcal{M}_S^1 \otimes \mathcal{M}_{TS}$$

satisfying the Leibniz rule

$$\nabla(\tilde{f}\tilde{s}) = d\tilde{f} \otimes \tilde{s} + \tilde{f}\nabla\tilde{s} \quad (1)$$

for all $\tilde{s} \in \mathcal{M}_{TS}$ and $\tilde{f} \in \mathcal{M}_S$, where $\mathcal{M}_{TS}$ denotes the sheaf of germs of meromorphic sections of TS , while $\mathcal{M}_S$ is the sheaf of germs of meromorphic functions and $\mathcal{M}_S^1$ is the sheaf of meromorphic 1-forms on S .

Let (U_α, z_α) be a local chart for S , and ∇ a meromorphic connection on S . Then there exists $\eta_\alpha \in \mathcal{M}_S^1(U_\alpha)$, such that

$$\nabla(\partial_\alpha) = \eta_\alpha \otimes \partial_\alpha,$$

where $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ is the induced local generator of TS over U_α . We have

$$\eta_\beta = \eta_\alpha + \frac{1}{\xi_{\alpha\beta}} d\xi_{\alpha\beta} \quad (2)$$

on $U_\alpha \cap U_\beta$, where $\xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}$. In particular, if every representation is holomorphic then ∇ is a holomorphic connection. We say $p \in S$ is a pole for a meromorphic connection ∇ if p is a pole of η_α for some (and hence any) local chart U_α at p . If Σ is the set of poles of ∇ , then ∇ is a holomorphic connection on $S^0 = S \setminus \Sigma$. So we can define a notion of geodesic for ∇ on S^0 as in holomorphic connection.

Definition 2. A geodesic for a meromorphic connection ∇ on TS is a real curve

$$\sigma : I \rightarrow S^0,$$

with $I \subset \mathbb{R}$ an interval, such that $\nabla_{\sigma'} \sigma' \equiv 0$.

Let $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ be an atlas for S and $\sigma : I \rightarrow U_\alpha$, with $I \subset \mathbb{R}$ an interval, a smooth curve. Then σ is a geodesic for a meromorphic connection ∇ if and only if

$$(z_\alpha \circ \sigma)'' + (f_\alpha \circ \sigma)(z_\alpha \circ \sigma)'^2 \equiv 0, \quad (3)$$

where $\eta_\alpha = f_\alpha dz_\alpha$ is the local representation of ∇ on U_α .

Definition 3. The residue $\text{Res}_p \nabla$ of a meromorphic connection ∇ at a point $p \in S$ is the residue of any 1-form η_α representing ∇ on a local chart (U_α, z_α) at p . The set of all residues of ∇ is denoted by $\text{Res } \nabla := \{\text{Res}_p \nabla : p \in S\} \setminus \{0\}$.

Remark 4. Let $S = \mathbb{P}^1$ and let ∇ be a meromorphic connection on TS with set of poles $\Sigma = \{p_1, \dots, p_m\}$. Then the residues of ∇ satisfy the global constraint

$$\sum_{j=1}^m \text{Res}_{p_j}(\nabla) = -\deg(T\mathbb{P}^1) = -2. \quad (4)$$

In particular, for any approximating sequence $\{\nabla_k\}$ on $\mathbb{P}^1$ one must have

$$\sum_{j=1}^m \text{Res}_{p_j}(\nabla_k) = -2$$

for all k (assuming the same pole set).

Let ∇ be a meromorphic connection on S with $\text{Res } \nabla \subset \mathbb{R}$ and let ∇_k be sequence of meromorphic connections on S with rational residues.

Definition 5. We say that ∇_k converges to ∇ in sense of residues if the residue of ∇_k at each pole $p \in S$ converges to the residue of ∇ at p , that is

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Res}_p \nabla_k = \text{Res}_p \nabla. \quad (5)$$

Our main result is following:

Theorem 6. Let ∇ be a meromorphic connection on the Riemann sphere whose residues are real. Then there exists a sequence of meromorphic connection, with rational residues, converges to ∇ .

Funding: This work is supported by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan, State Grant No. FL-9524115114

Keywords: meromorphic connections, Riemann surfaces, k -differentials, tangent bundle, geodesics.

Mathematics Subject Classification: 32H50 · 34M03 · 34M40 · 37F99

References

- [1] Abate M. Bianchi F. A Poincaré–Bendixson theorem for meromorphic connections on Riemann surfaces, *Math. Z.*, (2016) , 247–272.
- [2] Abate M. Tovena F. Poincaré–Bendixson theorems for meromorphic connections and homogeneous vector fields, *Journal of Differential Equations*, (2011), 2612–2684.
- [3] Bainbridge M., Chen D., Gendron Q., Grushevsky S., Möller M. Strata of k -differentials, *Algebraic Geometry*, (2019), 10.14231/AG-2019-011.
- [4] Rakhimov K.X. Flat structure of meromorphic connections on Riemann surfaces, *The Journal of Geometric Analysis*, (2020)
- [5] Shapiro B. Tahar G. On existence of quasi-Strebel structures for meromorphic k -differentials, *L'Enseignement Mathématique*, (2021), 187–207

Ergodic Measures for Hénon–Sibony Maps

S.I. BOYMURODOV

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent,
Uzbekistan

Department of Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
sboymurodov.research@gmail.com

For a given positive integer k consider on $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ the following equivalence relation

$$z = (z_0, \dots, z_k) \sim z' = (z'_0, \dots, z'_k)$$

if there is $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ such that $\lambda z = z'$. The quotient space is denoted by $\mathbb{P}^k$ and is called projective space of dimension k . Let $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ be a polynomial automorphism of $\mathbb{C}^k$. It can be extended to a birational map of $\mathbb{P}^k$ in a natural way. Without loss of generality, we denote this extension also by f . Hence, $f[z_0 : \dots : z_k] = [F_0 : \dots : F_k]$. For the new map, define I_+ (resp. I_-) indeterminacy set of f (resp. f^{-1}). The indeterminacy sets $I_{\pm}$ are analytic subsets of the hyperplane at infinity L_{∞} , where

$$L_{\infty} = \left\{ [z] \in \mathbb{P}^k, F_i(z) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Definition 1. We say that f is Hénon-Sibony map if I_+ and I_- are non-empty and satisfy $I_+ \cap I_- = \emptyset$ i.e., has empty intersection.

For every Hénon-Sibony map f , there exists a positive integer $p = p(f)$ such that $\dim I_+ = k - 1 - p$ and $\dim I_- = p - 1$. The set I_- is attracting for f and I_+ is attracting for f^{-1} . Moreover, we have $f(L_{\infty} \setminus I_+) = I_-$ and $f^{-1}(L_{\infty} \setminus I_-) = I_+$. We denote by d_+ the algebraic degree of f , and by d_- the algebraic degree of its inverse f^{-1} . The algebraic degrees are related by $d_+^p = d_-^{k-p}$.

Definition 2. The Green functions of f and f^{-1} are defined by

$$G^+(z) := \lim_{m \rightarrow \infty} d_+^{-m} \log^+ \|f^m(z)\| \text{ and } G^-(z) := \lim_{m \rightarrow \infty} d_-^{-m} \log^+ \|f^{-m}(z)\|$$

where $\log^+(\cdot) := \max\{\log(\cdot), 0\}$.

They are Hölder continuous and pluri-subharmonic on $\mathbb{C}^k$, and they satisfy

$$G^+ \circ f = d_+ G^+ \text{ and } G^- \circ f^{-1} = d_- G^-.$$

Define the Green currents of bidegree $(1, 1)$ of f by $T_+ := dd^c G^+$ and $T_- := dd^c G^-$. Since the meromorphic extension of these currents to $\mathbb{P}^k$ assign no mass to the hyperplane L_{∞} , we continue denote them by T_+ and T_- . We have $f^*(T_+) = d_+ T_+$ and $f_*(T_-) = d_- T_-$ as currents on $\mathbb{P}^k$.

The current T_+^p (resp. T_-^{k-p}) is supported in the boundary of the filled Julia set K_+ (resp. K_-). Recall that K_+ (resp. K_-) is the set of points $z \in \mathbb{C}^k$ whose orbit $(f^m(z))_{m \in \mathbb{N}}$ (resp. backward orbit $(f^{-m}(z))_{m \in \mathbb{N}}$) is bounded in $\mathbb{C}^k$. We have $K_+ = \{G^+ = 0\}$, $K_- = \{G^- = 0\}$, and $\overline{K}_{\pm} \cap L_{\infty} = I_{\pm}$. The open set $\mathbb{P}^k \setminus \overline{K}_+$ (resp. $\mathbb{P}^k \setminus \overline{K}_-$) is the immediate basin of I_- for f (resp. I_+ for f^{-1}). Set $K := K_+ \cap K_-$. It is a compact subset of $\mathbb{C}^k$.

Topological entropy. The concepts of entropy of a measure introduced by Kolmogorov, and the topological entropy, are fundamental notions in dynamics. We follow Bowen's approach for the topological entropy. Take any positive integer m and a fixed positive number ε .

Definition 3. Two points z and w in $\mathbb{C}^k$ are (m, ε) -separated with respect to a function f if

$$d_m(x, y) := \max_{0 \leq i \leq m-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} \geq \varepsilon$$

where d is a distance on $\mathbb{C}^k$.

For a given compact set K , let $\mathcal{N}(K, m, \varepsilon)$ be the largest number of points in K that are pairwise (m, ε) -separated.

Definition 4. The topological entropy of f restricted to K is defined by

$$h_t(f, K) := \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{N}(K, m, \varepsilon).$$

Metric entropy. Given $\varepsilon > 0$ and $n \in \mathbb{N}$, define the Bowen ball $B_n(a, \varepsilon)$ by

$$B_n(a, \varepsilon) := \{x \in X, \quad \text{dist}(f^i(x), f^i(a)) \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq n\}.$$

Let ν be a probability measure invariant by f . The function

$$h(\nu, a) := \sup_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(B_n(a, \varepsilon))$$

is well-defined ν -almost everywhere and the entropy of ν is equal to

$$h(\nu) = \int h(\nu, a) d\nu(a).$$

We now present our main result, which describes the behavior of the support of an ergodic measure under certain conditions. Our main theorem is as follows.

Theorem 5. *Let f be a Hénon-Sibony map on $\mathbb{P}^k$ of algebraic degree d_+ . Assume that $\dim I_- = p - 1$ and J_ℓ^+ be a Julia set of f of order ℓ , with $1 \leq \ell \leq p$. If K is a subset of $\mathbb{P}^k$ such that $\overline{K} \cap J_\ell^+ = \emptyset$, then $h_t(f, K) \leq (\ell - 1) \log d_+$. In particular, every ergodic measure ν whose measure-theoretic entropy satisfies $h_\nu(f) > (p - 1) \log d_+$ is supported on J_p^+ .*

Keywords: Hénon-Sibony map, Julia set, Green current, support of measure.

2020 Mathematics Subject Classification: 37F, 32H50, 35U40

References

- [1] Sibony N. *Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$* , *Panoramas et Synthèses*, **8**, 97–185 (1999).
- [2] Dinh T.-C. *Decay of correlations for Hénon maps*, *Acta Math.* **195**, 253–264 (2005).
- [3] Dinh T.-C., Sibony N. *Dynamics of regular birational maps in $\mathbb{P}^k$* , *J. Funct. Anal.* **222**, no. 1, 202–216 (2005).
- [4] De Thélin H. *Sur les automorphismes réguliers de $\mathbb{C}^k$* , *Publ. Mat.* **54**, no. 1, 243–262 (2010).
- [5] Dujardin R. *Hénon-like mappings in $\mathbb{C}^2$* , *Amer. J. Math.* **126**, no. 2, 439–472 (2004).

Cauchy problem for a singularly perturbed integro-differential equation

N.U. BUKANAY¹, A.E. MIRZAKULOVA², A.T. ASSANOVA³

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

¹nbukanay@gmail.com, ²aziza.mirzakulova@bk.ru, ³anartasan@gmail.com

Consider the singularly perturbed integro-differential equation with a small parameter

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_2(t) y'' + A_1(t) y' + A_0(t) y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^2 H_i(t, x) y^{(i)}(x, \varepsilon) dx, \quad (1)$$

with the initial conditions

$$y^{(i)}(0, \varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, 2}. \quad (2)$$

ε is a small parameter, while α_i are known constants.

It is well known that, in the absence of the integral term, the corresponding third-order differential equation with a small parameter has no solution satisfying the initial conditions when

the characteristic roots have opposite signs. This creates a fundamental difficulty in the classical theory of singular perturbations [1].

Problems involving linear integro-differential equations with a small parameter have been studied in [2] and, more recently, in [3].

The aim of this paper is to demonstrate that the inclusion of an integral term on the right-hand side regularizes the problem and ensures its solvability.

The main objectives are:

To construct an asymptotic representation of the solution to the singularly perturbed integro-differential equation;

To obtain asymptotic estimates describing the behavior of the solution as $\varepsilon \rightarrow 0$;

To prove a theorem providing asymptotic bounds for the solution, thereby confirming the regularizing effect of the integral operator.

The results extend the theory of singular perturbations for integro-differential equations with characteristic roots of opposite signs.

Assume the following conditions hold:

I. Functions $A_i(t)$, $i = \overline{0, 2}$ and $F(t)$ are continuously differentiable on a segment $0 \leq t \leq 1$, and functions $H_i(t, x)$, $i = \overline{0, 2}$ are continuously differentiable on a domain $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

II. Roots of “additional characteristic equation” $\mu^2 + A_2(t)\mu + A_1(t) = 0$ satisfy the following inequalities $\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$ and $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0$, $\mu_2(t) > \gamma_2 > 0$.

III. The kernel $H(t, s, \varepsilon)$ does not have an eigenvalue with the value 1.

Theorem 1. *If conditions I-III are valid, then the solution for integro-differential equation (1) and (2) holds the following asymptotic estimates as $\varepsilon \rightarrow 0$:*

$$\begin{aligned}
 |y^{(j)}(t, \varepsilon)| \leq & C \left(|\alpha_0| + \varepsilon |\alpha_1| + \varepsilon^2 |\alpha_2| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) + \\
 & + \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\frac{t}{\varepsilon} \gamma_1} \left(|\alpha_0| + |\alpha_1| + \varepsilon^2 |\alpha_2| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) + \\
 & + \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\frac{1-t}{\varepsilon} \gamma_2} \left(|\alpha_0| + |\alpha_1| + \varepsilon^2 |\alpha_2| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right), \quad j = 0, 1, 2, \quad (3)
 \end{aligned}$$

where $C > 0$ is a constant independent of ε .

The proof is based on the construction of a fundamental system of solutions to the corresponding homogeneous equation and on a representation of the solution in terms of Cauchy-type functions.

First, the integro-differential problem is reduced to a Fredholm integral equation of the second kind. Under the assumption that the associated kernel does not admit the eigenvalue 1, the resolvent exists, and the integral equation has a unique solution.

Next, asymptotic representations of the fundamental solutions and the corresponding Cauchy-type functions are derived as $\varepsilon \rightarrow 0$. Since the characteristic roots are real, distinct, and of opposite signs, exponential boundary-layer terms naturally arise in the asymptotic structure of the solution.

Asymptotic estimates for the coefficients in the representation are obtained from the corresponding algebraic system. These estimates show that certain coefficients are of order $O(\varepsilon)$, which reflects the regularizing effect of the integral operator.

Finally, combining the asymptotic estimates for the fundamental solutions, the coefficients, and the integral terms yields uniform asymptotic estimates for the solution and its derivatives, thereby completing the proof.

Keywords: singularly perturbed integro-differential equation, asymptotic estimates, Cauchy functions, fundamental solutions, small parameter.

2020 Mathematics Subject Classification: 34D15, 34E10, 34K26

References

- [1] Kellogg, R.B., Stynes, M. A singularly perturbed convection-diffusion problem in a half-plane., *Appl. Anal.*, **12**: 85 (2006), 1471–1485.
- [2] Daulybayev, M.K. *Linear integro-differential equations with a small parameter*. Almaty: Qazaq universiteti (2009).
- [3] Bobodzhanova, M.A., Kalimbetov, B.T., Safonov, V.F. Singularly perturbed integro-differential equations with degenerate Hammerstein's kernel., *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **116**: 4 (2024), 57–68.

Interpolation theorem for local Morrey-type spaces of periodic functions

D.K. CHIGAMBAYEVA

Astana IT University, Astana, Kazakhstan

chigambayeva.d@gmail.com

We consider the real interpolation method and prove that for local Morrey-type spaces of periodic functions, in the case when they have the same integrability parameter, the interpolation spaces are again local Morrey-type spaces of periodic functions with appropriately chosen parameters.

Definition 1. Let $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $\mathbb{T}^n = [0, 1)^n$, $Q_t(x)$ be a cube with center at the point $x \in \mathbb{T}^n$ and edge $t > 0$. Let us define the local Morrey-type spaces $LM_{p,q,x}^\lambda(\mathbb{T}^n)$ as the spaces of all Lebesgue measurable periodic functions $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ for which if $q < \infty$

$$\|f\|_{LM_{p,q,x}^\lambda(\mathbb{T}^n)} = \left(\int_0^1 (t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q_t(x))})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

and if $q = \infty$

$$\|f\|_{LM_{p,\infty,x}^\lambda(\mathbb{T}^n)} = \sup_{t>0} t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q_t(x))} < \infty.$$

Theorem 2. If T is a linear operator, then

$$(LM_{p,r_0,x}^{\lambda_0}(\mathbb{T}^n), LM_{p,r_1,x}^{\lambda_1}(\mathbb{T}^n))_{\theta,\tau} = LM_{p,\tau,x}^\lambda(\mathbb{T}^n), \quad (1)$$

where $0 < p, r_0, r_1, \tau \leq \infty$, $0 < \lambda_0, \lambda_1 < \infty$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$, $0 < \theta < 1$, $\lambda = (1 - \theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$.

Equivalence of the corresponding quasi-norm (1) was proved for the pair $LM_{p,r_i}^{\lambda_i}$ in [1] under the additional assumptions $\lambda_i \leq \frac{n}{p}$, $i = 0, 1$ and in general case in [2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP25795401).

Keywords: local Morrey-type spaces of periodic functions, real interpolation method, interpolation theorem.

2020 Mathematics Subject Classification: 42B35, 46E30, 46B70

References

- [1] Burenkov V.I., Nursultanov E.D. Description of interpolation spaces for local Morrey-type spaces, *Trudy Math. Inst. Steklov*, **269** (2010), 46–56.
- [2] Burenkov V.I., Chigambayeva D.K., Nursultanov E.D. Description of the interpolation spaces for a pair of local Morrey-type spaces and their generalizations, *Trudy Math. Inst. Steklov*, **284** (2014), 97–128.

Block Structure of Markov Partitions for the Golden-Mean Tent Map

A.A. DZHALILOV¹, X.Sh. ABDUSALOMOV²

¹ *Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan*

² *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

¹adzhalilov@gmail.com, ²hasanboy155abs@gmail.com

Piecewise monotone interval maps provide a classical and tractable source of chaotic dynamics and often admit symbolic descriptions via Markov partitions. Such codings translate geometric dynamics into combinatorial structures of admissible words and allow one to study orbit structure, invariant measures, and escape phenomena in open systems within a symbolic framework.

In this thesis we investigate a one-parameter family of tent-type maps and focus on a distinguished value of the slope for which the normalized dynamics on $[0, 1]$ admits a Markov partition generated by the backward orbit of the turning point. For this parameter the successive refinements of the partition exhibit a Fibonacci-type combinatorial structure: the atoms occur in exactly two sizes (“small” and “big”), and their location follows a rigid block pattern. As a consequence, the system is naturally modeled by a subshift with an explicit transition rule, providing a convenient symbolic representation for itineraries and for quantitative questions such as escape through Markov holes.

Tent-type family and normalization

Consider

$$T_\omega(x) = \begin{cases} \omega x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \omega(1-x), & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

For $1 < \omega < 2$ the map leaves invariant the interval

$$I_\omega = \left[\omega - \frac{\omega^2}{2}, \frac{\omega}{2} \right], \quad T_\omega(I_\omega) \subseteq I_\omega,$$

and we study $T_\omega|_{I_\omega}$. Define an affine homeomorphism

$$h_\omega : [0, 1] \rightarrow I_\omega, \quad h_\omega(x) = \left(\omega - \frac{\omega^2}{2} \right) (1-x) + \frac{\omega}{2} x,$$

and the normalized map on $[0, 1]$ by

$$\hat{T}_\omega = h_\omega^{-1} \circ T_\omega \circ h_\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

A direct computation gives

$$\hat{T}_\omega(x) = \begin{cases} \omega x + 2 - \omega, & 0 \leq x \leq \frac{\omega-1}{\omega}, \\ -\omega x + \omega, & \frac{\omega-1}{\omega} < x \leq 1, \end{cases}$$

with turning point $c_\omega = (\omega - 1)/\omega$.

Distinguished parameter and the first Markov step. Start with the two-interval partition

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \left[0, \frac{\omega-1}{\omega} \right], \left[\frac{\omega-1}{\omega}, 1 \right] \right\}.$$

A necessary Markov invariance requirement is that the image of the left endpoint aligns with the partition boundary:

$$\widehat{T}_\omega(0) = \frac{\omega - 1}{\omega}.$$

Since $\widehat{T}_\omega(0) = 2 - \omega$, we obtain

$$2 - \omega = \frac{\omega - 1}{\omega} \implies \omega_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

For this value the normalized map takes the form

$$\widehat{T}_{\omega_0}(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1-x), & c < x \leq 1, \end{cases} \quad c = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Refining Markov partitions and Fibonacci structure. Define the “natural” partition

$$\mathcal{P}_1 = \{I^s = [0, c], I^b = [c, 1]\},$$

where I^s is called *small* and I^b is called *big*. For $n \geq 1$ define refinements by

$$\mathcal{P}_{n+1} := \mathcal{P}_n \vee \widehat{T}_{\omega_0}^{-1}(\mathcal{P}_n).$$

Equivalently, endpoints of $\mathcal{P}_n$ belong to the finite backward orbit

$$\{0, c, \widehat{T}_{\omega_0}^{-1}(c), \widehat{T}_{\omega_0}^{-2}(c), \dots, \widehat{T}_{\omega_0}^{-n}(c), 1\}.$$

Theorem 1. *Let $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ be the Markov partitions generated by the backward orbit of c for $\widehat{T}_{\omega_0}$. Then the small and big atoms in $\mathcal{P}_n$ satisfy a rigid block structure:*

1. *If the total number of atoms in $\mathcal{P}_n$ is even, then the first atom is small and the last atom is big.*
2. *In $\mathcal{P}_{n+1}$ the first two atoms are big, whereas the last atom is small.*
3. *In $\mathcal{P}_{n+2}$ both the first two and the last two atoms are big.*

Moreover, away from the boundary, small atoms occur only in consecutive pairs, while big atoms occur in blocks of length two or four.

Symbolic dynamics and open systems

The Markov property yields a symbolic coding by a shift space: each orbit determines an itinerary through the atoms of $\mathcal{P}_1$, and admissibility is governed by a finite transition rule. Thus $\widehat{T}_{\omega_0}$ is (up to endpoints) conjugate to a subshift. This symbolic model can be used to study open dynamics by removing a Markov hole (i.e., a union of atoms) and estimating the escape rate via the induced subshift and its transition structure.

Keywords: Chaotic map, Tent map, Markov property, Fibonacci structure, escape rate.

2020 Mathematics Subject Classification: 37B10, 37E05.

References

- [1] Cospier D. *Periodic Orbits of Piecewise Monotone Maps*, PhD dissertation, Purdue University, Indianapolis (2018).
- [2] Devaney R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed., Addison–Wesley, Redwood City (1989).
- [3] Hasfura J.R., Lynch P. Periodic points of the family of tent maps, *American Mathematical Monthly*, **108**:1 (2001), 10–20.

Limit Theorems and Distributional Structure of a Nonlinear MA(1) processes

A.A. DZHALILOV¹, M.J. KAKHKHOROV²

¹ Turin Polytechnic University in Tashkent , Tashkent, Uzbekistan

² V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

¹adzhilov@gmail.com, ²mj.qahhorov@gmail.com

Moving average (MA) models constitute an important class of stochastic processes. The classical linear MA(m) model is defined as (see [1-4])

$$X_{n+1}(m) = \xi_{n+1} + \sum_{k=1}^m \theta_k \xi_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

where $\{\xi_n\}$ is a sequence of independent innovations. Such models form a cornerstone of the theory of stationary stochastic processes (see [1], [4]).

In this work we study a nonlinear MA(1) stochastic process defined as

$$X_{n+1} = g_h(\xi_n) + \xi_{n+1}, \quad (2)$$

where $g_h(x) = x^{1/h}$, $h > 1$ and ξ_n , $n \geq 1$ are independent, identically distributed (i.i.d.) random variables.

This model combines nonlinear distortion with finite memory structure, producing a strictly stationary process with explicitly computable first and second moments.

We formulate our main results.

Theorem 1. Let $\mathbb{X}(g_h) := \{X_n(g_h), n \in \mathbb{Z}\}$ be the nonlinear MA(1) stochastic process defined by (2). Then

1. The stochastic process $\{X_n\}$ is strictly stationary;

2. The expectation of X_1 equals

$$E[X_1] = \frac{h}{h+1} + \frac{1}{2};$$

3. The autocovariance function $R(m) = \text{Cov}(X_n, X_{n+m})$ satisfies

$$R(1) = \frac{h}{h+2} + \frac{h}{2(h+1)} + \frac{1}{4} + \frac{h^2}{(h+1)^2} - \left(\frac{h}{h+1} + \frac{1}{2} \right)^2,$$

and

$$R(m) = 0, \text{ for all } m > 1.$$

Thus, despite the nonlinear transformation, the dependence range remains finite as in classical MA(1) processes.

Theorem 2. The following limits hold almost surely:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \rightarrow E[X_1], \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^2 \rightarrow E[X_1^2],$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k X_{k+1} \rightarrow E[X_1 X_2].$$

These limits follow from the ergodic theorem for strictly stationary sequences. To analyze the dependence structure, consider the joint distribution

$$F(t_1, t_2) = P(X_1 < t_1, X_2 < t_2).$$

Since

$$X_1 = \xi_0^{1/h} + \xi_1,$$

$$X_2 = \xi_1^{1/h} + \xi_2,$$

the joint distribution is obtained via integration over the unit cube with nonlinear boundary constraints.

Theorem 3. *The joint distribution function*

$$F(t_1, t_2) = F_{X_1, X_2}(t_1, t_2)$$

is piecewise smooth with nonlinear boundary curves determining finitely many analytic regions.

We investigated a nonlinear $MA(1)$ stochastic process generated by a power transformation of uniform innovations. The model is strictly stationary and ergodic, with explicitly computable first and second moments. At the same time, its joint distribution exhibits a nontrivial piecewise analytic structure. The approach extends naturally to broader nonlinear moving average schemes.

Keywords: Moving Average process, Markov chain, stochastic stationary process, autocovariance function.

2020 Mathematics Subject Classification: 60G10, 60F05, 62M10

References

- [1] Brockwell P.J., Davis R.A. *Time Series: Theory and Methods*, Springer, New York (2016).
- [2] Hossein P. *Introduction to Probability, Statistics and Random Processes*, Kappa Research, LLC, Athens (2014).
- [3] James D.H. *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey (1994).
- [4] Shiryaev A.N. *Probability. 2016. New York: Graduate Texts in Mathematics (GTM)*.

Null Lagrangians in free Novikov algebras

A.S. DZHUMADIL'DAEV¹, N.A. ISMAILOV²

^{1,2}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Astana IT University, Astana, Kazakhstan*

¹askar56@gmail.com, ²nurlan.ismail@gmail.com

Let $\mathbb{F}$ be a field of characteristic 0. Recall that an algebra is *right-symmetric* if

$$(a, b, c) = (a, c, b),$$

where $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ is the associator, and it is *Novikov* if, in addition,

$$a(bc) = b(ac).$$

A fundamental example is the right-symmetric Witt algebra $L_n = (W_n, \cdot)$ on the Witt algebra W_n of derivations of $P_n = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$, with multiplication

$$u\partial_i \cdot v\partial_j = (v\partial_j(u))\partial_i.$$

For $n = 1$ this becomes the Novikov–Witt algebra and generates the variety of Novikov algebras over $\mathbb{F}$.

In this talk we study the *symmetrization* of the Novikov product,

$$a \circ b := ab + ba,$$

inside the free Novikov algebra $\text{Nov}\langle X \rangle$. Let $S\langle X \rangle$ be the smallest subspace containing X and closed under $\circ$; its elements will be called *symmetric elements*. Using the standard embedding of $\text{Nov}\langle X \rangle$ into a commutative differential algebra [1], we give an explicit linear basis of $S\langle X \rangle$ in terms of differential polynomials.

The main result identifies $S\langle X \rangle$ with the space of *null Lagrangians* from the formal calculus of variations: for homogeneous $f(x_1, \dots, x_n)$ with $\deg_{x_i}(f) > 0$ for all i , we show that $f \in S\langle X \rangle$ (and $\deg f > 1$) is equivalent to the vanishing of the Euler operators (variational derivatives) $E_i(f) = 0$; moreover, it suffices that $E_k(f) = 0$ for a single k .

Finally, we describe the $\mathfrak{S}_m$ -module structure of the multilinear component of $S\langle X \rangle$ in terms of induced modules and Kostka numbers, obtaining an explicit admissibility criterion for Specht modules.

For details and proofs of the results, see our paper [2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26199089).

Keywords: Novikov algebra, symmetrized product, null Lagrangian, Euler operator, symmetric group modules.

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 13N15; Secondary 17A30, 17D25, 49K15

References

- [1] Dzhumadil'daev A., Löfwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, *Homology Homotopy Appl.*, Vol. 4(2), (2002), 165–190.
- [2] A. Dzhumadil'daev and N. Ismailov, *Null Lagrangians in free Novikov algebras*, arXiv:2601.11168 (2026), doi: 10.48550/arXiv.2601.11168.

Leibniz algebras, Transposed Poisson algebras and their weak versions

A.S. DZHUMADIL'DAEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

askar56@gmail.com

An algebra with the following identities is called Poisson, if A is associative admissible, Lie-admissible and adjoint Lie action is derivation of associative part:

$$\langle a, b, c \rangle = 0,$$

$$[a, b * c] = [a, b] * c + b * [a, c],$$

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0,$$

where $[a, b] = ab - ba$, $a * b = ab + ba$ and $\langle a, b, c \rangle = a * (b * c) - (a * b) * c$.

An algebra with the following identities is called transposed Poisson:

$$\langle a, b, c \rangle = 0,$$

$$2a * [b, c] = [a * b, c] + [b, a * c],$$

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

An algebra with the following identities is called *WW-transposed Poisson*:

$$\langle a, b, c \rangle = 0,$$

$$2a * [b, c] = [a * b, c] + [b, a * c].$$

W-Leibniz algebras are defined by identities

$$[a, b]c = 2a(bc) - 2b(ac),$$

$$a[b, c] = 2(ab)c - 2(ac)b.$$

WW-Leibniz algebras are defined by identities

$$[a, b] * c = a(b * c) - b(a * c), \quad a * [b, c] = (a * b)c - (a * c)b.$$

Theorem 1. *Polarization of any W-Leibniz algebra is transposed Poisson, and conversely depolarization of any transposed Poisson algebra is W-Leibniz.*

Theorem 2. *Any W-Leibniz algebra is WW-Leibniz. Polarization of any WW-Leibniz algebra is WW-transposed Poisson, and conversely depolarization of any WW-transposed Poisson algebra is WW-Leibniz.*

Theorem 3. *Any WW-transposed Poisson algebra is 1-Alia, i.e., satisfies the identity*

$$[a, b] * c + [b, c] * a + [c, a] * b = 0.$$

Corollary 4. *Transposed Poisson algebras can be generated by the following identities*

$$\langle a, b, c \rangle = 0,$$

$$[a, b] * c - a(b * c) + b(a * c) = 0,$$

$$[a, b]c + [b, c]a + [c, a]b = 0.$$

Keywords: Leibniz algebras, transposed Poisson algebras, weak identities, polarization.

2020 Mathematics Subject Classification: 17A32, 17B63, 17B60

Killing vector fields in the Sol space

M.A. ERGASHEV

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

turonsitiyim@gmail.com

Sol geometry is one of the eight fundamental model geometries in Thurston's list of three-dimensional geometries [1], and it is associated with a solvable but non-nilpotent Lie group. The Sol model is commonly viewed as a Lie group equipped with a left-invariant metric. Consequently, in Sol geometry, geodesics, curvature invariants, and the structure of the isometry group differ substantially from the Euclidean and hyperbolic cases. This makes Sol geometry an important object in the study of geometric structures on three-dimensional manifolds.

Definition 1. [2] The Sol manifold is the Lie group on $\mathbb{R}^3$ with the group law

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z').$$

Its matrix representation is given by

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On the Sol manifold, a left-invariant metric is given by

$$g = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2. \quad (1)$$

Let (M, g) be a Riemannian manifold and let V be a vector field on M .

Definition 2. [3] A vector field V is called a Killing vector field if the Lie derivative of the metric g in the direction of V vanishes, that is,

$$\mathcal{L}_V g(X, Y) = V(g(X, Y)) - g([V, X], Y) - g(X, [V, Y]) = 0,$$

where $X, Y \in \Gamma(TM)$ and $[\cdot, \cdot]$ denotes the Lie bracket.

Assume that a vector field V decomposes with respect to the frame fields as

$$V = V^1 E_1 + V^2 E_2 + V^3 E_3,$$

where V^1, V^2, V^3 are smooth functions on $\mathbb{R}^3$. Then the following identity holds:

$$\mathcal{L}_V g(E_i, E_j) = g(\nabla_{E_i} V, E_j) + g(E_i, \nabla_{E_j} V).$$

In [4], a diagonal Riemannian metric is considered, where f_1, f_2, f_3 are smooth nowhere-vanishing functions. In the Sol case, since the metric is given by (1), these functions are

$$f_1 = e^{-z}, \quad f_2 = e^z, \quad f_3 = 1. \quad (2)$$

Therefore, the orthonormal frame fields are

$$E_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3)$$

However, the assumptions of [4, Proposition 2.2 and Corollary 2.4] do not apply in this setting. Consequently, the frame fields on the Sol manifold are not Killing vector fields. We now determine all Killing vector fields on the Sol manifold.

Theorem 3. A vector field V is a Killing vector field on the Sol manifold if and only if $V^1 = e^z(-c_1 x + c_2)$, $V^2 = e^{-z}(c_1 y + c_3)$, $V^3 = c_1$, where $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

From the theorem, three linearly independent Killing vector fields on the Sol manifold can be chosen as follows:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Keywords: Thurston geometries, Sol manifold, Killing vector field, Lie derivative.

2020 Mathematics Subject Classification: 53C30, 53C20, 22E25.

References

- [1] Thurston. W.P. *Three-dimensional Geometry and Topology I*, Princeton Math. Series, 35 (S. Levy ed.), (1997).
- [2] Scott. P. The Geometries of 3-Manifolds, *Bull. London Math. Soc.*, **15**:5 (1983), 401–487.
- [3] Killing. W. Uber die Grundlagen der Geometry, *Crelle's Journal*, **109** (1892), 121–186.
- [4] Blaga. A.M. On certain symmetries of $\mathbb{R}^3$ with a diagonal metric, *Filomat*, **39**:24 (2025), 8417–8437.
- [5] Erjavec. Z. Generalizations of Killing vector fields in Sol space. *Filomat*, **33**:15 (2019), 4803–4810.

Non-radial solutions of Boussinesq equation

A. ESFAHANI

Nazarbayev University, Astana

amin.esfahani@nu.edu.kz

This work investigates angular traveling wave solutions of the high-dimensional Boussinesq equation, a class of nonlinear partial differential equations arising in fluid dynamics, nonlinear optics, and wave propagation. Unlike stationary solutions, angular traveling waves propagate with a nonzero speed in high-dimensional spaces, exhibiting more complex geometrical and dynamical properties. We focus on the generalized Boussinesq equation in $d \geq 2$ spatial dimensions:

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + \Delta F(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

where $u = u(x, t)$ is the wave profile, Δ denotes the Laplacian, Δ^2 the biharmonic operator, and $F(u)$ is a nonlinear function, often taken as $F(u) = u^p$ for some $p > 1$.

Angular traveling waves are sought in the form: $u(x, t) = \phi(x - \vec{c}t)$, where $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is the profile function, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ is the wave speed in different directions. Substituting this ansatz into the PDE reduces it to a nonlinear elliptic equation:

$$-(c \cdot \nabla)^2 \phi - \Delta \phi + \Delta^2 \phi + \Delta F(\phi) = 0. \quad (2)$$

Unlike the ground-state stationary solutions ($\vec{c} = 0$), these waves generally lack positivity, radial symmetry, and exponential decay, which complicates the analysis. Using variational methods, we define the associated energy functional:

$$E[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \phi|^2 + |\phi|^2 - \left| \frac{c \cdot \nabla}{\sqrt{-\Delta}} \phi \right|^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^d} G(\phi) dx, \quad (3)$$

where G is a primitive of F . Critical points of E under appropriate constraints correspond to traveling wave solutions. Orbital stability of these waves is studied using linearization around ϕ and spectral analysis of the linearized operator associated to (2), revealing conditions under which perturbations grow or remain bounded. Perturbation theory and geometric arguments further identify regimes of strong instability, especially for higher-dimensional and faster-moving waves.

This study extends classical Boussinesq theory to high-dimensional, non-radial traveling waves and provides a framework for analyzing their existence, qualitative features, and stability properties. These results are relevant to nonlinear wave modeling in multidimensional media, offering insights into pattern formation and wave propagation beyond the stationary case.

Funding: This research was supported by Nazarbayev University under Faculty Development Competitive Research Grants Program for 2023-2025 (grant number 20122022FD4121).

Keywords: High-dimensional Boussinesq equation; angular traveling waves; nonlinear PDEs; orbital stability; variational methods; perturbation theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q35, 35B35, 35B40, 35C07, 35G31

References

- [1] Bona J.L., Sacks T.L. The global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation, *Commun. Math. Phys.*, **118**:1 (1998), 15–29.
- [2] Liu Y., Ohta M., Todorova G. Strong instability of solitary waves for nonlinear Klein–Gordon equations and generalized Boussinesq equations, *Ann. Henri Poincaré Anal. Nonlinear*, **24**:4 (2007), 539–548.
- [3] Esfahani A. traveling waves of the high-dimensional Boussinesq equation, *Studies Appl. Math.*, **153**:1 (2024), Article e12690.

A boundary–initial value problem for fractional differential equations with sequential caputo derivatives

Yu.E. FAYZIEV¹, Sh.F. JUMAEVA²

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

^{1,2}V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

¹fayziev.yusuf@mail.ru, ²shahnozafarhodovna79@gmail.com

We investigate a boundary-initial value problem for a linear fractional differential equation involving sequential Caputo derivatives.

Let

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}.$$

We consider the governing equation:

$$D_t^\beta(D_t^\alpha u(x, t)) + D_t^\beta u(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

where D_t^α and D_t^β denote the Caputo fractional derivatives of orders $0 < \alpha < 1$ and $0 < \beta < 1$, respectively, and $f(x, t)$ is a given smooth source term. The problem is subject to the initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x) \text{ and } D_t^\alpha u(x, 0) = \psi(x) \text{ for } 0 \leq x \leq 1,$$

and the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ for } 0 < t \leq T.$$

The presence of sequential fractional derivatives introduces significant analytical complexities compared to classical single-term models. We address the main analytical difficulties in three stages. First, we analyze the interaction of the sequential fractional operators [1]. Next, we introduce the bivariate Mittag–Leffler function and summarize the key properties required for the solution construction [2]. Using this framework, we derive an explicit closed-form analytic solution, which clarifies how the two fractional orders jointly govern the temporal dynamics of the system.

To validate the analysis, we implement a MATLAB simulation. The spatial discretization is performed using the finite element method (FEM)[3], and the time-fractional terms are approximated using the L1 scheme [4]. The numerical results show excellent agreement with the exact solution, confirming the accuracy and reliability of the proposed approach.

Keywords: sequential fractional derivatives, bivariate Mittag–Leffler function, boundary-initial value problem, Caputo derivative.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11, 33E12, 34A08, 35A02, 65M12

References

- [1] Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley Sons, New York (1993).
- [2] Garg M., Manohar P., Kalla S. L. A Mittag–Leffler-type function of two variables, *Integral Transforms and Special Functions*, **24**:11 (2013), 934–944.
- [3] Larson M. G., Bengzon F. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*, Springer Berlin, Heidelberg (2013).
- [4] Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, **225** (2007), 1533–1552.

On a nonlocal problem for a fractional differential equation of the Boussinesq type with Hilfer derivative

Yu.E. FAYZIEV¹, Sh.Sh. SADULLAEVA²

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

^{1,2}V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

¹fayziev.yusuf@mail.ru, ²ssh45984@gmail.com

In this paper, we investigate a nonlocal problem for the Boussinesq type equation with fractional Hilfer derivative. The integral of the Riemann-Liouville order α of the function $y(t)$ in the interval $[0, +\infty)$ is defined by the following formula (see [1]):

$$I^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi.$$

The Hilfer fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$ and $0 \leq \beta \leq 1$ of the function $y(t)$ is defined as following (see [2]):

$$D^{\alpha,\beta} y(t) = I^{\beta(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} I^{(1-\beta)(2-\alpha)} y(t), \quad t > 0.$$

Let $1 < \alpha < 2$ and $0 \leq \beta \leq 1$ are a fixed number and let $C((a, b); H)$ stands for a set of continuous functions $u(t)$ of $t \in (a, b)$ with values in H . Consider the following fractional equation:

$$D_t^{\alpha,\beta} u(t) + AD_t^{\alpha,\beta} u(t) + \nu^2 Au(t) = 0, \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

with nonlocal conditions

$$I^\delta u(0) = I^\delta u(T), \quad (2)$$

and

$$\int_0^T u(t) dt = \varphi, \quad (3)$$

where $\varphi \in H$ is given function and $\delta = (2 - \alpha)(1 - \beta)$ and $\nu > 0$ are fixed numbers.

We address the main analytical difficulties in three stages. In the first stage, we will analyze the fractional operator appearing in the equation and its role in the problem, providing the required background material ([2]). The second stage will be devoted to the Mittag-Leffler functions, their fundamental properties, and the necessary estimates used throughout the paper([3]). The last stage, we will formulate the main result of the work and construct a formal solution to the problem (1)–(3).

Keywords: Boussinesq type equation, Hilfer fractional derivative, Mittag-Leffler function, nonlocal problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11, 33E12, 34A08, 35A02, 65M12

References

- [1] C. Lizama, *Abstract linear fractional evolution equations. Handbook of Fractional Calculus with Applications*, (2019).
- [2] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics* World Scientific, Singapore, (2000).
- [3] Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogozin S. V. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications* (Springer, 2014).

Moduli of Smoothness and Growth Properties of the Hartley Transform

A. GABDIZHANOV¹, N. KAKHARMAN², N. SHYNTEMIROV³

^{1,2,3}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2,3}*SDU University, Almaty, Kazakhstan*

¹gabdzhanov.ali@gmail.com, ²n.shyntemirov@gmail.com, ³n.kakharman@math.kz

In classical Fourier analysis, the smoothness of a function determines the decay rate of its Fourier coefficients, a connection quantified using integral moduli of smoothness. Recently, [1] derived inequalities for Fourier transforms on various function spaces, providing a quantitative version of the Riemann–Lebesgue lemma. This approach has been extended to other integral transforms. In particular, [2] studied the Hartley transform on Euclidean space and the torus using a modulus of continuity, establishing a Riemann–Lebesgue lemma and an analogue of Titchmarsh’s theorem. The Hartley transform of a function f is defined by

$$\mathcal{H}_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\cos(\omega x) + \sin(\omega x)] dx, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

and it is an involution [3], mapping real-valued functions to real-valued outputs [4,5]. To measure smoothness, we employ higher-order symmetric difference operators. For $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, define

$$Z_h[f](x) = f(x + h/2) + f(x - h/2) - 2f(x), \quad h > 0.$$

For $k \in \mathbb{N}$, let $(Z_h)^k$ denote the k -th iterate of Z_h , which can be expressed as

$$(Z_h)^k f(x) = \sum_{j=-k}^k (-1)^{k-j} \binom{2k}{k-j} f\left(x + j\frac{h}{2}\right),$$

for $j = -k, -k+1, \dots, k$.

The corresponding L_p -modulus of smoothness of order k is defined by

$$\Omega_k(f; \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \|(Z_h)^k f\|_p, \quad \delta > 0.$$

In this work, we extend the Hartley transform framework to higher-order smoothness classes. By deriving inequalities that estimate the transform via higher-order moduli of smoothness, we obtain refined versions of classical lemmas and a more precise description of how a function’s smoothness governs the decay of its Hartley transform.

Theorem 1. *Let $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq 2$, and $p' = p/(p-1)$. There exists a constant $C_{k,p} > 0$ such that for every $f \in L^p(\mathbb{R})$ and $\delta > 0$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \min\{1, (|\omega|\delta)^{2kp'}\} |\mathcal{H}_f(\omega)|^{p'} d\omega \right)^{1/p'} \leq C_{k,p} \Omega_k(f; \delta)_p.$$

For $p = 1$, the inequality is interpreted as $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left\{ \min\{1, (|\omega|\delta)^{2k}\} |\mathcal{H}_f(\omega)| \right\} \leq C_{k,1} \Omega_k(f; \delta)_1$.

These results provide quantitative versions of classical decay estimates and describe how higher-order smoothness of a function influences the behavior of its Hartley transform. They can be extended to periodic settings, allowing analogous estimates for Hartley series on the torus.

Keywords: Hartley transform; moduli of smoothness; Riemann–Lebesgue Lemma; Hausdorff–Young inequality; Titchmarsh-type theorem.

2020 Mathematics Subject Classification: 42A38, 42B10, 42B15

References

- [1] W. O. Bray and M. A. Pinsky, Growth properties of Fourier transforms via moduli of continuity, *Journal of Functional Analysis*, 255(9) (2008), 2265–2285.
- [2] N. Kakharman and N. Tokmagambetov, Growth properties of Hartley transform via moduli of continuity, *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 15 (2024), 69.
- [3] R. V. L. Hartley, A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems, *Proceedings of the IRE*, 30 (1942), 144–150.
- [4] R. N. Bracewell, The Hartley Transform, *Oxford Engineering Science Series*, vol. 19, 1st edn., Stanford University Press, Stanford, (1986).
- [5] K. J. Olejniczak, The Hartley Transform, *The Transforms and Applications Handbook*, vol. 281, (2000).

Modified Cauchy Problem for an Euler–Poisson–Darboux-Type Equation with Nonlocal Boundary Conditions

A. GABDIZHANOV¹, N. KAKHARMAN², N. SHYNTEMIROV³

^{1,2,3}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2,3}*SDU University, Almaty, Kazakhstan*

¹gabdzhanov.ali@gmail.com, ²n.shyntemirov@gmail.com, ³n.kakharman@math.kz

Let $0 < \alpha < 3$ and $D_\tau := (0, 1) \times (0, T_\tau)$, where $T_\tau > 0$. For given functions $f \in L^2(D_\tau)$ and $q \in C([0, 1])$, we consider the following initial–boundary value problem for an Euler–Poisson–Darboux-type equation:

$$u_{\tau\tau}(x, \tau) + \frac{\alpha}{\tau} u_\tau(x, \tau) - u_{xx}(x, \tau) + q(x)u(x, \tau) = f(x, \tau), \quad (x, \tau) \in D_\tau, \quad (1)$$

subject to the weighted initial conditions

$$u(x, 0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^\alpha u_\tau(x, \tau) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

and the nonlocal boundary conditions

$$\begin{cases} u_x(0, \tau) + u_x(1, \tau) = 0, \\ u_x(1, \tau) + u(0, \tau) + u(1, \tau) = 0, \end{cases} \quad \tau \in (0, T_\tau]. \quad (3)$$

The problem exhibits two essential difficulties. First, the coefficient τ^{-1} is singular at $\tau = 0$, so the equation degenerates on the initial line and the initial conditions must be understood in a weighted sense compatible with this singular structure. Second, the boundary conditions are nonlocal and couple the values of the solution and its derivative at the endpoints.

Similar problems with nonlocal boundary conditions for degenerate hyperbolic equations have been studied in [1]. We prove the existence and uniqueness of a solution in suitable weighted Sobolev spaces and derive an a priori estimate. .

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22785364).

Keywords: Modified Cauchy problem, hyperbolic equation with non-local boundary condition.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35L15, 35B45

References

- [1] Kakharman N., Kalmenov T. Sh. A modified Cauchy problem with nonlocal boundary condition for a degenerate hyperbolic equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **48**:8 (2025), 9313–9319.

Estimates for integral majorants on the cones of monotone functions

A. GOGATISHVILI¹, G. KARSHYGINA²

¹*Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czechia*

²*Astana International University, Astana, Kazakhstan*

¹gogatish@math.cas.cz, ²karshygina84@mail.ru

Through $L_0^+(0, T)$ we denote the set of all nonnegative Lebesgue measurable functions on $(0, T)$, where $T \in (0, \infty]$. Let K be the cone in $L_0^+(0, T)$, equipped with a positively homogeneous nondegenerate functional ρ_K :

$$K \rightarrow [0, \infty); \quad h \in K, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha h \in K, \quad \rho_K(\alpha h) = \alpha \rho_K(h); \quad (1)$$

$$\rho_K(h) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ almost everywhere on } (0, T). \quad (2)$$

On the set $L_0^+(0, T)$ consider two order relations.

Pointwise relation: $f \leq g$ means that, $f(t) \leq g(t)$ for almost all $t \in (0, T)$.

Integral relation: $f \prec g$ means that,

$$\frac{1}{t} \int_0^t f d\tau \leq \frac{1}{t} \int_0^t g d\tau, \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

Clearly, $f \leq g \Rightarrow f \prec g$. For the cone K we introduce pointwise and integral majorants:

$$\lambda_K(t) = \sup\{h(t) : h \in K; \rho_K(h) \leq 1\}, \quad t \in (0, T); \quad (4)$$

$$\tilde{\lambda}_K(t) = \sup \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t h d\tau : h \in K; \rho_K(h) \leq 1 \right\}, \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

If functions from the cone K are decreasing, then

$$\lambda_K(t) \leq \tilde{\lambda}_K(t), \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

since for $0 \leq h \downarrow$ we have the estimate

$$\frac{1}{t} \int_0^t h(\tau) d\tau \geq \frac{1}{t} \int_0^t h(t) d\tau = h(t), \quad t \in (0, T)$$

Definition 1. The cone M , equipped with the functional ρ_M , covers the cone K , provided functional ρ_K , pointwise with covering constants $c_0 \in \mathbb{R}_+, c_1 \in [0, \infty)$, if for any function $h_1 \in K$ there is function $h_2 \in M$, such that

$$\rho_M(h_2) \leq c_0 \rho_K(h_1); \quad h_1(t) \leq h_2(t) + c_1 \rho_K(h_1), \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

If $T = \infty$ we assume in (2.7), that $c_1 = 0$.

Definition 2. The cone M , equipped with the functional ρ_M , covers the cone K , provided functional ρ_K , integrally with covering constants $c_0 \in \mathbb{R}_+, c_1 \in [0, \infty)$, if for any function $h_1 \in K$ there is function $h_2 \in M$, such that

$$\begin{aligned} \rho_M(h_2) &\leq c_0 \rho_K(h_1); \\ \frac{1}{t} \int_0^t h_1(\tau) d\tau &\leq \frac{1}{t} \int_0^t h_2(\tau) d\tau + c_1 \rho_K(h_1), \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (8)$$

For $T = \infty$ we assume in (2.8), that $c_1 = 0$.

Let us introduce the notation: $K \leq M(c_0, c_1)$ for pointwise covering, $K \prec M(c_0, c_1)$ for the integral covering.

Equivalence of the cones $K \cong M$, or $K \approx M$ (pointwise or integral, respectively) means mutual covering of cones, i.e.

$$\begin{aligned} K \cong M &\Leftrightarrow K \leq M(c_0, c_1), \quad M \leq K(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1) \\ K \approx M &\Leftrightarrow K \prec M(c_0, c_1), \quad M \prec K(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

For $T = \infty$ we assume in (2.9) and (2.10) that $c_1 = \tilde{c}_1 = 0$.

Theorem 2.4.

1. Let $K \leq M(c_0, c_1)$. Then the pointwise majorants satisfy the estimate

$$\lambda_K(t) \leq c_0 \lambda_M(t) + c_1, \quad t \in (0, T). \quad (2.13)$$

2. Let $K \prec M(c_0, c_1)$. Then, the integral majorants satisfy the estimate

$$\tilde{\lambda}_K(t) \leq c_0 \tilde{\lambda}_M(t) + c_1, \quad t \in (0, T). \quad (2.14)$$

Keywords: diffusion equation, homogeneous body, initial state, local inhomogeneity, transparent boundary conditions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Gogatishvili A., Neves J. S., Opitz B. Optimality of embeddings of Bessel-potential type spaces, *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, **pp.** (2005), 97 – 102.
- [2] Bokayev N. A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. Criteria for embeddings of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces, *Eurasian Math. Journal*, **Vol** 10, **No.** 2, **pp.** (2019), 8–29.
- [3] Goldman M. L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **Vol.** 55, (2010), **No.** 8-10, **pp.** 817–832.

Growth of the length function for non-associative algebras

Alexander GUTERMAN

Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel

alexander.guterman@biu.ac.il

Let A be a finite-dimensional algebra over a field, and S be its generating set. The least positive integers k such that all products of the elements from S of degree not exceeding k span A is called the *length* of S . The maximal length of S among all sets S that generate A is called the *length* of A . Length function is an important invariant widely used to study finite dimensional algebras since 1959 and it is intensively investigated. There are plenty of works devoted to this subject. It is straightforward to check that the length of an associative finite dimensional algebra is less than its dimension d and can be equal to $d - 1$ only for commutative algebras. The length of a d -dimensional non-associative algebra is bounded by 2^{d-2} , and this bound is tight. However, the precise length evaluation is a difficult problem even in associative case. For example, the length of the full matrix algebra is unknown. It was conjectured by Paz in 1984 to be a linear function on the size of matrices and this conjecture is still open.

We investigate different algebraic properties of the length function for associative and non-associative algebras and in particular present our recent results on the upper bounds for the length of different classes of non-associative algebras, such as, Leibnitz algebras, quadratic algebras, Lie algebras, Malcev algebras, etc. Also we investigate the values which can be attained by the length function on different classes of algebras.

The talk is based on the series of joint works with Dmitry Kudryavtsev, Olga Markova and Svetlana Zhilina.

Description of translation-invariant ground states for the $(m+1)$ -state Chui-Weeks Model

M.A. HAKIMOVA¹, M.A. RASULOVA²

¹Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

²V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

¹hakimovamuslimaxon@gmail.com, ²m_rasulova_a@rambler.ru

We consider the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order two, where the spin variable takes values in the discrete set $\Phi = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, and describe all translation-invariant ground states for this model.

For $A \subseteq V$, a spin *configuration* σ_A on A is a function $\sigma_A : A \rightarrow \Phi$, $x \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$ for all $x \in A$. The set of all configurations on A is $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

Definition 1. A configuration that is invariant with respect to all shifts is called translation-invariant.

The Chui-Weeks model (see, e.g., [2,3]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{\sigma(x), 0}, \quad (1)$$

where $J, \alpha \in \mathbb{R}$, and $\sigma \in \Omega$ as well as $\delta_{i,j}$ denotes the Kronecker delta, that is, $\delta_{i,j} = 1$ if $i = j$ and 0 otherwise.

Recall that model (1) coincides with the SOS model under the condition $\alpha = 0$ (see, e.g., [1]).

Let M be the set of all unit balls with vertices in V . The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = \frac{J}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} |\sigma(x) - \sigma(c_b)| + \frac{\alpha}{k+2} \sum_{x \in b} \delta_{\sigma(x), 0},$$

where $J = (J, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ and c_b is the center of the unit ball b ; σ_b is the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$.

The Hamiltonian (1) can be written as

$$H(\sigma) = \sum_{b \in M} U(\sigma_b).$$

Lemma 2. For each configuration φ_b on the Cayley tree of order two, we have the following

$$U(\varphi_b) \in \{U_i : i = 0, 1, \dots, S(m)\},$$

where

$$\begin{aligned} U_0 &= 0; U_1 = \frac{J}{2}; U_2 = J; U_3 = \frac{3J}{2}; \dots; U_{3(m-1)} = \frac{3(m-1)J}{2}; \\ U_{3m-2} &= \frac{J}{2} + \frac{\alpha}{4}; U_{3m-1} = J + \frac{\alpha}{4}; U_{3m} = \frac{3J}{2} + \frac{\alpha}{4}; \dots; U_{6m-3} = \frac{3mJ}{2} + \frac{\alpha}{4}; \\ U_{6m-2} &= J + \frac{\alpha}{2}; U_{6m-1} = \frac{3J}{2} + \frac{\alpha}{2}; U_{6m} = \frac{4J}{2} + \frac{\alpha}{2}; \dots; U_{9m-5} = \frac{(3m-1)J}{2} + \frac{\alpha}{2}; \\ U_{9m-4} &= \frac{J}{2} + \frac{3\alpha}{4}; U_{9m-3} = J + \frac{3\alpha}{4}; U_{9m-2} = \frac{3J}{2} + \frac{3\alpha}{4}; \dots; U_{S(m)-1} = \frac{3mJ}{2} + \frac{3\alpha}{4}; \\ U_{S(m)} &= \alpha, \text{ where } S(m) = 11m - 3 - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil. \end{aligned}$$

Definition 3. A configuration φ is called a *ground state* for the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \min\{U_i : i = 0, 1, \dots, S(m)\}$$

for any $b \in M$.

We denote $A_\xi = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min\{U_i : i = 0, 1, \dots, S(m)\}\}$.

Calculations show that:

$$A_0 = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \geq 0, \alpha \geq 0\}; \quad A_{S(m)} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : 6mJ \geq \alpha, \alpha \leq 0\}.$$

Definition 4. If a translation-invariant configuration is a ground state, then we call it a translation-invariant ground state.

The following theorem describes all translation-invariant ground states for the $(m+1)$ -state Chui-Weeks model on the Cayley tree of order two.

Theorem 5. For the $(m+1)$ -state Chui-Weeks model on the Cayley tree of order two, the following assertions hold:

- (i) The configuration $\sigma(x) = 0$ for all $x \in V$ is the translation-invariant ground state iff $(J, \alpha) \in A_{S(m)}$;
- (ii) The configuration $\sigma(x) = i$, $i \in \Phi \setminus \{0\}$ for all $x \in V$ is the translation-invariant ground state iff $(J, \alpha) \in A_0$;
- (iii) If $(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \setminus (A_0 \cup A_{S(m)})$, then there is no translation-invariant ground state.

Keywords: Cayley tree, Chui-Weeks model, configuration, ground state, translation-invariant ground state.

2020 Mathematics Subject Classification: 82B20, 82B26, 60K35

References

- [1] Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, Singapore (2013).
- [2] Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A., Hakimova M. A. On periodic ground states for the Chui-Weeks model, *Acta NUUZ: Exact sciences*, **4** (1994), 3–5.
- [3] Rasulova M.A., Hakimova M.A. Periodic ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order three, *Letters in Mathematical Physics*, **115**:130 (2025), 1–15.

Two periodic Gradient Gibbs measures on Cayley trees

R.A. ILYASOVA

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

New Uzbekistan University, Tashkent, Uzbekistan

¹ilyasova.risolat@mail.ru, ²r.ilyasova@newuu.uz

The *gradient Gibbs specification* is defined as the family of probability kernels $\gamma^\nabla = \{\gamma_\Lambda^\nabla\}_{\Lambda \in \mathcal{N}}$ from $(\Omega^\nabla, \mathcal{T}_\Lambda^\nabla)$ to $(\Omega^\nabla, \mathcal{F}^\nabla)$ defined for all $\delta, \zeta \in \Omega^\nabla$ by

$$\gamma_\Lambda^\nabla(\delta \mid \zeta) := \begin{cases} \frac{1}{Z_\Lambda(\zeta)} \exp\left(-\beta H_\Lambda^U(\nabla \omega_{\Lambda \cup \partial \Lambda})\right), & \text{if } \omega \in \Omega : \nabla \omega|_\Lambda = \delta_\Lambda, \nabla \omega \sim_{\partial \Lambda} \zeta, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

where $Z_\Lambda(\zeta)$ is the partition function given by

$$Z_\Lambda(\zeta) = \sum_{\substack{\nabla \omega \in \Omega_{\Lambda \cup \partial \Lambda}^\nabla \\ \nabla \omega \sim_{\partial \Lambda} \zeta}} \exp\left(-\beta H_\Lambda^U(\nabla \omega_{\Lambda \cup \partial \Lambda})\right).$$

The definition given in (1) coincides with the definition in [13], which is formulated as follows

$$\gamma_{\Lambda}^{\nabla}(A \mid \zeta) = \frac{\sum_{\rho_{\Lambda \cup \partial \Lambda}} \alpha_{\Lambda \cup \partial \Lambda}^Q(\rho_{\Lambda \cup \partial \Lambda}) \mathbf{1}_A(\rho_{\Lambda \cup \partial \Lambda} \zeta_{\Lambda^c}) \mathbf{1}_{\rho \sim \partial \Lambda} \zeta}{\sum_{\rho_{\Lambda \cup \partial \Lambda}} \alpha_{\Lambda \cup \partial \Lambda}^Q(\rho_{\Lambda \cup \partial \Lambda}) \mathbf{1}_{\rho \sim \partial \Lambda} \zeta}, \quad (2)$$

for all measurable sets $A \in \mathcal{F}^{\nabla}$, where $\mathbf{1}_A$ denotes the characteristic function of the set A , $\alpha_{\Lambda \cup \partial \Lambda}^Q$ is given by the product specification,

Let G_k denote the free product of $k+1$ cyclic groups of order two. The elements of G_k are reduced words in the generators $a_1, \dots, a_{k+1}$, and the group operation is defined by concatenation of words followed by reduction using the relations $a_i^2 = e$.

It is known that there is a one-to-one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and the group G_k ([14]). Every element $x \in G_k$ is a finite word of symbols where two adjacent symbols are from different groups

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}, \quad \text{where } 1 \leq i_m \leq k+1, \quad m = 1, \dots, n.$$

The number n is called the length of the word and the number of letters $a_i, i = 1, \dots, k+1$, that enter the non-contractible representation of the word x is denoted by $\omega_x(a_i)$. Let $N_k = \{1, \dots, k+1\}$, and define the set

$$H_A = \left\{ x \in G_k \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is even} \right\}, \quad A \subseteq N_k.$$

By Proposition 1.2 in [14], for any $A \neq \emptyset$, the set $H_A \subset G_k$ is a normal subgroup of index two.

Definition 1. A family of vectors $\{l_{xy}\}_{\langle x, y \rangle \in \vec{L}}$, where $l_{xy} \in (0, \infty)^{\mathbb{Z}}$, is called a *boundary law* for the transfer operators $\{Q_b\}_{b \in L}$ if for each $\langle x, y \rangle \in \vec{L}$, there exists a constant $c_{xy} > 0$ such that the consistency equation

$$l_{xy}(\omega_x) = c_{xy} \prod_{z \in \partial x \setminus \{y\}} \sum_{\psi_z \in \mathbb{Z}} Q_{zx}(\omega_x - \psi_z) l_{zx}(\psi_z) \quad (3)$$

holds for every $\omega_x \in \mathbb{Z}$. A boundary law is called *q-periodic* if $l_{xy}(\omega_x + q) = l_{xy}(\omega_x)$ for every oriented edge $\langle x, y \rangle \in \vec{L}$ and each $\omega_x \in \mathbb{Z}$.

Now, we define a spatially inhomogeneous boundary law associated with H_A (a H_A -boundary law), i.e., $\{l_{xy}\}_{\langle x, y \rangle \in \vec{L}} = \{l_1, l_2\}$ assuming $A = N_k$ as follows

$$l_{xy} = \begin{cases} l_1, & \text{if } x \in H_A \text{ and } y \in G_k \setminus H_A \\ l_2, & \text{if } y \in H_A \text{ and } x \in G_k \setminus H_A \end{cases}. \quad (4)$$

It is essential to observe that when $l_1 = l_2$, the boundary conditions are spatially homogeneous [2,3,5,10,11,13,15]. Conversely, when $l_1 \neq l_2$, the boundary conditions become spatially inhomogeneous, a phenomenon that is further investigated. For the two-periodic boundary law introduced in (4), we associate the following transition matrices which alternate according to the parity of the vertex. Namely, for all $\langle x, y \rangle \in {}^w \vec{L}$ (where ${}^w \vec{L}$ denotes the set of oriented edges in the future of the root w) and $i, j \in \mathbb{Z}$, we set

$$P_{\text{even}}(i, j) = \mu(\omega_y = j \mid \omega_x = i) = \frac{Q(i-j) l_2(j)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q(i-j) l_2(j)}, \quad x \in H_A, \quad y \in G_k \setminus H_A,$$

$$P_{\text{odd}}(i, j) = \mu(\omega_y = j \mid \omega_x = i) = \frac{Q(i-j) l_1(j)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q(i-j) l_1(j)}, \quad y \in H_A, \quad x \in G_k \setminus H_A.$$

Taking into account the periodicity of the boundary laws with respect to the spin coordinate, we define the associated transition matrices on the even and odd layers as follows

$$P_{\text{even}}(i, j) =: \bar{P}_{\text{even}}(T_q(i), j - i) \text{ and } P_{\text{odd}}(i, j) =: \bar{P}_{\text{odd}}(T_q(i), j - i).$$

Let $T_q P_{\text{even}}$ and $T_q P_{\text{odd}} : \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \rightarrow [0, 1]$ be defined by

$$(T_q P_{\text{even}})(\bar{i}, \bar{j}) := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ T_q(k) = \bar{j} - \bar{i}}} \bar{P}_{\text{even}}(\bar{i}, k), \quad \text{and} \quad (T_q P_{\text{odd}})(\bar{i}, \bar{j}) := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ T_q(k) = \bar{j} - \bar{i}}} \bar{P}_{\text{odd}}(\bar{i}, k),$$

where $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_q$. The resulting matrices

$$P^{\text{even}} := T_q P_{\text{even}} = \frac{l_2(\bar{j}) \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ T_q(p) = \bar{j} - \bar{i}}} Q(p)}{\sum_{\bar{r} \in \mathbb{Z}_q} l_2(\bar{r}) \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ T_q(p) = \bar{r} - \bar{i}}} Q(p)}, \text{ and } P^{\text{odd}} := T_q P_{\text{odd}} = \frac{l_1(\bar{j}) \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ T_q(p) = \bar{j} - \bar{i}}} Q(p)}{\sum_{\bar{r} \in \mathbb{Z}_q} l_1(\bar{r}) \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ T_q(p) = \bar{r} - \bar{i}}} Q(p)}$$

give the probabilities of transitions between classes, with each entry obtained by summing over all child heights k that belong to class $\bar{j} - \bar{i}$. These finite matrices describe the evolution of classes along edges in the even and odd layers, respectively, and together they naturally induce a 2-periodic hidden Markov structure on the class space $\mathbb{Z}_q$.

For each pair of residue classes $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_q$, define the two-step transition matrices $K^{\text{even-odd}}$ and $K^{\text{odd-even}}$ on $\mathbb{Z}_q$ by

$$K^{\text{even-odd}}(\bar{i}, \bar{j}) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_q} P^{\text{even}}(\bar{i}, \bar{k}) P^{\text{odd}}(\bar{k}, \bar{j}), \quad K^{\text{odd-even}}(\bar{i}, \bar{j}) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_q} P^{\text{odd}}(\bar{i}, \bar{k}) P^{\text{even}}(\bar{k}, \bar{j}). \quad (5)$$

Let $\pi = (\pi(s))_{s \in \mathbb{Z}_q}$ denote the distribution of w , which is the invariant distribution of $K^{\text{even-odd}}$ if $w \in H_A$ and of $K^{\text{odd-even}}$ if $w \in G_k \setminus H_A$. The following theorem is given in [12].

Theorem 2. *Let $\Lambda \in \mathcal{N}$ and $w \in \Lambda$. We take π to be the spin distribution at w . Then there exists a probability measure μ on $(\Omega^\nabla, \mathcal{F}^\nabla)$ whose finite-volume marginals are given by*

$$\mu(\eta_{\Lambda \cup \partial \Lambda} = \zeta_{\Lambda \cup \partial \Lambda}) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_q} \pi(s) \prod_{\substack{\langle x, y \rangle \in {}^w \tilde{L}_f \\ x, y \in \Lambda \cup \partial \Lambda}} \bar{P}_{xy} \left(T_q(s + \sum_{b \in \Gamma(w, x)} \zeta_b), \zeta_{\langle x, y \rangle} \right),$$

where the mod- q projected transition kernels $\bar{P}_{xy}$ are defined by

$$\bar{P}_{xy} = \begin{cases} \bar{P}_{\text{even}}, & \text{if } x \in H_A \text{ and } y \in G_k \setminus H_A, \\ \bar{P}_{\text{odd}}, & \text{if } y \in H_A \text{ and } x \in G_k \setminus H_A. \end{cases}$$

The measure μ defines a spatially inhomogeneous gradient Gibbs measure and is invariant under all automorphisms of the Cayley tree that preserve the bipartition $(H_A, G_k \setminus H_A)$.

Keywords: Cayley tree, gradient configuration, gradient specification, H_A -boundary law, spatially inhomogeneous gradient Gibbs measure.

2010 Mathematics Subject Classification: 60K35 (primary); 82B05, 82B20 (secondary)

References

[1] Friedli S., Velenik Y. *Statistical mechanics of lattice systems. A concrete mathematical introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (2018).

- [2] Ganikhodjaev N.N., Khatamov N.M., Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures of an SOS model with alternating magnetism on Cayley trees, *Reports on Mathematical Physics*, **92**:3 (2023), 309–322.
- [3] Haydarov F.H., Ilyasova R.A. Gradient Gibbs measures with periodic boundary laws of a generalised SOS model on a Cayley tree, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2023**:12 (2023), 123101.
- [4] Haydarov F.H., Ilyasova R.A., Mamayusupov K.S. Pinned gradient measures of SOS model associated with -boundary laws on Cayley trees, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, **16**:2 (2025), 154–163.
- [5] Haydarov F.H., Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures of an SOS model on Cayley trees: 4-periodic boundary laws, *Reports on Mathematical Physics*, **90**:1 (2022), 81–101.
- [6] Henning F. *Gibbs measures and gradient Gibbs measures on regular trees*, PhD Thesis, Ruhr University, Bochum (2021).
- [7] Henning F., Külske C. Coexistence of localized Gibbs measures and delocalized gradient Gibbs measures on trees, *Ann. Appl. Probab.*, **31**:5 (2021), 2284–2310.
- [8] Henning F., Külske C. Existence of gradient Gibbs measures on regular trees which are not translation invariant, *Ann. Appl. Probab.*, **33**:4 (2023), 3010–3038.
- [9] Henning F., Külske C. Height-offset variables and pinning at infinity for gradient Gibbs measures on trees, *arXiv:2411.13465*, (2024), 28 pp.
- [10] Henning F., Külske C., Le Ny A., Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree, *Electron. J. Probab.*, **24**:104 (2019), 1–23.
- [11] Ilyasova R.A. Height-periodic gradient Gibbs measures for generalised SOS model on Cayley tree, *Uzbek Mathematical Journal*, **68**:2 (2024), 92–99.
- [12] Ilyasova R.A. Spatially inhomogeneous gradient Gibbs measures induced by fuzzy transformations on Cayley trees, *Dokl. Akad. Nauk*, **6** (2025), 3–7.
- [13] Külske C., Schrieffer P. Gradient Gibbs measures and fuzzy transformations on trees, *Markov Process. Relat. Fields*, **23**:4 (2017), 553–590.
- [14] Rozikov U.A. *Gibbs measures on Cayley trees*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2013).
- [15] Rozikov U.A. Mirror Symmetry of Height-Periodic Gradient Gibbs Measures of an SOS Model on Cayley Trees, *J. Stat. Phys.*, **188**:2 (2022), 26 pp.

Exponential Bounds in One-Sided Determinantal Processes

J.N. IMOMALIEV

Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan

*Tashkent International University of Financial Management and Technologies,
Uzbekistan*

jamshidjon.in777@gmail.com

We study stationary one-sided determinantal probability measures on the configuration space $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ generated by translation-invariant Toeplitz kernels of the form $K_f(n, m) = \hat{f}(n - m)$, where $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$ is an integrable function. Our main results provide uniform exponential upper and lower bounds for the probabilities of cylinder events, as well as for ratios of probabilities of nested cylinders. Under a natural non-degeneracy condition on the Fourier coefficients of f , we show that these bounds depend only on the length of the cylinders and are independent of their location. The proofs combine an explicit determinant representation of cylinder probabilities with Gershgorin-type spectral estimates and Cauchy interlacing inequalities.

Determinantal point processes form a distinguished class of models with deep connections to random matrix theory, fermionic systems and statistical mechanics [3],[4]. In the discrete setting, a general framework was developed by Shirai and Takahashi, where cylinder probabilities are expressed as determinants of finite matrices associated with a fixed kernel. For translation-invariant

kernels of Toeplitz type $K_f(n, m) = \hat{f}(n - m)$, the corresponding stationary determinantal measures on $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ have been extensively studied (see e.g. [5], [6]). Quantitative ergodic properties, including ψ -mixing, were recently established in [1]. In contrast, the one-sided case on $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ has received less attention, despite its natural interpretation as a marginal of the two-sided process and its relevance for conditional probabilities. The presence of a boundary breaks spatial symmetry and requires uniform control of finite-dimensional distributions near the origin.

In this note we obtain explicit uniform exponential bounds for cylinder probabilities and for ratios of nested cylinders under stationary one-sided determinantal measures. Our approach relies on a determinant representation together with elementary matrix analysis tools.

Let $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and let $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$ be an integrable Borel function with Fourier coefficients

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Define the Toeplitz matrix of order n by $T_n(f) = (\hat{f}(i - j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Corollary 1 (Shirai-Takahashi). *Let $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$ be integrable and let μ_f^+ be the associated stationary one-sided determinantal measure on $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. For $n \geq 1$ and $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, define the cylinder*

$$C^+[\vec{\varepsilon}] := \left\{ x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_i = \varepsilon_i \text{ for } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Then

$$\mu_f^+(C^+[\vec{\varepsilon}]) = \det \left(D_n(2\vec{\varepsilon} - \mathbf{1}) T_n(f) + D_n(\mathbf{1} - \vec{\varepsilon}) \right).$$

We introduce the following notation:

$$p := \hat{f}(0) = \int_0^1 f(t) dt, \quad q := 1 - p, \quad \rho := \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(k)|. \quad (1)$$

The next theorem gives uniform exponential bounds in the length of cylinders.

Theorem 2. *Let $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$ be an integrable Borel function, and let μ_f^+ be its stationary determinantal probability measure on $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Define p, q, ρ as in (1), and assume that $\rho < \min\{p, q\}$. Then for every cylinder $C^+[\vec{\varepsilon}]$ of length n ,*

$$c_1 \theta_1^n \leq \mu_f^+(C^+[\vec{\varepsilon}]) \leq c_2 \theta_2^n,$$

where $\theta_1 := \min\{p, q\} - \rho$, $\theta_2 := \max\{p, q\} + \rho$, and $c_1, c_2 > 0$ depend only on f .

Theorem 3. *Let $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$ be an integrable Borel function, and let μ_f^+ be the stationary determinantal probability measure on $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Assume that $\rho < \min\{p, q\}$, where p, q, ρ are defined in (1). Then for any pair of cylinders $C_1 \subset C$ supported on finite sets $\Lambda \subset \Lambda_1 \subset \mathbb{N}$, there exist constants $c_1, c_2 > 0$ and $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ such that*

$$c_1 \theta_1^{|\Lambda_1| - |\Lambda|} \leq \frac{\mu_f^+(C_1)}{\mu_f^+(C)} \leq c_2 \theta_2^{|\Lambda_1| - |\Lambda|}.$$

In particular, one may take $\theta_1 := \min\{p, q\} - \rho$ and $\theta_2 := \max\{p, q\} + \rho$.

Keywords: determinantal processes, toeplitz matrices, cylinder probabilities, exponential estimates, one-sided stationary processes.

2020 Mathematics Subject Classification: 60G55, 60G10, 47B35, 15B05

References

- [1] Fan S., Liao L., Qiu Y. Stationary determinantal processes: ψ -mixing property and correlation dimensions, *Stochastic Processes and their Appl.* **151** (2022), 1—22.
- [2] Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix Analysis*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press (2012).
- [3] Shirai T., Takahashi Y. Random point fields associated with certain Fredholm determinants, *J. Funct. Anal.* **205** (2003), 414—463.
- [4] Shirai T., Takahashi Y. Fermion process and determinantal point field, *Journal of Mathematical Physics* **41**(10) (2000), 6064–6094.
- [5] Bottcher A., Silbermann B. *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices*, Springer-Verlag (1999).
- [6] Grenander U., Szegő G. *Toeplitz Forms and Their Applications*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company (1984).
- [7] Carlson D., Johnson C.R., Lay D.C., Porter A.D. *Linear Algebra Gems: Assets for Undergraduate Mathematics*, MAA Notes, Vol. 59, (2009).

Random Products of Positive L_1 – Contractions and Asymptotic Difference Estimates

O.R JALILOV

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

olimjonjalilovmath@mail.ru

Let $(X, \mathcal{A}, m)$ be a measure space, and let L_1 be the class of integrable functions from X to the real line. L_1^+ is the class of nonnegative elements of L_1 ; an operator T on L_1 is called *positive* if $TL_1^+ \subset L_1^+$. The relations below are frequently understood to hold modulo sets of measure zero. The L_1 norm of a function or an operator is denoted by $\|\cdot\|$. T is a *contraction* iff $\|T\| \leq 1$.

If T is a contraction, $\|T^n(f - Tf)\|$ is a non-increasing sequence of numbers converging to a limit. We investigate when this limit is zero.

Theorem 1. *Let T be a positive linear operator on L_1 with $\|T\| \leq 1$. Assume that for every $f \in L_1^+$ with $\|f\| = 1$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n f - T^{n+1} f\| < 2(1 - \varepsilon) \quad (1)$$

where ε is a positive constant independent of f . Then for each $f \in L_1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n f - T^{n+1} f\| = 0. \quad (2)$$

Let (X, μ) and $(A, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ be measurable spaces and $\mathbb{P}(A) = 1$. Assume $\{T_\alpha : L^1(X) \rightarrow L^1(X)\}_{\alpha \in A}$ are positive linear operators and

$$\|T_\alpha\| \leq 1, \quad \forall \alpha \in A.$$

Define

$$\Omega := A^{\mathbb{N}}, \quad \omega = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \Omega, \quad \omega_n := (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

For $\omega \in \Omega$ define the random composition

$$T_\omega^n := T_{\alpha_n} \circ T_{\alpha_{n-1}} \circ \dots \circ T_{\alpha_1}.$$

Let $\mathbb{P}_\Omega$ be the product measure on Ω :

$$\mathbb{P}_\Omega(A_1 \times \dots \times A_n \times \dots) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n) \dots$$

Theorem 2. If $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\alpha^{n+1} - T_\alpha^n\|_1 < 2(1 - \epsilon)$ for all $\alpha \in A$ then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} (T_\omega^{n+1} h - T_\omega^n h) d\mathbb{P}_\Omega(\omega) \right\|_1 = 0.$$

Now we consider $A = \{1, \dots, d\}$ case.

Lemma 1. Let $A = \{1, 2, \dots, d\}$ and $\Omega = A^\mathbb{N}$ with the product measure $\lambda = d\mu \otimes d\mu \otimes \dots \otimes d\mu \otimes \dots$, where μ is a probability measure on A with full support: $\mu(\{x\}) > 0$ for all $x \in A$. Define $n(x, \omega) = \mathbf{1}\{\omega_k = x \text{ for infinitely many } k\}$, $(x, \omega) \in A \times \Omega$. Then

$$\int_{A \times \Omega} n(x, \omega) d\lambda(\omega) d\mu(x) = 1.$$

Theorem 3. If $\#A < \infty$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_k^{n+1} - T_k^n\| < 2, \quad \forall 1 \leq k \leq \#A$$

then we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|T_\omega^{n+1} - T_\omega^n\|_1 d\lambda(\omega) = 0.$$

Lemma 2. Let $\Omega = [0, 1]^\mathbb{N}$ with the product measure $\lambda = dx \otimes \dots \otimes dx \otimes \dots$. Define $n(x, \omega) = \mathbf{1}\{\omega_k = x \text{ for infinitely many } k\}$, $n : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \{0, 1\}$. Then

$$\int_{[0, 1] \times \Omega} n(x, \omega) d\lambda(\omega) dx = 0.$$

References

- [1] Ornstein, D.S. and Sucheston, L. *An operator theorem on L_1 convergence to zero with applications to Markov kernels*, The Annals of Mathematical Statistics, (1970).
- [2] Blackwell, D. and Freedman, D. *The tail σ -field of a Markov chain and a theorem of Orey*, Ann. Math. Statist., (1964), 1291–1295.

On the fundamental system of smooth solenoidal functions in the cubic domain

M.T. JENALIYEV

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

muvasarkhan@gmail.com

Throughout this report, let $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$, with $d \geq 2$, be a domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega_1$, and let $\Omega = (0, l)^d \subset \mathbb{R}^d$, and let $\Omega = \prod_{k=1}^d (0, l_k) \subset \mathbb{R}^d$. In the space of solenoidal functions defined on square and cubic domains, we construct an fundamental system [1], which can be used to approximate solutions to both direct and inverse boundary value problems for the stationary and evolutionary Stokes and Navier–Stokes equations in cubic domains and certain cylindrical geometries. In this report, we use the concept of a fundamental system in the sense of Ladyzhenskaya. O. A. Ladyzhenskaya notes in ([1], p. 4835): "Our term **Fundamental system** $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ does not require the assumption of linear independence of elements of the system. Instead, the following property is required: for any $\varepsilon > 0$ and any $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_1)$ there exists a sum $\varphi^{(\varepsilon)} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k \varphi_k$, $N_\varepsilon < \infty$, such that $\|\nabla(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)})\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \varepsilon$ ".

We introduce the function spaces

$$\mathbf{H}(\Omega_1) = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega_1), \operatorname{div} \vec{w}|_{\Omega_1} = 0, \vec{w} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega_1} = 0\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{L}^2(\Omega_1) \equiv (L^2(\Omega_1))^d \equiv \mathbf{H}(\Omega_1) \oplus \mathbf{H}^\perp(\Omega_1), \quad (2)$$

where $\vec{w} \cdot \vec{n}$ is the normal component of the vector $\vec{w}$,

$$\mathbf{H}^\perp(\Omega_1) = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega_1), \vec{w} = \operatorname{grad} q, q \in W_2^1(\Omega_1)\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{V}(\Omega_1) = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega_1), \operatorname{div} \vec{w} = 0\}, \quad (4)$$

$$\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega_1) \equiv (\mathring{W}_2^1(\Omega_1))^d. \quad (5)$$

Note that here we have a dense and continuous embeddings

$$\mathbf{V}(\Omega_1) \hookrightarrow \mathbf{H}(\Omega_1) \equiv \mathbf{H}'(\Omega_1) \hookrightarrow \mathbf{V}'(\Omega_1). \quad (6)$$

Let $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$, where $d \geq 2$, and let Ω_1 be a bounded, simply connected open domain with boundary $\partial\Omega_1$. We seek nontrivial solutions $\{\vec{w}_k(x), p_k(x), \text{ with } x \in \Omega_1, k \in \mathbb{N}\}$, along with the corresponding eigenvalues $\{\lambda_k^2, k \in \mathbb{N}\}$ for the following boundary value problem [2]–[3]:

$$-\Delta \vec{w}(x) + \nabla p(x) = \lambda^2 \vec{w}(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \{\vec{w}(x)\} = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad (8)$$

$$\vec{w}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_1. \quad (9)$$

The solution of the spectral problem (7)–(9) is very difficult.

In the space of solenoidal functions (1) and (4) for domains represented by a multidimensional rectangular parallelepiped, in particular, a square and a cube, an orthogonal fundamental system is constructed. We use the concept of a fundamental system in the sense of Ladyzhenskaya [1].

Throughout the report, $\Omega = (0, l)^d \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. We propose to consider the following spectral problems:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^4 U(x) = \lambda^2 (-\Delta) U(x), & x \in \Omega; \\ U(x) = 0, \partial_{\vec{n}} U(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^8 U(x) = \lambda^2 \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^4 U(x), & x \in \Omega; \\ U(x) = 0, \partial_{\vec{n}} U(x) = 0, \partial_{\vec{n}}^2 U(x) = 0, \partial_{\vec{n}}^3 U(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

We use the following result established in papers [2]–[3]:

Theorem 1. *The set of generalized eigenfunctions $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ of the spectral problem (10) belongs to the space $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ and forms an orthogonal basis for the space $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Moreover, all eigenvalues $\{\lambda_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ lie on the positive real half-axis, and the smallest eigenvalue λ_1^2 is strictly positive.*

The following theorem gives us the possibility of constructing smooth solenoidal functions.

Theorem 2. *The set of generalized eigenfunctions $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ of the spectral problem (11) belongs to the space $\mathring{W}_2^4(\Omega)$ and forms an orthogonal basis for the space $\mathring{W}_2^2(\Omega)$. Moreover, all eigenvalues $\{\lambda_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ lie on the positive real half-axis, and the smallest eigenvalue λ_1^2 is strictly positive.*

Based on the statements of Theorems 1 and 2, we find a fundamental system of smooth solenoidal functions.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grants 2026–2028 No. BR31714735 and 2024–2026 No. AP23485369).

Keywords: space of solenoidal functions, fundamental system, eigenvalues, eigenfunctions, spectral problem, curl operator, rectangular parallelepiped.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35Q30, 76D05, 76D07

References

- [1] Ladyzhenskaya O.A. On a construction of bases in spaces of solenoidal vector fields, *J. Math. Sci.*, **130**:4 (2005), 4827–4835.
- [2] Jenaliyev M., Yergaliyev M. On fundamental solenoidal system in a cube, *J. Math. Sci.*, **291**:1 (2025), 38–49.
- [3] Jenaliyev M.T., Kassymbekova A.S., Yergaliyev M.G. On two four-dimensional curl operators and their applications, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series.*, 2(118) (2025), 106–121.

k -disjoint perfect matchings in complete multipartite graphs

Medet JUMADILDAYEV

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

medetdzhuma@gmail.com

Let G be a simple graph with a vertex set $V(G)$ and an edge set $E(G)$. A set of edges in which every vertex of a graph is incident to exactly one edge is called a perfect matching. A k -disjoint perfect matching is a set of k perfect matchings that are edge-disjoint. The question of enumerating k -disjoint matchings has been considered by Bollobas [1] for fixed k . Lieby, McKay, McLeod, and Wanless [5] improve the asymptotic formula for the number of k -disjoint perfect matchings K_n when $k = o(n^{1/3})$. McLeod [6] obtained an improved asymptotic formula for $k = o(n^{5/6})$.

Enumeration of k -disjoint perfect matchings was also considered in the context of complete multipartite graphs. It is well-known that the k -disjoint perfect matchings of $K_{n,n}$ are bijective to the Latin Rectangles. The asymptotic formula for the number of k -disjoint perfect matchings in the complete bipartite graph $K_{n,n}$ was obtained by Erdős and Kaplansky [2] for $k = O((\log n)^{3/2-\epsilon})$. Later, this result was verified for $k = o(n^{1/3})$ by Yamamoto [8]. The best known result is due to Godsil and McKay [3] for $k = o(n^{6/7})$.

The enumeration of 2-disjoint perfect matchings was considered in the context of the multipartite graphs $K_{n \times m}$. In particular, an asymptotic formula for their number was proven by Johnston, Kayll, and Palmer [4] for fixed m . The same authors conjectured that their formula holds for non-fixed m , which was recently proven by Spiro and Surya [7] by using the "switching" methods.

We generalize the above result for $k \geq 2$:

Theorem 1. *If $k = o((nm)^{1/3})$ and $m > 2$, the number $I_{n,m}(k)$ of k -disjoint perfect matchings in the complete multipartite graph $K_{n \times m}$ satisfies the asymptotic formula:*

$$I_{n,m}(k) \sim 2^{k/2} \left(\frac{m-1}{m-2} \right)^{\frac{k(m-1)}{2}} (m-1)^{\frac{mnk}{2}} n^{\frac{mnk}{2}} \exp \left(-\frac{mnk}{2} - \frac{m}{2(m-1)} \binom{k}{2} \right).$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR28713025).

Keywords: join graphs, perfect matchings, latin rectangles, deranged matchings, 1-factorizations

2010 Mathematics Subject Classification: 05A16, 05A40, 05A18, 05B15, 05C70

References

- [1] Bollobás B. Random Graphs, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 52 (1981), 80–102.
- [2] Erdős P., Kaplansky I. The asymptotic number of Latin rectangles, *Amer. J. Math.*, 68 (1946), 230–236.
- [3] Godsil C.D., McKay B.D. Asymptotic enumeration of Latin rectangles, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 48(1) (1990), 19–44.
- [4] Johnston D., Kayll P.M., Palmer C. Deranged matchings: Proofs and conjectures, *Amer. Math. Monthly* (2023), 1–17.
- [5] Lieby P., McKay B.D., McLeod J.C., Wanless I.M. Subgraphs of Random k-Edge-Coloured k-Regular Graphs, *Combinatorics, Probability and Computing*, 18(4) (2009), 533–549.
- [6] McLeod J.C. Asymptotic Enumeration of k-Edge-Colored k-Regular Graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(4) (2010), 2178–2197.
- [7] Spiro S., Surya E. Counting deranged matchings, *European Journal of Combinatorics*, 120 (2024), 103980.
- [8] Yamamoto K. On the asymptotic number of Latin rectangles, *Japan. J. Math.*, 21 (1951), 113–119.

Marcinkiewicz-type interpolation theorem on net spaces

A.K. KALIDOLDAY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

¹*Toraighyrov University, Pavlodar, Kazakhstan*

aitolkynnur@gmail.com

Let $G = \{G_t\}_{t>0}$ be a local net. We define the net $F_{G,\Omega} = \bigcup_{x \in \Omega} (G + x)$, where $G + x = \{G_t + x\}_{t>0}$. The net $F_{G,\Omega}$ will be called the net generated by a local net G and a set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Example. Let $\Omega = \mathbb{R}^n$, $G = \{Q_t\}_{t>0}$ be the set of cubes centered at 0 with the length of the edge equal to t , then $F_{G,\Omega} = \{Q_t + x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ is the set of all cubes in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1 Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{G_t\}_{t>0}$ be a local net, $F_{G,\Omega} = \bigcup_{x \in \Omega} (G + x)$. Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$ and $0 < q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq \tau \leq \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

If the following inequalities hold for a linear operator T and some $M_0, M_1 > 0$

$$\|Tf\|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leq M_i \|f\|_{N_{p_i,1}(G+x)}, \quad x \in \Omega, \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

for all functions $f \in N_{p_i,1}(G+x)$, ($i = 0, 1$), then the following inequality holds

$$\|Tf\|_{N_{q,\tau}(F_{G,\Omega})} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})}, \quad (2)$$

for all functions $f \in N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})$, where $c > 0$ depends only on the parameters $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$.

Throughout this note, we mainly use techniques from work [1].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP25794959).

Keywords: interpolation spaces, net spaces, linear operators, Marcinkiewicz-type interpolation theorem.

2020 Mathematics Subject Classification: 46B70

References

- [1] Kalidolday A.K., Nursultanov E.D., Marcinkiewicz's interpolation theorem for linear operators on net spaces, *Eurasian Math. J.*, **13**: 4, (2022), 61–69.

The method of potentials for the heat equation with involution

B.J. KADIRKULOV¹, D.E. UZAQBAEVA²

¹*Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;*

^{1,2}*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;*

¹b.kadirkulov@afu.uz, ²uzaqbaevadilfuza1606@gmail.com

Let l, T are positive real numbers, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ are real numbers, $\Omega = \{(x, t) : -l < x < l, 0 < t < T\}$, $J = \{(x, 0) : -l < x < l\}$. In the domain Ω we consider the heat equation with involution in the following form:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(-x, t). \quad (1)$$

Problem N. Find a function $u(x, t)$ from the class $C(\bar{\Omega}) \cap C_x^1(\bar{\Omega} \setminus J) \cap C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$, that satisfies equation (1) and initial and boundary conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -l \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u_x(-l, t) = \psi_1(t), \quad u_x(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where $\varphi(x), \psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are given functions.

This work is devoted to the study of the solvability of second boundary value problem for a parabolic equation with involution, using potential theory method. A nonlocal parabolic equation is introduced by applying involutive transformations with respect to the spatial variable. Using the fundamental solution, heat potential is introduced, and their properties are studied. Based on these properties and methods from the theory of integral equations, the second boundary value problem for a parabolic equation with involution was solved. The solution to this problem is constructed in explicit form, and the uniqueness of the solution is proven using the method of a priori estimates.

Keywords: nonlocal parabolic equation, involution, potential of the simple layer, Cauchy problem, fundamental solution, a priori estimates.

2020 Mathematics Subject Classification: 35E05, 35K20, 44A10, 45D05

References

- [1] Z. A. Sobirov, B. J. Kadirkulov, D. E. Uzaqbaeva. The method of potentials for the heat equation with involution, *Kazakh Mathematical journal.*, **1**:26 (2026), 59–72.
- [2] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of Mathematical Physics: Textbook. Manual. -6th ed., revised. And add. - M.: Moscow State University Publishing House, (1999).

selectlanguageenglish

Solvability of the initial-boundary value problem for a nonlocal pseudohyperbolic equation

Y. KADYLKHANULY

Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty

elnarkadilhan13@gmail.com

In this work, an initial-boundary value problem for a nonlocal pseudohyperbolic equation posed in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is considered. The equation under study contains a second-order time derivative, a time-diffusion term, and a nonlinear operator depending on the norm of the gradient of the solution. In addition, the right-hand side includes a nonlinear source term depending on the L_q norm of the solution, as well as a function $f(x, t)$ describing an external force. The problem

is supplemented with homogeneous Dirichlet boundary conditions and initial conditions given by prescribed functions.

The considered model belongs to the class of generalized dissipative systems used to describe various physical and engineering processes. The parameter $\chi > 0$ characterizes internal friction or relaxation properties of the system, while the functions $a(s)$ and $b(s)$ describe nonlinear properties of the material or medium. A distinctive feature of such problems is that the coefficients of the equation depend on integral characteristics of the solution, which makes them nonlocal and significantly more difficult to analyze than classical partial differential equations.

The main objective of the work is to prove the existence and uniqueness of a generalized solution to the given initial-boundary value problem. To achieve this goal, methods of functional analysis, the Galerkin approximation technique, and a priori estimates are employed. First, a sequence of approximate solutions is constructed using a specially chosen system of basis functions, and its boundedness is established via energy inequalities. Then, by applying weak convergence principles and compactness theorems, the existence of a solution is obtained. Uniqueness is proved using the energy method and analysis of the corresponding difference equation.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26199323).

Keywords: nonlocal pseudohyperbolic equation, initial-boundary value problem, existence of solution Galerkin method, a priori estimates. **2020 Mathematics Subject Classification:** 35L70, 35A01, 35B45

References

- [1] Sert U, Shmarev S. On a degenerate nonlocal parabolic equation with variable source, *J Math Anal Appl*, (2020), ;484(1):123695.
- [2] Sert U, Shmarev S. On a class of nonlocal parabolic equations of Kirchhoff type: Nonexistence of global solutions and blow-up, *Mathematical Methods in the Applied Sciences. Non-standard Partial Differential Equations*, (2021), ;0170-4214.p.8674 - 8700.
- [3] Chipot M, Valente V, Vergara Caffarelli G. Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy, *Rend Sem Mat Univ Padova*, (2003), 110:199-220.
- [4] Antontsev S, Shmarev S. On a degenerate nonlocal parabolic equation with variable source, *Adv Nonlinear Anal.*, (2018), 79-100.
- [5] Mingqi X, Radulescu VD, Zhang B. Nonlocal Kirchhoff diffusion problems: local existence and blow-up of solutions. *Nonlinearity*, (2018), ;31(7):3228-3250.

A Hamiltonian Dysthe equation for water waves.

Adilbek KAIRZHAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

akairzhan@nu.edu.kz

In this talk, we present the derivation of a Hamiltonian Dysthe equation for the slowly varying envelope of modulated wavetrains based on a Hamiltonian formulation of the water wave problem and by applying techniques from Hamiltonian perturbation theory. The models we consider include surface gravity waves, water waves with constant vorticity and hydroelastic waves. The latter model is further complicated by the presence of cubic resonances for which a detailed analysis is given.

The talk is based on a series of works with Catherine Sulem (University of Toronto) and Philippe Guyenne (University of Delaware) [1,2,3].

Keywords: gravity waves, Hamiltonian system, dispersive PDE, reduced model, resonance, canonical transformation.

2020 Mathematics Subject Classification: 76B15, 35Q55

References

- [1] P. Guyenne, A. Kairzhan, C. Sulem. A Hamiltonian Dysthe equation for hydroelastic waves in a compressed ice sheet. *J. Fluid Mech.* **1002** (2025) A24.
- [2] Guyenne P., Kairzhan A. and Sulem C. Hamiltonian Dysthe Equation for Three-Dimensional Deep-Water Gravity Waves. *SIAM: Mult. Model. Simul.* **20**, no. 1 (2022) pp. 349-378.
- [3] Guyenne P., Kairzhan A. and Sulem C. A Hamiltonian Dysthe equation for deep-water gravity waves with constant vorticity. *J. Fluid Mech.* **949** (2022) A50.

On a regular problem for the heat equation in an arbitrary domain

T.Sh. KAL'MENOV¹, A. KYDYRBAIKYZY²

¹IMMM, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹kalmenov.t@mail.ru, ²atow020522@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with a smooth boundary, $D^+ = \Omega \times (t > 0)$.

Definition 1. The operator L is called a coercively solvable operator of the heat equation

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) u = f(x, t), \quad (1)$$

if for any $f(x, t) \in L_2(D)$ there exists a unique solution $u(x, t) \in W_2^{1,2}(D)$ of equation (1) satisfying the inequality

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(D)} \leq c \|f\|_{L_2(D)}. \quad (2)$$

We seek a class of regular solutions of equation (1) in the following form

$$u(x, t) = \int_D \varepsilon(x, t, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta + \int_\Omega \varepsilon(x, t, \xi, 0) \tau(\xi) d\xi, \quad (3)$$

where

$$\varepsilon(x, t) := \frac{\Theta(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (4)$$

is the fundamental solution of the heat equation.

By the Riesz representation theorem for linear functionals in L_2 , there exists a function $\tilde{\tau}(x, \xi, \eta) \in W_2^2(\Omega) \cap L_2(D)$ such that

$$\tau(x) = \int_D \tilde{\tau}(x, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5)$$

Taking into account equality (5), we transform formula (3) to the form

$$u(x, t) = \int_D \varepsilon(x, t, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_\Omega \varepsilon(x, t, \xi, 0) \int_D \tilde{\tau}(\xi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} d\xi \quad (6)$$

Now we find the internal boundary condition of the integral operator (6). For this purpose, we apply the method developed by the authors in [1], [2]. Replace f with $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) u$.

Consequently, the internal boundary condition of the integral operator (6) has the following form

$$\begin{aligned}
 H[u] = & -\frac{u(x, t)}{2} - \int_{\Omega} \varepsilon(x, t, \xi, 0) u(\xi, 0) d\xi \\
 & + \int_0^t d\eta \int_{\partial\Omega} \left(u(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \varepsilon(x, t, \xi, \eta) - \varepsilon(x, t, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} u(\xi, \eta) \right) dS_{\xi} \\
 & + \int_{\Omega} \varepsilon(x, t, \xi, 0) \left[\int_{\Omega} (\tilde{\tau}(\xi, \tilde{\xi}, T) u(\tilde{\xi}, T) - \tilde{\tau}(\xi, \tilde{\xi}, 0) u(\tilde{\xi}, 0)) d\tilde{\xi} \right] d\xi \\
 & + \int_{\Omega} \varepsilon(x, t, \xi, 0) \int_0^t d\tilde{\eta} \int_{\partial\Omega} \left(u(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial n_{\tilde{\xi}}} \tilde{\tau}(x, t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \tilde{\tau}(x, t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial n_{\tilde{\xi}}} u(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) dS_{\tilde{\xi}} d\tilde{\eta} \\
 & + \int_{\Omega} \varepsilon(x, t, \xi, 0) d\xi \int_0^t d\tilde{\eta} \int_{\Omega} u(\xi, \tilde{\eta}) \diamond_{\xi, \tilde{\eta}}^* \tilde{\tau}(\xi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} = 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. № AP23488701).

Keywords: heat equation, fundamental solution, internal boundary condition.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20

References

- [1] Kalmenov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potential, *Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations*, **1:1** (2011), 187–210.
- [2] Kal'menov T.S., Tokmagambetov N.E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain, *Siberian Mathematical Journal*, **54:6** (2013), 1023–1028.

Selection principles in ordered uniform spaces

B.E. KANETOV¹, U.A. SAKTANOV², D.E. KANETOVA³

¹Jusup Balasagun Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyzstan

²Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

³Jalal-Abad International University, Manas, Kyrgyzstan

¹bekbolot.kanetov.73@mail.ru, ²uca73@mail.ru, ³dinara_kg@mail.ru

L. Kocinac in [4] was the first to introduce and study the class of uniformly Menger, uniformly Rothberger, uniformly Hurewicz spaces and uniformly γ -set.

A triple $(X, <, U)$ is called an ordered uniform space if:

1. The uniformity U generates on X interval topology;
2. The uniformity U has a base B , each covering of which consists of intervals [1].

In this case the uniformity U is called an ordered uniformity of the ordered space $(X, <)$. Ordered topological space is understood as a linearly ordered set, endowed with the interval topology, and the interval is any convex subset which is open in the interval topology.

If the covering α of an ordered space $(X, <)$ consists of intervals, then covering α is called interval.

Let $(X, <, U)$ be an ordered uniform space.

Definition 1. An ordered uniform space $(X, <, U)$ is said to be ordered uniform Menger if for each sequence $\{\alpha_n : n \in N\} \subset U$ there is a sequence $\{\beta_n : n \in N\}$ of subsystems such that for each $n \in N$, β_n is a finite interval subset of α_n and $\bigcup_{n \in N} \beta_n$ is a interval covering of X .

Definition 2. An ordered uniform space $(X, <, U)$ is said to be ordered uniform Hurewicz if for each sequence $\{\alpha_n : n \in N\} \subset U$ there is a sequence $\{\beta_n : n \in N\}$ of interval subsystems such that each β_n is a finite interval subset of α_n and for each $x \in X$ we have $x \in \bigcup_{n \in N} \beta_n$ for all but finitely many n .

Definition 3. An ordered uniform space $(X, <, U)$ is said to be ordered uniform Rothberger if for each sequence $\{\alpha_n : n \in N\} \subset U$ there is a sequence $\{U_n : n \in N\}$ of intervals such that for each $n \in N$, $U_n \in \alpha_n$ and $\bigcup_{n \in N} U_n = X$.

Definition 4. An ordered uniform space $(X, <, U)$ is said to be ordered uniform γ -set if for each sequence $\{\alpha_n : n \in N\} \subset U$ there is a sequence $\{x_n : n \in N\}$ of elements of X such that each x is contained in $St(x_n, \alpha_n)$ for all but finitely many n .

In this work some important properties of the ordered uniformly Menger, ordered uniformly Rothberger, ordered uniformly Hurewicz spaces and ordered uniformly γ -sets are investigated.

Keywords: ordered uniform Menger space, ordered uniform Rothberger space, ordered uniform Hurewicz space, ordered uniform γ -set

2020 Mathematics Subject Classification: 54E15, 54D20

References

- [1] Borubaev A.A. *Uniform Spaces and Uniformly Continuous Mappings*, Ilim, Frunze (1990).
- [2] Borubaev A.A. *Uniform topology and its applications*, Ilim, Bishkek (2021).
- [3] Kanetov B.E. *Some classes of uniform spaces and uniformly continuous mappings*, Bishkek (2013).
- [4] Kocinac L. Selection principles in uniform spaces, *Note di Mat.*, **22:2** (2003), 127–139.

Existence of traveling wave solutions for the nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation

M. KARAZYM

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

Astana IT University, Astana, Kazakhstan

mukhtar.karazym@nu.edu.kz

We are interested in traveling wave solutions to the nonlocal derivative nonlinear Schrödinger (nonlocal DNLS) equation

$$iu_t - u_{xx} - b|u|^2u + i\alpha|u|^2u_x + i\beta u^2\bar{u}_x + \gamma u \partial_x \mathcal{H}(|u|^2) = 0, \quad (1)$$

where $b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, and

$$\mathcal{H}u(x, t) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(y, t)}{x - y} dy$$

denotes the Hilbert transform. When $(b, \alpha, \beta, \gamma) = (1, 8\varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon)$ with $\varepsilon > 0$ sufficiently small, equation (1) coincides with the spatial Dysthe model studied in [1].

We combine the gauge transformation with the traveling wave ansatz to obtain a second-order ODE with a nonlocal term. We rely on a structural analysis, together with the Nehari manifold technique and the Schwarz rearrangement inequality, to establish the existence of solutions to the second-order ODE with a nonlocal term.

Funding: This research is supported by Nazarbayev University under the Faculty Development Competitive Research Grants Program for 2025-2027 (grant number 040225FD4702).

Keywords nonlocal DNLS, traveling wave solutions, minimization problem, Nehari manifold.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q55, 35C07, 35A15

References

- [1] Fedele F., Dutykh D. Hamiltonian form and solitary waves of the spatial Dysthe equations, *JETP letters*, **94:12** (2012), 840–844.

Initial–boundary value problem for a fractional-order beam vibration equation involving the Bessel operator

Sh.T. KARIMOV¹, R.A. MAMAJONOVA²

^{1,2}*Fergana State University, Fergana, Uzbekistan*

¹shaxkarimov@gmail.com, ²mamajonovaroibiyakhon@gmail.com

Many problems related to the vibrations of rods, beams, and plates play a significant role in structural mechanics, as well as in the theory of stability of rotating shafts and ship vibration theory, and they lead to higher-order differential equations. Therefore, in recent years, increasing attention has been devoted to the study of linear and nonlinear initial–boundary value problems for the beam vibration equation [1–4].

Since most dynamic phenomena evolve continuously in time, it has become a natural necessity to extend the concept of integer-order derivatives to fractional-order derivatives. This generalization of the classical integer-order derivative makes it possible to account for the memory and nonlocal properties of the processes being modeled.

In this work, an initial–boundary value problem for a fractional-order beam vibration equation involving the square of the Bessel operator is investigated.

In this work, within the domain

$$\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty\}$$

the problem of finding a solution $u(x, t) \in M$ satisfying the fractional differential equation involving the square of the Bessel operator

$${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u(x, t) = 0 \quad (1)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = 0 \quad (3)$$

is investigated. Where ${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t)$ denotes the Gerasimov–Caputo fractional derivative defined by:

$${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} u_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ and $\varphi(x)$ is a given sufficiently smooth function.

The class M consists of functions that are continuously differentiable once with respect to t and twice with respect to x on $\overline{\Omega^+}$ and and twice continuously differentiable with respect to t and four times continuously differentiable with respect to x on Ω^+ , $\Gamma(\cdot)$ denotes Euler’s Gamma function.

To solve the above problem, we employ transformation operators. Therefore, we first introduce the concept of a transformation operator in the general setting. Let A and B be given operators. A nonzero operator T is called a transformation operator if it satisfies the property

$$TA = BT.$$

Theorem [5]. Let $\alpha > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $f \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$, and suppose that the function $x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^k f(x)$ is integrable at the origin and satisfies $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^k f(x) = 0$. Then the following relation holds:

$$[B_{\eta+\beta}^x + \lambda^{2\gamma}]^k J_\lambda(\eta, \beta) f(x) = J_\lambda(\eta, \beta) [B_\eta^x]^k f(x).$$

In particular, for $\lambda = 0$, we have

$$[B_{\eta+\beta}^x]^k I_{\eta,\beta} f(x) = I_{\eta,\beta} [B_{\eta}^x]^k f(x).$$

where

$$B_{\eta}^x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x} \frac{d}{dx} = x^{-2\eta-1} \frac{d}{dx} \left(x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} \right)$$

is the Bessel operator,

$$J_{\lambda}(\eta, \beta) = \frac{2x^{-2(\beta+\eta)}}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\beta-1} t^{2\eta+1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{x^2 - t^2}) f(t) dt$$

is the generalized Erdélyi–Kober fractional integral, and $\bar{J}_{\nu}(z)$ denotes the Bessel–Clifford function.

According to this theorem, the Erdélyi–Kober fractional integral operator can be regarded as a transformation operator. This fact is useful for solving problem (1)–(3). Assume that a solution to problem (1)–(3) exists. We seek it in the form

$$u(x, t) = I_{-\frac{1}{2}, \beta}^x V(x, t), \quad (4)$$

where $I_{-\frac{1}{2}, \beta}^x$ is the Erdélyi–Kober operator and $V(x, t)$ is an unknown function.

Applying the theorem with $m = 2$, $\lambda = 0$, and $\eta = -\frac{1}{2}$, and substituting (4) into problem (1)–(3), we obtain the following problem for $V(x, t)$:

$${}^C D_{0t}^{\alpha} V(x, t) + \frac{\partial^4 V(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad (5)$$

with the initial conditions $V(x, 0) = \varphi_0(x)$, $V_t(x, 0) = 0$, and the boundary conditions

$$V_x(0, t) = 0, \quad V_{xxx}(0, t) = 0, \quad (6)$$

where

$$\varphi_0(x) = \left(I_{-\frac{1}{2}, \beta}^x \right)^{-1} \varphi(x).$$

In [28], the initial value problem for equation (5) was studied. Our construction is based precisely on the solution of that problem.

Keywords: Bessel operatori, kasr tartibli umumlashgan Erdeyli-Kober integral operatori va Gerasimov-Kaputo operatori.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11

References

- [1] Wang, Y.R., Fang, Z.W. Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends, *Appl. Mech. Tech. Phys.*, **1**:2 (2015), 337–346
- [2] Li, S., Reynders, E., Maes, K., De Roeck, G., Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions, *Sound Vib*, **4**:332 (2013), 795–806
- [3] Kasimov, Sh.G., Madрахimov, U.S., Initial-boundary value problem for the beam vibration equation in the multidimensional case, *Differ. Equations*, **10**:55 (2019), 1336–1348.
- [4] Sabitov, K.B., Akimov, A.A., Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equations*, **56**:5 (2020), 621–634.
- [5] Karimov, Sh. T., Urinov, A. K. *Erd'elyi-Kober operators and their applications to partial differential equations. Fergana Publishing, Fergana (2021)*
- [6] Karimov Sh.T., Mamajonova R.A. The Cauchy problem for a beam vibration equation involving the Caputo time-fractional operator, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, **8**:4 (2025), 154–160

The Cauchy Problem for a higher-order hyperbolic equation involving the Bessel operator with respect to time

Sh.T. KARIMOV¹, I.M. MUYDINOV²

^{1,2}*Department of Applied Mathematics and Informatics, Fergana State University, Uzbekistan*

¹shaxkarimov@gmail.com, ²imuydinov@example.com

In the domain

$$\Omega = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$$

we consider the equation

$$L_\beta^m u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\beta}{t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^m u(x, t) - \lambda u(x, t) = 0, \quad (1)$$

where

$$\beta, \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \beta < 1/2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

The Cauchy problem requires finding a function $u(x, t) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{2m-1}(\bar{\Omega})$ satisfying (1) and the initial conditions

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = \phi_k(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\beta} \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial t^{2k+1}} = \psi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (2)$$

Because the equation is linear, we look for a solution in the form $u = u_1 + u_2$, where u_1 satisfies (1) together with

$$\frac{\partial^{2k} u_1}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = \phi_k(x), \quad \frac{\partial^{2k+1} u_1}{\partial t^{2k+1}} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (3)$$

and u_2 satisfies (1) together with

$$\frac{\partial^{2k} u_2}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\beta} \frac{\partial^{2k+1} u_2}{\partial t^{2k+1}} = \psi_k(x), \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (4)$$

We first consider problem (1), (3). Assuming a solution exists, we represent it as

$$u_1(x, t) = I_{-1/2, \beta} \nu(x, t), \quad (5)$$

where $I_{-1/2, \beta}$ is the Erdélyi-Kober operator acting with respect to t and $\nu(x, t)$ is an unknown function. Substituting (5) into (1) leads to the problem for ν :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^m \nu(x, t) - \lambda \nu(x, t) = 0,$$

with initial conditions

$$\frac{\partial^{2k} \nu}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = \phi_k(x), \quad \frac{\partial^{2k+1} \nu}{\partial t^{2k+1}} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

This is a Cauchy problem for the iterated wave equation; its solution can be obtained by the Riemann function method. Inserting this solution into (5) and after some calculations we obtain an explicit formula for u_1 . The component u_2 is then derived using similar transmutation techniques and properties of equation (1). The final representation combines both parts, giving the unique solution of the original problem (1)–(2).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735). (Adjust if needed.)

Keywords: Bessel operator, Cauchy problem, higher-order hyperbolic equation, transmutation operator, Erdélyi–Kober operator, Riemann function.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L35, 35L15, 47E05

References

- [1] The Cauchy Problem for the Iterated Klein–Gordon Equation with the Bessel Operator. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, No. 5, pp. 772–784.
- [2] Karimov Sh.T., Oripov Sh.A. On a Method for Constructing the Riemann Function for Partial Differential Equations with a Singular Bessel Operator. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1087–1093.
- [3] Urinov A.K., Karimov Sh.T. *Operatory Erdelyi–Kobera i ikh prilozheniya k differentsial’nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh* [Erdélyi–Kober Operators and Their Applications to Partial Differential Equations]. Izdatel’sstvo “Fargona”, 2021.

Synchronization of Neural Networks Under Stochastic Deception Attacks Using Markov Switched Control and Its Application to Image Encryption

A. KASHKYNBAYEV

Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz

This research delves into the pinning synchronization (PS) of delayed inertial neural networks (DINNs) with reaction–diffusion (RD) terms, under the influence of stochastic deception attacks (DA). By employing Markov switched control strategies, where certain neurons are selected as pinned control nodes, and feedback control inputs are applied at instances of Markov jumps, the dynamics are analyzed. The stochastic DAs are modeled as stochastic impulses, and to tackle this, lemmas concerning the p th moment exponential convergence for Markov switched systems are derived based on the uniformly stable function (USF) and the infinitesimal generator of Markov process. These lemmas facilitate the formulation of sufficient criteria for the synchronization of DINNs with RD amidst DA, ensuring mean square convergence. Even if some error systems may diverge under pinning feedback input, ensuring that the pinning feedback controller follows Markov switching can lead the overall error system to achieve mean square convergence. To substantiate the theoretical findings, numerical examples are provided, demonstrating the validity and effectiveness of the proposed synchronization schemes. We propose a novel image encryption scheme that combines DINNs with RD chaotic sequence, introducing a dual confusion mechanism using Knight’s Tour chess scrambling and Hilbert curve transformation. The integration of chaotic sequences with dual confusion enhances encryption strength and security. To validate the cryptosystem, extensive statistical measures, security analyses, and robustness evaluations are performed, demonstrating its efficacy against attacks and practical applicability.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR21882172).

Keywords: synchronization; neural networks; delay differential equations; pinning control, secure communication, image encryption.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D06, 34K35, 94A08

Two-Dimensional Axisymmetric Two-Phase Stefan Model for Ultrafast Laser-Induced Melting

S.A. KASSABEK

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

samat.kassabek@nu.edu.kz

This work is devoted to the construction and analysis of a two-dimensional axisymmetric model of transient heat transfer with phase transformation in refractory metals (W, Ta, Mo, Nb) subjected to ultrashort laser irradiation of duration 5 ns.

Laser-generated ultrasound and optical pyrometry have become essential tools for non-contact investigation of rapid thermal processes in solids. Foundational studies [1-3] established the thermoelastic mechanism of acoustic generation under pulsed laser excitation, while later works [4-9] demonstrated that near the melting threshold a thin transient molten layer forms before ablation, significantly modifying shear-wave amplitudes and epicentral waveforms.

Despite these advances, the spatially resolved temperature field and the role of radial heat transport in the intermediate “melting-before-ablation” regime remain insufficiently characterized. The two-dimensional formulation becomes essential when the laser-beam diameter is comparable to the thermal diffusion depth, so that radial heat conduction cannot be neglected. Unlike one-dimensional approximations considered in [7-9], the proposed model incorporates both radial and axial heat transport.

Particular emphasis is placed on the ultrafast melting regime preceding ablation. At the initial stage, the transient heat-conduction and thermoelastic problems are solved without phase transition in order to determine the melting onset time. The model is subsequently extended to a two-phase Stefan formulation describing the evolution of the molten layer and the motion of the solid-liquid interface.

Based on the computed temperature fields, thermoelastic stresses and acoustic displacements are evaluated within the laser-ultrasonic framework of Every et al.[7]. This provides a mathematically justified criterion for identifying melting thresholds through comparison with experimental shear-wave measurements.

The proposed two-dimensional axisymmetric approach therefore connects rigorous free-boundary analysis with experimentally observable laser-ultrasonic signatures in the melting regime preceding ablation.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26199093).

Keywords: two-phase Stefan problem, axisymmetric heat equation, laser-induced melting, thermoelasticity, free-boundary problems.

2020 Mathematics Subject Classification: 80A20, 31A10.

References

- [1] S. J. Davies, C. Edwards, G. S. Taylor, S. B. Palmer, Laser-generated ultrasound: its properties, mechanisms and multifarious applications, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **26** (1993), 329–348.
- [2] C. B. Scruby, R. J. Dewhurst, D. A. Hutchins, S. B. Palmer, Laser generation of ultrasound in metals, *Research Techniques in Nondestructive Testing*, **5** (1982), 281–327.
- [3] L. Wu, J. C. Chen, S.-Y. Zhang, Mechanisms of laser-generated ultrasound in plates, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **28** (1995), 957–964.
- [4] V. Gusev, A. A. Kolomenskii, P. Hess, Effect of melting on the excitation of surface acoustic wave pulses by UV nanosecond laser pulses in silicon, *Appl. Phys. A*, **61** (1995), 285–298.
- [5] M. Mesaros, O. E. Martinez, G. M. Bilmes, J. O. Tocho, Acoustic detection of laser-induced melting of metals, *J. Appl. Phys.*, **81** (1997), 1014–1016.

- [6] V. Tokarev, A. Kaplan, Analytical modeling of time-dependent pulsed laser melting, *J. Appl. Phys.*, **86** (1999), 2839–2847.
- [7] Z. Utegulov, A. G. Every, Laser thermoelastic generation in metals above the melt threshold, *J. Appl. Phys.*, **114** (2013), 204902.
- [8] S. J. Reese, Z. N. Utegulov, F. Farzbod, R. S. Schley, D. H. Hurley, Examination of the epicentral waveform for laser ultrasound in the melting regime, *Ultrasonics*, **53** (2013), 799–802.
- [9] Z. Utegulov, A. G. Every, Examination of nanosecond laser melting thresholds in refractory metals by shear-wave acoustics, *AIP Advances*, **7** (2017), 075212.

Boundary value problem for a degenerate elliptic equation with singular coefficient in a vertical strip

K.B. KAZAKBAEVA¹, M.Kh. RUZIEV²

^{1,2}V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan

¹qalligul96@gmail.com, ²ruzievmkh@gmail.com

Consider the equation

$$|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

where $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ in an unbounded domain $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\infty < y < \infty\}$. Denote $D = D^+ \cup D^- \cup I$, where $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$, $D^- = \{(x, y) : 0 < x < 1, y < 0\}$ and $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$.

In domain D we study the following boundary value problem.

Problem. Find a function $u = u(x, y)$ that satisfies the following conditions:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ and satisfies Eq. (1) in the domain $D = D^+ \cup D^- \cup I$;
- 2) we have the decay condition

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad x \in [0, 1];$$

- 3) $u(x, y)$ satisfies the boundary conditions

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad -\infty < y < \infty,$$

and the conjugation condition

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y, \quad x \in (0, 1).$$

Moreover, these limits at $x = 0$, $x = 1$ can have a singularity of order lower than $1 - 2\beta$ where $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$.

$$\text{Here, } \varphi_i(y) = \begin{cases} \varphi_i^+(y), & y > 0, \\ \varphi_i^-(y), & y < 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \text{ are given functions, and } \varphi_i^+(y) \in C[0, +\infty), \varphi_i^-(y) \in$$

$$C(-\infty, 0], \varphi_1^+(0) = \varphi_1^-(0).$$

Theorem 1. If a solution to the Problem for Eq. (1) exists, it is unique.

The uniqueness of Theorem 1 is proved by the extremum principle.

Theorem 2. Let $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i^+(y) \in L_1(0, +\infty)$, $(-y)^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i^-(y) \in L_1(-\infty, 0)$ ($i=1, 2$) be fulfilled. Then a solution to the Problem exists.

Eq. (1) was studied in the domain D^+ in [1]. Using this solution, the existence of a solution to the Problem is solved by reducing the singular integral equation [2]. Nonlocal boundary value problem for Eq. (1) with spectral parameter was studied in [3] in the vertical half-strip.

Funding: This research received no external funding.

Keywords: Vertical strip, equation with singular coefficient, Bessel function, Hankel transform, series, Fourier method, extremum principle, integral equation, uniqueness of solution, existence of solution.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J25, 35J70, 35J75

References

- [1] Salakhitdinov M.S., Ruziev M.Kh. Zadacha Trikomii dlya odnogo klassa uravnenii sme-shannogo tipa v neogranichennoi oblasti, *Uzbek Mathematical Journal*, Issue 2 (2005), 77–83.
- [2] Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye Integral'nye Uravneniya*, Nauka, Moscow (1968).
- [3] Ruziev M.Kh., Kazakbaeva K.B. On a non-local boundary value problem for the Holmgren equation with a singular coefficient, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 7:5 (2024), 117–124.

On Deriving Partial Differential Equations from Functional Relations

E. KENENBAYEV

Institute of Mathematics of NAS of KR, Bishkek, Kyrgyzstan

Elaman0527@gmail.com

We gave a general problem [1]: What classes of functions presented by differential equations can be presented by functional relations and vice versa? How one of such presentations can be transformed to other?

In [1, 2, 3] we derived functional relations from differential equations. In this report we derive PDE from functional relations.

To search for an effective method, we referred to deepseek.com:

Derive a differential equation from the functional relation

$$u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) = 0. \quad (1)$$

AI proposed: If u is smooth enough, we can expand $u(x+h)$ and $u(x-h)$ in a Taylor series:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + O(h^5), \quad u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + O(h^5).$$

Substitute to (1):

$$h^2u''(x) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x) + O(h^6) = 0.$$

Dividing by h^2 and tending h to 0 AI obtained the equation $u''(x) = 0$.

We suppose that all functions are smooth and non-zero.

We will consider functions of two variables x, y . Their meanings in a functional relation are $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$. For definiteness we will suppose that $x_j > x_i$, $y_j > y_i$ for $j > i$.

Let us apply this method to the Asgeirsson's functional relationship (with rotation 45°): $n = 2$:

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) - u(x_1, y_2) - u(x_2, y_1) = 0. \quad (2)$$

Rewrite it in the form

$$u(x+p, y+q) + u(x-p, y-q) - u(x-p, y+q) - u(x+p, y-q) = 0.$$

Expanding the function $u(x+h, y+wh)$, $w \neq 0$ in a Taylor series and denoting derivatives at the point (x, y) by the letter U , we obtain

$$u(x+h, y+wh) = u(x, y) + U_x h + U_y wh + \frac{1}{2}(U_{xx}h^2 + 2U_{xy}wh^2 + U_{yy}w^2h^2) + O(h^3).$$

Substituting to (2), after some algebraic transformations we obtain

$$U_{xy} + O(h) = 0.$$

We propose another method.

We will use the following transformation: given an expression

$$w(z_2) - w(z_1), \quad w_2 > w_1.$$

Tending $w_2 \rightarrow w_1$ and dividing by $z_2 - z_1$ we obtain $D_z(w(z_1))$.

For definiteness we will suppose that $x_j > x_i$, $y_j > y_i$ for $j > i$.

We propose the following algorithm (non-formally):

Given the equality (functional relation) with function $u(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n$, each x_i and y_i are mentioned twice (or: number of entries is even).

Algorithm.

1. Repeat: Apply operations D_x, D_y until it is possible.
2. Change x_i, y_i to x, y .

Example 1. Given (2). Algorithm works:

1. $u(x_1, y_1) + (-u(x_2, y_1)) = u(x_1, y_2) + (-u(x_2, y_2))$
2. $D_{y_1}(u(x_1, y_1) + (-u(x_2, y_1))) = 0$
3. $D_y(u(x_1, y_1)) + (-D_y(u(x_2, y_1))) = 0$
4. $D_y(u(x_1, y_1)) = D_y(u(x_2, y_1))$
5. $D_{x_1}(D_y(u(x_1, y_1))) = 0$
6. $D_x(D_y(u(x_1, y_1))) = 0$
7. End: $D_x D_y(u(x, y)) = 0$.

We have obtained a partial differential equation $\partial_x \partial_y u(x, y) = 0$.

Example 2. $n = 2$. Given:

$$u(x_1, y_1) \cdot u(x_2, y_2) - u(x_1, y_2) \cdot u(x_2, y_1) = 0. \quad (3)$$

Algorithm works:

1. $D_{x_1}(u(x_1, y_1)u(x_2, y_2) - u(x_1, y_2)u(x_2, y_1)) = 0$
2. $D_{x_1}(u(x_1, y_1)) \cdot u(x_2, y_2) - D_{x_1}(u(x_1, y_2)) \cdot u(x_2, y_1) = 0$
3. $D_{y_1}(D_{x_1}(u(x_1, y_1)) \cdot u(x_2, y_2) - D_{x_1}(u(x_1, y_2)) \cdot u(x_2, y_1)) = 0$
4. $D_{y_1}(D_{x_1}(u(x_1, y_1))) \cdot u(x_2, y_2) - D_{x_1}(u(x_1, y_2)) \cdot D_{y_1}(u(x_2, y_1)) = 0$
5. $D_y(D_x(u(x, y))) \cdot u(x, y) - D_x(u(x, y)) \cdot D_y(u(x, y)) = 0$

We obtain

$$(\partial_{xy}u(x, y)) u(x, y) - (\partial_x u(x, y)) (\partial_y u(x, y)) = 0.$$

We referred to AI:

“Derive a differential equation for the function $u(x, y)$ from the functional relation

$$u(x_1, y_1) \cdot u(x_2, y_2) - u(x_1, y_2) \cdot u(x_2, y_1) = 0.$$

AI [it stipulated that functions must be non-zero]: Rewrite

$$\frac{u(x_1, y_1)}{u(x_1, y_2)} = \frac{u(x_2, y_1)}{u(x_2, y_2)}.$$

The ratio is independent of x ... Thus, the function can be presented as $u(x, y) = X(x)Y(y)$. A necessary and sufficient condition for separability is that the mixed logarithmic derivative is zero:

$$\partial_x \partial_y \ln u(x, y) = 0.$$

Then u_x/u is independent of y . So, the PDE condition is:

$$\partial_y \left(\frac{u_x}{u} \right) = 0.$$

Calculate:

$$\frac{u_{xy}u - u_x u_y}{u^2} = 0.$$

The resulting PDE is $u_{xy}u - u_x u_y = 0$.

We see that AI did not use any algorithm but guessed a method which can be applied in this concrete case. The following problems arise: what functional relations can be transformed to PDE at all? Are there algorithms for such transformations?

Acknowledgments: We thank deepseek.com for assistance.

Keywords: functional relation, partial differential equation, transformation, algorithm.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A16

References

- [1] Kenenbaeva G.M., Kenenbaev E. Approximate solving of differential equations by means of functional relations, *Scientific investigations in Kyrgyz Republic*, vol. 4, pp. 13–16, 2017.
- [2] Kenenbaeva G.M., Kenenbaev E. Classification of functional relationships and their use for the study of differential equations, *Bulletin of Jalal-Abad State University*, vol. 4, pp. 29–34, 2019.
- [3] Kenenbaev E. Functional relations for ordinary and partial differential equations, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR*, vol. 1, pp. 71–76, 2020.

Effects and Phenomena: Definitions, Categories, and Algorithms

G.M. KENENBAYEVA

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

gkenenbaeva@mail.ru

The notions (terms) “effect” and “phenomenon” were used widely in investigations including mathematical ones but we could not find any definitions for them until 2014.

We [1, 2] proposed a framework definition for “phenomenon” and noted that in history of mathematics, firstly phenomena and paradoxes appeared in mathematics itself or in life and further

researchers tried to explain them or to create any theory. We also noted that various phenomena were not logically connected but had same origin (“effect”).

If H is a phenomenon of any $x \in X$ with an attribute E such that a strict proof of the statement $((E \wedge C) \implies H^n)$ (where C is any additional condition) is difficult or impossible and the phenomenon H was opened not logically but unexpectedly (as a paradox) or by means of physical, chemical, mathematical computational experiments then E may be called “effect”.

The authors [3] noted that many phenomena have various forms: physical; mathematical model; computer model; AI model. They proposed to call such phenomena “phenomenon-complexes”, and correspondingly, they are consequences of “effect-complexes”.

Remark. Earlier, computer models were programs which could be read and be written by a human. Further, computer models used to include vast subroutines written by other people. By such a way, computer models developed to AI models: the human asks AI about consequences of an experiment but cannot check AI’s thoughts.

Effect of Self-Organization The hypothesis of arising the Universe as an order (cosmos) from chaos is ancient, but people did not pay attention to geological hexagonal structures as an implementation of this idea, and the first mentioned real process was *irgoo* in Kyrgyz language (some centuries ago): “random vibration of ‘many’ balls of different sizes of the same material in a wide symmetrical vessel yields migration of the biggest one to the center of their surface”; the first computer implementation was made by us in 2012.

On this phenomenon, the Galton board, we made the conclusion on existence an effect-complex with the same name.

The authors [4] proposed to introduce the category Self within the category Flow of processes and flows, and its subcategories Self-Irg of random discrete processes and Self-Syn for continuous synergetic processes.

The irgoo effect-complex acts together with the multiplicity effect: self-organization occurs if number of balls (components) is “large”. A number after which the probability of self-organization in any process is more than $1/2$ (more than 100 balls) is called “the multiplicity constant”.

Remark. A hint to such effects for arising AI with a sense of humor is in [5].

Remark. It is difficult to visually determine the emergence of self-ordering, of patterns, especially within a large number of computational experiments.

The author [6] proposed: to formulate strictly the essence of a supposed pattern; to write an algorithm to identify such patterns.

Remark. By such a way some patterns supposed by the user only can be distinguished. But the irgoo effect-complex promises a decrease in entropy only and does not indicate how it should be expressed. Does there exist more general algorithm to highlight unknown patterns?

Effect of Infinity Probably, the notion of infinity in science and first paradox on this theme was discovered by Zenon, ~ 450 BC: paradox “Achilles vs Tortoise”. The phenomenon “A subset of an infinite set can be equal to itself” was discovered by Galileo, 16th century; hints to this phenomenon as the notion “homoeomeria” (similar-to-part) belong to Anaxagoras, ~ 470 BC. This phenomenon refuted the intuitively evident statement fixed as Euclid’s fifth axiom “the whole is greater than the part”.

Further the notion “homoeomeria” developed to:

- automodel processes (or self-similar processes): their statistical properties are invariant under changes of scale (in time or space); the solution depends only on $X = x/t^a$ (invariant under scaling of variables);
- phenomenon-complexes fractals and processes of their generation (including approximate finite fractals on display, approximate fractals in nature).

Due to the phenomenon described above the authors [4] proposed to distinguish the subcategory Fin-Set in the category Set (discrete mathematics) which does not meet this phenomenon. We propose to define the subcategory of infinite sets Inf-Set also.

Integrity effect Definition [7]. If a change in one part of a mathematical object changes the entire object, then that object is said to be holistic. For example, absolutely elastic solid, sphere, five regular polyhedra are holistic.

The consequences of such a property are called phenomena of integrity. The analyticity effect is a particular case: some tasks being incorrect for continuous and even infinitely differentiable functions became correct for analytical ones, on the basis of the following phenomena found in Kyrgyzstan:

- existence of level lines for singularly perturbed ordinary differential equations;
- convergence of the grid method for partial differential equations out of the domain covered by characteristics;
- correctness of the final value problem for the heat equation;
- correctness of some integral equations of the first kind;
- correctness of the initial value problem for the Laplace elliptic equation.

These results were primarily discovered by numerical experiments.

Remark. Artificial intelligence demonstrated that it has the integrity sense: it could correct “almost holistic objects”, guessed to make actions to restore holistic objects.

In what category are such various holistic objects to be included?

Acknowledgments. We thank artificial intelligence for assistance.

Keywords: effect, phenomenon, category, subcategory, algorithm.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T01

References

- [1] Kenenbaeva G.M. Framework Definitions of Effects and Phenomena and Examples in Differential and Difference Equations, *Journal of Mathematics and System Science*, vol. 4, pp. 766–768, 2014.
- [2] Kenenbaeva G.M., Tagaeva S.B. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics, *Proceedings of V Congress of the TWMS*, Bishkek, pp. 107–111, 2019.
- [3] Tagaeva S.B., Pankov P.S. Effect-complexes and phenomenon-complexes in applied mathematics, *Vestnik of Kyrgyz National University named after J. Balasagyn*, vol. 25, no. 12, pp. 19–25, 2025.
- [4] Borubaev A., Pankov P. Computer presentation of kinematic topological spaces. Qingdao University, Qingdao, 2024.
- [5] Heinlein R.A. The Moon Is a Harsh Mistress. G.P. Putnam’s Sons, New York, 1966.
- [6] Tagaeva S.B. Algorithm to substitute pattern phenomenon for system of differential equations describing repelling points on a square, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR*, vol. 1, pp. 195–200, 2024.
- [7] Pankov P.S., Tagaeva S.B. Enlarged list of effects in mathematics and its applications, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR*, vol. 1, pp. 18–23, 2025.

The third boundary value problem for a hyperbolic-parabolic equation with a variable thermal conductivity coefficient and a nonlinear radiation source

V.N. KHANKHASAEV¹, S.I. MUNYAEV²

¹*Department of Fundamental Mathematics, BSU, Ulan-Ude, Russia*

^{1,2}*Department of Mathematics, ESSUTM, Ulan-Ude, Russia*

¹hanhvladnick@mail.ru, ²SergMoon1986@mail.ru

The object of this study is a mathematical model of an electric arc that occurs in high-voltage networks during short circuits at the contacts of power circuit breakers. This arc occurs due to breakdown of the dielectric layer between conductors or contact between one of them and a current-carrying element. In this case, the arc fault is a low-temperature plasma formed as a result of current flowing through the air gap between the conductors, resulting in the release of a large amount of heat and light radiation. For this high-intensity thermal process at the gap of open contacts of a power circuit breaker and the subsequent emergency extinguishing of the arc, a mathematical model is derived in the context of thermodynamics. This model represents the third boundary-value problem for the mixed heat conduction equation.

In this model, light radiation of heat is represented by the Arrhenius law, which establishes the dependence of the rate constant of a chemical reaction on temperature. In these short-term transient processes, classical parabolic heat conduction models based on conventional Fourier theory create significant distortions of the temperature fields. Consequently, for high-intensity switching processes, classical transport theory becomes incorrect, and locally nonequilibrium methods must be used to describe such systems.

Some of these methods: in gas dynamics theory – J. Maxwell [1], heat and mass transfer – A. V. Lykov [2], thermal conductivity – C. Cattaneo [3] and P. Vernotte [4] – from molecular kinetic concepts, using the hypothesis of the finiteness of the collision time of molecules and the concept of their mean free path, they derived a new generalized law of heat and mass transfer, which includes an additional element, the so-called relaxation time, i.e., the time required to establish thermodynamic equilibrium between the flow and the potential gradient. In this case, a hyperbolic equation of heat and mass transfer is derived [1]–[5]. The problem is solved numerically using the integration-interpolation method in the MathCad-15 package [9, 10].

Statement of the problem

Continuing the research of V.N. Khankhasaev [6, 7], we will consider a non-linear equation of mixed type in partial derivatives of the second order:

$$k(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + q_{ch} k_e \exp \left[\frac{E}{R u(x, t)} \right] + f(x, t), \quad (1)$$

in the area $G = [0, L] \times [-T_1, T_2]$. Here, at $t \leq 0$, $k(x, t) = 0$, $f(x, t) = 0$, and for $t > 0$, $k(x, t) > 0$, $f(x, t) \neq 0$, $k(x, t)$ - thermal relaxation coefficient, $a = c_v \rho$ - the product of the coefficient of specific heat capacity at constant volume and the coefficient of specific density, $\lambda(x, t)$ - variable thermal conductivity coefficient, q_{ch} - thermal effect of chemical regime, k_e - pre-exponential factor of a chemical reaction, E - activation energy of a chemical reaction, $R = 8,31 \frac{J}{mol \cdot K}$ - universal gas constant, $f(x, t)$ - internal heat source.

Initial boundary value problem: find a solution to equation (1) subject to the following boundary conditions of the third kind and the initial condition at $t = -T_1$:

$$\left[\mp \lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_{0,L} u(x, t) \right]_{x=0,L} = q_{0,L}(t), t \in [-T_1, T_2], \quad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \quad (3)$$

where $\alpha_{0,L}$ and $q_{0,L}$ - heat transfer coefficients and heat flux density of surface sources at the left and right ends of the rod [8].

Keywords: hyperbolic heat equation, nonlinear mixed type equations, finite difference method, third boundary condition, integro-interpolation method

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Maxwell, J. C.: On the dynamical theory of gases. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 157, 49 (1867). <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
- [2] Lykov, A.V.: Theory of Thermal Conductivity. Higher School, Moscow, (1967).
- [3] Cattaneo, C.: A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. Comptes Rendus 247(4), 431 - 433 (1958).
- [4] Vernotte, P.: Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. Comptes Rendus 254(22), 3154 - 3155 (1958).
- [5] Sobolev, S.L.: Local non-equilibrium transport models. Uspekhi Fizicheskikh Nauk 10, 1095 - 1106 (1997). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>
- [6] Khankhasaev V.N., Darmaheev E.V.: On some applications of the hyperbolic heat equation and methods for its solution. Results of Science and Technology. Modern Mathematics and its Applications 1, 98-111 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05332-3>.
- [7] Khankhasaev, V.N., Munyaev, S.I.: Initial-boundary-value problems for some nonlinear mixed heat conductivity operators. Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory 239, 53 - 61 (2025). <https://doi.org/10.36535/2782-4438-2025-239-53-61>.
- [8] Dulnev, G. D., Parfenov, V. G., Sigalov, A. V.: Application of computers to solve heat transfer problems. High School, Moscow (1990).
- [9] Khankhasaev, V.N., Munyaev, S.I.: Program for calculating a nonlinear mixed heat conductivity equation with a variable thermal conductivity coefficient and third boundary conditions. Certificate of state registration of computer program 2024664963 (2024).
- [10] Khankhasaev, V.N., Munyaev, S.I.: Program for calculating the mixed heat conductivity equation with a variable heat source and third-order boundary conditions. Certificate of state registration of computer program 2024664020 (2024).

Isothermal coordinate method for solving Stefan-type electro contact problems

S.N. KHARIN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

staskharin@yahoo.com

The study of the dynamics of phase transformation processes during heating of electrical contacts is one of the pressing problems in the development of new types of low-voltage electrical equipment. The process of heating an electrical contact consists of several sequential stages. The initial heating stage, which lasts until the softening temperature of the material at the contact spot is reached, is described by a standard problem for the heat equation in a domain with a fixed boundary. Upon reaching the softening temperature, the second stage of contact heating starts, accompanied by an expansion of the contact spot radius and a sudden decrease in current density and temperature. This continues until the melting point is reached at the contact spot. The boundary of the region becomes unknown and moving, and a system of rather complex boundary conditions is defined to determine it. When the temperature of the contact spot reaches the melting point, the third heating stage begins. It is described by the Stefan problem for the temperature of the liquid and solid phases with an unknown moving boundary between them.

The main difficulty in solving such a problem is the presence of two unknown moving boundaries. To overcome this difficulty, a new method for solving such problems has been developed, which is called the isothermal coordinate method. According to this method the temperature and the time are considered as independent variables, while the radius of the phase transformation zone is considered an unknown function. This approach allows us to reduce the corresponding Stefan problem with an unknown moving boundary to a problem with a known constant boundary, although the heat equation becomes nonlinear. The solution of the resulting problem is obtained using the Runge-Kutta method. In this case, the final value of the zone radius at the end of each heating stage serves as the initial value for the next stage. It has been shown that neglecting to take into account the softening process can lead to a significant error in the subsequent calculation of melting and welding zones, especially for high currents.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: equation of thermal conductivity, Stefan's problem, isothermal coordinates, electrical contacts..

2020 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K35, 35R37

On the asymptotic representation of the solution of the heat exchange problem in electrical contacts under the Kohler effect

S.N. KHARIN¹, A.A. KAVOKIN², S.A. KASSABEK³

¹*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

²*SDU University, Almaty (Kaskelen), Kazakhstan*

³*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*

¹staskharin@yahoo.com, ²kavokin-alex@yahoo.com, ³samat.kassabek@nu.edu.kz

In [1], it was proposed a mathematical model that describes the temperature asymmetry in closed electrical contacts, arising due to the Kohler effect (tunnel effect) when there is a thin film with low electrical conductivity (dielectric) between the sides of the contact, and electrons pass through it due to their wave properties. The equations of the model $T_i(r, z, t)$ is the temperature. $q_i(r, z)$ is the Joule heat source; t is the time; r, z are the coordinates (radial and perpendicular to the contact plane, respectively):

$$c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \right) + q_i(r, z), \quad (1)$$

where heat conduction domains for $i = 1, 2$ are specified as:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(r, z, t) : 0 < r < \infty, z < 0, t > 0\}, \\ D_2 &= \{(r, z, t) : 0 < r < \infty, z > 0, t > 0\}. \end{aligned}$$

With initial conditions $T_i(r, z, 0) = 0$ and boundary conditions:

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{(r=0, r=\infty)} = 0, \quad \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{(z=\infty)} = 0. \quad (2)$$

Conditions at $z = 0$, taking into account the Kohler effect (the passage of electrons through the film at the contact spot of radius $r = f$):

$$T_1(r, -0, t) - T_2(r, +0, t) = -k \frac{\partial T_2(r, +0, t)}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(r \leq f, -0, t) - P_1 = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(r \leq f, +0, t) + P_2 \equiv \mu(r, t), \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(r > f, -0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(r > f, +0, t) \equiv \mu(r, t). \quad (5)$$

The main objective of this study is to determine the behaviour of the temperature near the contact spot for asymptotically small values of time t . The solution to problem (1)-(5) is obtained by the method of integral transforms [3] (Laplace (p, s) in t and z ; 0-order Hankel (σ) in r). In this case, the most difficult is to determine the original from the image for the unknown function $\mu(r, t)$ in conditions (4),(5):

$$\mu^{\sigma p}(\sigma, p) = \frac{a_1 \cdot a_2}{\lambda_1 a_2 \sqrt{p + a_1^2 \cdot \sigma^2} + \lambda_2 a_1 \sqrt{p + a_2^2 \cdot \sigma^2} + k \lambda_1 \sqrt{p + a_1^2 \cdot \sigma^2} \cdot \sqrt{p + a_2^2 \cdot \sigma^2}} \cdot \frac{1}{p}$$

It is proved that $\mu^{\sigma p}(\sigma, p)$ has no other poles except $p = 0$ and its original is a bounded function in the neighborhood of $(t = 0, r = 0)$. To determine the asymptotic behavior for $T_i(0, \pm, t)$ at $t \ll 1$, a method based on Tauberian theorems for the integral Laplace transform [2] was used. In this case, it is:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \mu^{\sigma p}(\sigma, p) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(r, t).$$

As a result, was obtained representation for small t :

$$\mu(r, t) \sim K_0 t + O[t^2],$$

where K_0 depends on parameters of task (1)-(5). Now, using this formula we can find out asymptotic of $T_i(0, 0, t)$ at small t

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26199093).

Keywords: Electrical contacts; Kohler effect; asymptotic behavior; integral transforms; heat conduction; Tauberian theorems

2020 Mathematics Subject Classification: 80A20, 31A10.

References

- [1] Kharin S.N. *Mathematical models of phenomena in electrical contacts*, Ershov, Institute of Informatics systems of SB RAS (2017).
- [2] Titchmarsh E.C. *The Theory of Functions*, Oxford University Press (1980).
- [3] Bateman H., Erdélyi A. *Tables of Integral Transforms, Vol. 1*, Nauka, Moscow (1968).

Transversally Cantor-like geodesics for meromorphic connections in Riemann surfaces

M.S. KHOLIKOVA¹, O.M. ERALIYEVA²

^{1,2}*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

¹khalikovamadina9@gmail.com, ²ozodaeralieva23023@gmail.com

In this work, we study the local and global geometry of geodesics associated with meromorphic connections on compact Riemann surfaces. In particular, we introduce transversally Cantor-like geodesic sets and relate their appearance to the period (holonomy) properties of the connection near poles.

Definition 1. A Riemann surface S is a connected Hausdorff space M together with an open covering U_α and a system of homeomorphisms z_α of the set U_α onto open set $V_\alpha = z_\alpha(U_\alpha)$ in the complex plane $\mathbb{C}$ with conformal neighbor relations. The latter means: whenever $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, the composition $z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$ is a direct conformal homeomorphism of the open set $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ onto $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$

Definition 2. A meromorphic connection on the tangent bundle TS of Riemann surface S is a $\mathbb{C}$ -linear map

$$\nabla : \mathcal{M}_{TS} \rightarrow \mathcal{M}_S^1 \otimes \mathcal{M}_{TS}$$

satisfying the Leibniz rule

$$\nabla(\tilde{f}\tilde{s}) = d\tilde{f} \otimes s + \tilde{f}\nabla s \quad (1)$$

for all $\tilde{s} \in \mathcal{M}_{TS}$ and $\tilde{f} \in \mathcal{M}_S$, where $\mathcal{M}_{TS}$ denotes the sheaf of germs of meromorphic sections of TS , while $\mathcal{M}_S$ is the sheaf of germs of meromorphic functions and $\mathcal{M}_S^1$ is the sheaf of meromorphic 1-forms on S .

Let (U_α, z_α) be a local chart for S , then ∇ a meromorphic connection on S . Then there exists $\eta_\alpha \in \mathcal{M}_S^1(U_\alpha)$, such that $\nabla(\partial_\alpha) = \eta_\alpha \otimes \partial_\alpha$, where $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ is the induced local generator of TS over U_α . We have

$$\eta_\beta = \eta_\alpha + \frac{1}{\xi_{\alpha\beta}} d\xi_{\alpha\beta} \quad (2)$$

on $U_\alpha \cap U_\beta$, where $\xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}$. In particular, if every representation is holomorphic then ∇ is a holomorphic connection. We say $p \in S$ is a pole for a meromorphic connection ∇ if p is a pole of η_α for some (and hence any) local chart U_α at p . If Σ is the set of poles of ∇ , then ∇ is a holomorphic connection on $S^0 = S \setminus \Sigma$. So we can define a notion of geodesic for ∇ on S^0 as in holomorphic connection.

Let ∇ be a meromorphic connection on TS with pole set Σ , and set $S^0 = S \setminus \Sigma$. Choose local representatives η_α of ∇ on an atlas $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$, so that on overlaps

$$\eta_\beta = \eta_\alpha + d \log \xi_{\alpha\beta}, \quad \xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}. \quad (3)$$

For a closed C^1 curve $\gamma \subset S^0$, define the *period* of ∇ along γ by

$$\text{Per}_\gamma(\nabla) := \left[\int_\gamma \eta \right] \in \mathbb{C}/(2\pi i \mathbb{Z}) \quad (4)$$

where η denotes any local representative along γ ; this class is well-defined because the change of chart adds an integral multiple of $2\pi i$. We say that ∇ has *real periods* if for every closed curve $\gamma \subset S^0$ one can choose a representative of $\text{Per}_\gamma(\nabla)$ which is real, equivalently $\text{Per}_\gamma(\nabla) \in \mathbb{R}/(2\pi i \mathbb{Z})$ for all closed $\gamma \subset S^0$.

Definition 3. A *geodesic* for meromorphic connection ∇ on TS is a real curve $\sigma : I \rightarrow S^0$, with $I \subset \mathbb{R}$ an interval, such that $\nabla_{\sigma'} \sigma' \equiv 0$.

Let $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ be an atlas for S and $\sigma : I \rightarrow U_\alpha$, with $I \subset \mathbb{R}$ an interval, a smooth curve. Then σ is a geodesic for a meromorphic connection ∇ if and only if

$$(z_\alpha \circ \sigma)'' + (f_\alpha \circ \sigma) (z_\alpha \circ \sigma)'^2 \equiv 0, \quad (5)$$

where $\eta_\alpha = f_\alpha dz_\alpha$ is the local representation of ∇ on U_α .

Definition 4. A subset C of a topological space is called *Cantor-like* if it is compact, perfect, and totally disconnected. Equivalently, C is Cantor-like if C is homeomorphic to the standard middle-thirds Cantor set.

Definition 5. Let $W \subset S$ be a closed set with empty interior, $\overset{\circ}{W} = \emptyset$. We say that W is a *transversally Cantor-like geodesic set* if:

1. there exists a maximal simple (i.e. non self-intersecting) geodesic $\sigma : (\varepsilon_-, \varepsilon_+) \rightarrow S^0$ such that $W = \overline{\sigma((\varepsilon_-, \varepsilon_+))}$;
2. for any simple geodesic $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow S^0$ transverse to σ (one may assume $\gamma(0) \in W$), the intersection $\gamma([- \delta/2, \delta/2]) \cap W$ is a Cantor-like set (in the sense of Definition Cantor like).

Our main result is following

Theorem 6. *Let S be a compact Riemann surface, and let ∇ be a meromorphic connection defined on S . If ∇ does not have real periods then the connection ∇ must possess at least one pole on S . In a neighborhood of such a pole, it is possible for transversally Cantor-like geodesics to arise.*

Funding: This work is supported by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan, State Grant No. FL-9524115114

Keywords: Riemann surface, meromorphic connection, geodesic, Cantor-like set, transversally Cantor-like geodesic set.

Mathematics Subject Classification: 32H50 · 34M03 · 34M40 · 37F99

References

- [1] Abate M., Bianchi F. A Poincaré–Bendixson theorem for meromorphic connections on Riemann surfaces, *Math. Z.*, (2016), 247–272.
- [2] Abate M., Rakhimov K. Dynamics of Fuchsian meromorphic connections with real periods, *Annals of Global Analysis and Geometry*, (accepted 2026).
- [3] Abate M., Tavena F. A Poincaré–Bendixson theorems for meromorphic connections and homogeneous vector fields, *Journal of Differential Equations*, (2011), 2612–2684.
- [4] Bainbridge M., Chen D., Gendron Q., Grushevsky S., Möller M. Strata of k -differentials, *Algebraic Geometry*, (2019), 10.14231/AG-2019-011.
- [5] Rakhimov K.X. Flat structure of meromorphic connections on Riemann surfaces, *The Journal of Geometric Analysis*, (2020).

An efficient numerical approach for solving a problem for impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition

S.B. KHUDAIBERGENOVA¹, Zh.M. KADIRBAYEVA²

¹Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

¹hudajbergenovasymbat@gmail.com, ²zhkadirbayeva@gmail.com

We consider the following boundary value problem for impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^p A_j(t) \lim_{t \rightarrow \zeta_j+0} x(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \setminus \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \theta_i-0} x(t) - \lim_{t \rightarrow \theta_i+0} x(t) = \varphi_i, \quad x \in R^n, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$Bx(0) + Cx(T) + \int_0^T D(\tau)x(\tau)d\tau = d, \quad d \in R^n, \quad (3)$$

where $(n \times n)$ -matrices $A_k(t)$, $D(t)$ ($k = \overline{0, p}$) and n -vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0, T]$ with possible discontinuities of the first kind at the points $t = \zeta_j$ ($j = \overline{1, p}$). B and C

are constant $(n \times n)$ -matrices, and φ_i , $(i = \overline{1, m_2})$ and d are constant n vectors, $\theta_i \neq \zeta_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$.

This paper investigates a problem for impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition (1)–(3), which arise in various physical and engineering systems characterized by sudden changes in state. Such problems are often used to model processes where abrupt transitions occur at specific moments, including mechanical systems with shocks, biological systems with periodic treatments, or electrical circuits with instantaneous switching [1].

We implement a fast and efficient numerical approach tailored to this class of problems, ensuring stability and accuracy in the presence of both impulses and loadings. This numerical approach is based on the Dzhumabaev parameterization method [2]. Numerical examples are presented to demonstrate the applicability and efficiency of the proposed approach compared to traditional techniques [3, 4]. The results confirm that the method is robust and computationally effective for handling impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition.

Keywords: loaded differential equation, impulse effect, integral condition, parametrization method, algorithm.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06.

References

- [1] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012).
- [2] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *J. of Comp. and Applied Math.*, **294** (2016), 342–357.
- [3] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, *Computational and Applied Mathematics*, **37**:4 (2018), 4966–4976.
- [4] Kadirbayeva Zh.M., Kadirbayeva R.I. Numerical solution of the second-order impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary conditions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **48**:6 (2025), 6269–6277.

The Cauchy problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina type fractional equation

N.Kh. KHUSHVAKTOV

*Tashkent International University of Financial Management and Technologies,
Uzbekistan*

nuriddinh@gmail.com

Consider a separable Hilbert space H . Let $A : H \rightarrow H$ be a self-adjoint, positive, unbounded operator defined in the domain $D(A)$. We assume that A has a compact inverse A^{-1} . Denote by $\{v_k\}$ a complete orthonormal set of eigenfunctions and by $\{\lambda_k\}$ the associated set of positive eigenvalues. The eigenvalues can be ordered in a non-decreasing sequence, means $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$.

Let $\rho \in (0, 1)$ be a given constant and $C((a, b); H)$ be a set of continuous functions $u(t)$ of $t \in (a, b)$ with values in H .

Let us consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + A(1 + \gamma D_t^\rho)u(t) = f(t), & \gamma > 0, \quad 0 < t \leq T; \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

here, $f \in C([0, T]; H)$ is a given function, and $\varphi \in H$ is a given vector. The parameter $\gamma > 0$ is a constant.

Problem (1) is called the *forward problem* for fractional order equations of the Barenblatt–Zheltov–Kochina type.

Let us provide a definition for the solution of the forward.

Definition 1. A function $u(t) \in C([0, T]; H)$ is called a solution of the forward problem for the Barenblatt–Zhel'tov-Kochina type equation if $D_t u(t)$, $Au(t)$, and $AD_t^\rho u(t)$ belong to $C((0, T]; H)$, and $u(t)$ satisfies the conditions (1) for the forward problem, respectively.

Let $\rho > 0$ and σ be an arbitrary complex number. Denote by $E_{\rho, \sigma}(z)$ the two parametric Mittag–Leffler functions:

$$E_{\rho, \sigma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\rho n + \sigma)}.$$

If $\sigma = 1$, then we have one parametric Mittag–Leffler function:

$$E_{\rho, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + 1)} = E_{\rho}(z).$$

Let us present the Cauchy problem (1) using the following theorem.

Theorem 2. Let $f(t) \in C([0, T]; H)$, $\varphi \in D(A)$. Then, there is a unique solution to the problem (1), which takes the following form:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k E_{\rho}(-\mu_k t^{\rho}) + \frac{1}{1 + \gamma \lambda_k} \int_0^t \eta^{\rho-1} E_{\rho, \rho}(-\mu_k \eta^{\rho}) f_k(t - \eta) d\eta \right] v_k.$$

where $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 + \gamma \lambda_k}$.

Furthermore, there exists a positive number C such that the following coercive inequality is satisfied:

$$\|D_t^{\rho} u(t)\|^2 + \|Au(t)\| + \|AD_t^{\rho} u(t)\|^2 \leq C(t^{-2\rho} \|\varphi\|_1^2 + \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|^2).$$

References

[1] Lizama C. *Abstract linear fractional evolution equations*, Handbook of fractional calculus with applications, **2** (2019), 465–497.

Keywords: the Barenblatt–Zhel'tov-Kochina equation, the Caputo derivative, the Fourier method, and the Mittag–Leffler functions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11.

Fredholm solvability of a fourth-order elliptic equation with normal derivative boundary conditions on domains with non-compact piecewise smooth boundary

B.D. KOSHANOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Let the domain D be bounded by a simple smooth contour Γ , and let $n(t) = n_1(t) + in_2(t)$ be the inward normal to Γ at the point t . It is assumed that the contour Γ belongs to the class $C^{3, \nu}$ with some $0 < \nu < 1$. The latter means that the function $n(t)$ with respect to the arc length parameter on Γ belongs to the class $C^{2, \nu}$.

Consider in this domain the elliptic equation of the fourth order

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \sum_{i+j \leq 3} a_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x^i \partial y^j} = f^0, \quad (1)$$

with coefficients $a_i \in \mathbb{R}$ and $a_{ij} \in C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, and the right-hand side $f^0 \in C^\mu(\overline{D})$. Its solution is sought in the class of functions $u \in C^4(D) \cap C^{3,\mu}(\overline{D})$.

For equation (1), the boundary value problem is posed

$$u^+ = f_1, \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} \right)^+ = f_2, \quad (2)$$

In the general case of 2-nd order equations, problems of this type from the Fredholm property point of view were studied in [1]. Weighted Hölder spaces were defined and studied in detail in [2,3] for functions defined on arbitrary sets.

Theorem 1. *Problem (1), (2) is Fredholm in the class $C^{3,\mu}(\overline{D}) \cap C^4(D)$ if and only if the matrix function $G = CB$ is invertible. Under this condition, the index of the problem is given by the formula*

$$\alpha = -2 \operatorname{Ind} G + 8. \quad (3)$$

This talk will discuss the Fredholm solvability of problem (1), (2) when the domain under consideration is a domain with a non-compact piecewise smooth boundary.

Funding: The authors were supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (project AP23488302).

Keywords: fourth-order elliptic equations, generalized Neumann problem, J-analytic functions, Riemann–Hilbert problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J40, 35J45

References

- [1] Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary Value Problem with Normal Derivatives for a Higher-Order Elliptic Equation on the Plane, *Differential Equations*, vol. 52, no. 12, pp. 1594–1609, 2016.
- [2] Soldatov A.P. Singular Integral Operators and Elliptic Boundary-Value Problems, *Modern Mathematics. Fundamental Directions*, vol. 63, pp. 1–189, 2017.
- [3] Soldatov A.P. Singular Integro-Functional Operators on a Piecewise Smooth Curve, Nauka, Novosibirsk, 2024.

Numerical simulation of Korteweg-de Vries equation with moving Boundaries

N. KOSHKARBAYEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

koshkarbaev.nurbol@gmail.com

We consider the nonlinear initial-boundary value problem for the classical Korteweg-de Vries (KdV) equation [1] posed on a time-dependent (noncylindrical) space-time domain. The wave-supporting region varies with time, which introduces additional analytical and numerical challenges compared to standard cylindrical domains. The problem is formulated as:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0, \quad (y, \tau) \in \hat{\Omega}, \quad (1)$$

where $\hat{\Omega} = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^2; a(\tau) < y < b(\tau), \tau \in (0, T)\}$ represents the noncylindrical domain with moving lateral boundaries.

To effectively simulate this system, we first introduce a change of variables $x = \frac{y-a(\tau)}{p(\tau)}$ (where $p(\tau) = b(\tau) - a(\tau)$), which converts the moving spatial interval into a fixed cylindrical domain $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$.

The spatial discretization of the resulting transformed problem is carried out by a Galerkin finite-element formulation based on cubic B-spline basis functions, which inherently satisfy the required smoothness for the third-order spatial derivative. For temporal integration, an implicit second-order scheme of the Crank-Nicolson type is employed to handle the nonlinearity and ensure stability.

Benchmark tests, utilizing a manufactured solution framework to measure the norm

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))},$$

confirm that the proposed numerical algorithm attains high accuracy. The results display algebraic convergence with respect to both the spatial mesh size and the time step. Ultimately, the method robustly and efficiently captures nonlinear wave propagation and amplitude decay in domains subject to dynamic boundary motion.

Funding: This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22686595).

Keywords: Korteweg de Vries equation; B-spline finite elements; time-dependent (moving) boundaries; Crank-Nicolson time stepping; numerical simulation.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q53, 35R37, 65N22, 65M60

References

- [1] Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine*, **39**:5 (1895), 422–443.
- [2] Doronin G.G., Larkin N.A. KdV equation in domains with moving boundaries, *J. Math. Anal. Appl.*, **328**:1 (2007), 503–517.
- [3] Bona J.L., Sun S.M., Zhang B.-Y. A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, *Commun. Partial Differ. Equ.*, **28**:7-8 (2003), 1391–1436.
- [4] Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **43**:1 (1947), 50–67.

On a Solution to a BVP for a loaded Time-Fractional Equation

M.T. KOSMAKOVA¹, D.M. AKHMANOVA², Zh.M. TULEUTAIEVA³

^{1,2,3}*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*

¹svetlanamir578@gmail.com, ²danna.67@mail.ru, ³erasl-79@mail.ru

In the domain $Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ we consider a boundary value problem

$$u_t - u_{xx} + \lambda \{ {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \}|_{x=\gamma(t)} = f(x, t) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad (2)$$

where λ is a parameter;

${}_c D_{0t}^\alpha u(x, t)$ is the Caputo derivative of an order α , $2 < \alpha < 3$;

$\gamma(t)$ is a continuously increasing function, $\gamma(0) = 0$ or $\gamma(t)$ is a positive constant,

$$f \in L^\infty(A_T) \cap C(B) \quad \text{for each } T > 0, \quad (3)$$

where $A_T := \{(x, t) : x > 0, 0 \leq t \leq T\}$, $B = \{(x, t) : x > 0, t \geq 0\}$.

Definition 1. Let $Q_T := \{(x, t) : x > 0, 0 < t < T\}$, $\overline{Q}_T := \{x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$. A function $u : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{C}$ is called a **regular solution** if:

1.

$$u \in C(\overline{Q_T}), \quad u_t, u_x, u_{xx} \in C(Q_T),$$

and u_x extends continuously to $x = 0$ with $u_x(0, t) = 0$.

2. for each $t \in (0, T]$,

$$\tau \mapsto u(\gamma(t), \tau) \text{ has } u_{\tau\tau} \text{ absolutely continuous on } [0, T],$$

so that

$$v(t) := \left({}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \right) \Big|_{x=\gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{2-\alpha} u_{\tau\tau}(\gamma(t), \tau) d\tau$$

exists and $v \in C((0, T])$ (often one also requires v bounded near $t = 0$, which forces a mild constraint on $u_{\tau\tau}$ near $\tau = 0$).

3.

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u(x, t)| < \infty, \quad \text{or} \quad u(\cdot, t) \in L^2(0, \infty) \text{ for each } t, \quad \sup_{t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} < \infty.$$

Lemma 2. *Let*

$$\mu(t) = \{ {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \} \Big|_{x=\gamma(t)}.$$

Then boundary value problem (1)-(2) is reduced to a fractional differential equation:

$${}_c D_{0t}^{\alpha-1} \mu(t) + \frac{1}{\lambda} \mu(t) = \frac{1}{\lambda} f_2(t), \quad (4)$$

where

$$f_2(t) = \{ {}_c D_{0t}^\alpha f_1(x, t) \} \Big|_{x=\gamma(t)}, \quad (5)$$

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (6)$$

$G(x, \xi, t)$ denoting the Green's function for the classical heat equation on the half-line with Neumann condition at $x = 0$, $f_1(x, \cdot) \in AC^3[0, T]$

Under certain requirements on $f(x, t)$ (for example, additional smoothness in t) and behavior $\gamma(t)$ in the neighborhood of zero, it can be shown that

$$\mu(0) = 0, \quad \mu'(0) = 0. \quad (7)$$

Lemma 3. *For any $\lambda \neq 0$, $f_2 \in L^1(0, T)$ the solution $\mu \in C[0, T]$ of problem (4)-(7) exists, is unique, has the form*

$$\mu(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f_2(s) (t-s)^{\alpha-2} E_{\alpha-1, \alpha-1} \left(-\frac{1}{\lambda} (t-s)^{\alpha-1} \right) ds, \quad (8)$$

where $E_{\beta, \gamma}(z)$ denotes the two-parameter Mittag-Leffler function.

Theorem 4. *[Existence and Representation of a Regular Solution] Let $\alpha \in (2, 3)$, $\lambda \neq 0$, and let $T > 0$ be an arbitrary finite horizon. Assume the following conditions hold:*

- *The function $\gamma(t)$ is either a positive constant or a continuously increasing function satisfying $\gamma(0) = 0$.*
- *The function $f(x, t)$ belongs to class (3).*

Then, boundary value problem (1)-(2) admits a unique regular solution $u(x, t)$ in the sense of Definition 1, which can be represented in the form

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t),$$

and the functions $\mu(t)$ and $f_1(x, t)$ are defined by formulas (8) and (6) respectively.

Remark 5. The functional class for f given in (3) ensures that the integral defining f_1 is well-defined and inherits sufficient regularity. The additional smoothness condition $f_1(x, \cdot) \in AC^3[0, T]$ is essential for the existence of the Caputo derivative in condition (2) of Definition 1 and for the derivation of the fractional equation (4) for μ .

The solution $\mu(t)$ in (8) belongs to an appropriate continuous function space, consistent with the requirement $v \in C((0, T])$ in Definition 1. The weak singularity $(t-s)^{\alpha-2}$ (with $0 < \alpha-2 < 1$) in the convolution kernel ensures the integrability and the proper regularity of μ .

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488740).

Keywords: loaded differential equation, Caputo fractional derivative, Green's function, Mittag-Leffler function, moving load.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 45D05, 35K20

References

- [1] Polyanin A.D. *Handbook of linear equations of mathematical physics*, Fizmat lit, Moscow (2001).
- [2] Nakhushev A.M. *Loaded Equations and Their Applications*, Nauka, Moscow (2012). (in Russian)
- [3] Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its applications*, Fizmat lit, Moscow (2003). (in Russian)
- [4] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Application*, New York, Gordon and Breach (1993).
- [5] Pskhu A.V., Kosmakova M.T., Akhmanova D.M., Kassymova L.Zh., Assetov A.A. Boundary value problem for the heat equation with a load as the Riemann-Liouville fractional derivative in the journal, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, **1**:105 (2022), 74–82. <https://doi.org/10.31489/2022M1/74-82>

A stable and convergent method of lines for Fredholm-type parabolic integro-differential equations

S.K KUANYSH¹, E.A. BAKIROVA²

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*

¹kuanyshe.saule1@gmail.com, ²bakirova.elmira74@gmail.com

This study considers Fredholm-type parabolic integro-differential equations defined on the domain $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t, x)u + \Phi(t, x) \int_0^T \Psi(s, x)u(s, x)ds + f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}, \quad (1)$$

$$\mathcal{B}(x)u(0, x) + \mathcal{C}(x)u(T, x) = \psi(x), \quad x \in [0, L], \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \varphi_0(t), \quad u(t, L) = \varphi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

A function $u(t, x)$ is a solution of (1)–(3) if it satisfies equation (1) of Fredholm-type parabolic integro-differential equations and the associated boundary conditions (2), (3).

To solve the problem, the method of lines is applied [1,2]. The spatial variable is discretized, reducing the problem to a system of ordinary integro-differential equations with nonlocal conditions in time [3]. A theoretical analysis of the proposed scheme establishes its stability and convergence.

Numerical experiments confirm the theoretical results and demonstrate that the method provides accurate approximations and good computational efficiency. The proposed approach offers a reliable and effective framework for solving nonlocal-in-time parabolic integro-differential equations.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23485618).

Keywords: Numerical-analytical method, Fredholm-type parabolic integro-differential equations, method of lines, integro-differential equations, convergence stability.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A09, 35C15, 65M20, 34A45, 35A24

References

- [1] Assanova A.T., Liu Zh., Kuanysh S.K., Kadirbayeva Zh.M. Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations, *AIMS Mathematics*, **10**:12 (2025), 29454–29469.
- [2] Kuanysh S.K., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Method of lines for a loaded parabolic equation, *J. Math. Mech. Comput. Sci.*, **125**:1 (2025), 3–17.
- [3] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary-value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel, *J Math Sci.*, **220** (2017), 440–460.

Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations

S.K KUANYSH¹, N.B. ISKAKOVA², P.B. ABDIMANOPOVA³

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan*

¹saule270898@gmail.com, ²narkesh77@gmail.com, ³peryzat74@mail.ru

The present work is devoted to the study of a nonlocal problem for a loaded parabolic equation. Consider the following problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t, x)u(t, x) + \sum_{j=0}^m k_j(t, x)u(t_j, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = [0, T] \times [0, \omega], \quad (1)$$

$$B(x)u(0, x) + B(x)u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \psi_0(t), \quad u(t, \omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

To solve this problem, the method of lines with respect to the spatial variable is applied. As a result, the loaded parabolic equation is reduced to a system of loaded ordinary differential equations, while the nonlocal condition is transformed into a two-point boundary condition for the obtained system.

The main goal is to establish the convergence of the solution of the discretized problem to the solution of the original nonlocal problem. For this purpose, the Dzhumabaev parameterization method is used [1]. Convergence, stability, and error estimates for the method of lines are obtained [2], [3]. Numerical examples illustrate the efficiency of the proposed approach [2],[4].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26194447).

Keywords: .

2020 Mathematics Subject Classification: 35K99, 65M20, 34A45, 34B10

References

- [1] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–36.
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90038-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4)
- [2] Assanova A.T., Liu Zh., Kuanysh S.K., Kadirbayeva Zh.M. Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations, *AIMS Mathematics*, **10**:12 (2025), 29454–29469. <https://doi.org/10.3934/math.20251293>
- [3] Kuanysh S.K., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Method of lines for a loaded parabolic equation, *J. Math. Mech. Comput. Sci.*, **125**:1 (2025), 3–17.
- [4] Iskakova N.B., Kadirbayeva Zh.M., Bakirova E.A., Kuanysh S.K. Numerical method for solving the boundary value problem for the parabolic equation, *Herald of the Kazakh-British Technical University*, **21**:3 (2024), 165–175.
<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-3-165-175>

Mixing Inequality for Homotopy Distance

N. KUANYSHOV

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

nursultan.kuanyshov@sdu.edu.kz

We introduce two modified versions of the homotopy distance between maps of normal topological spaces, modeled on the classical m -categories of Fox and Clapp–Puppe. We prove a mixing inequality in dimension one which generalizes the Oprea–Strom inequality for the Lusternik–Schnirelmann category.

Let X and Y be normal topological spaces and let $f, g : X \rightarrow Y$ be continuous maps. The homotopy distance $D(f, g)$, introduced in [5,6], measures how far two maps are from being homotopic in terms of open covers. It generalizes the Lusternik–Schnirelmann category via

$$D(\text{id}_X, *) = \text{cat}(X).$$

Inspired by the m -categories of Fox [2] and Clapp–Puppe [3] and the inequality of Oprea–Strom [4], we introduce two modified homotopy distances and prove a mixing-type inequality in dimension one.

Homotopy Distance

Definition 1. Let $f, g : X \rightarrow Y$ be continuous maps between normal topological spaces. The *homotopy distance* $D(f, g)$ is the least integer k such that there exists an open cover

$$X = U_0 \cup \dots \cup U_n$$

with

$$f|_{U_i} \simeq g|_{U_i} \quad \text{for all } i.$$

If no such n exists, we set $D(f, g) = \infty$.

Fox-type Homotopy Distance

Definition 2. Given two maps $f, g : X \rightarrow Y$, the m -homotopy distance denoted by $D_m^F(f, g)$, is the least integer $k \geq 0$ such that there exists a covering of X by subsets $U_0, \dots, U_k$ with the property that, for each U_j , any map $h_j : P \rightarrow U_j$ from an m -dimensional space P , $f \circ h_j \simeq g \circ h_j$.

For $f = \text{id}_X$ and $g = *$, this reduces to Fox's m -category $\text{cat}_m(X)$ [2].

Clapp–Puppe type Homotopy Distance

Definition 3. Given two maps $f, g : X \rightarrow Y$, the m -homotopy distance denoted by $D_{CP}^m(f, g)$, is the least integer $k \geq 0$ such that there exists a covering of X by subsets $U_0, \dots, U_k$ with the property that, for each j there exists an m -dimensional space K_j and maps

$$U_j \xrightarrow{\alpha_j} K_j \xrightarrow{\beta_j} X$$

satisfying

$$f \circ \beta_j \circ \alpha_j \simeq g \circ \beta_j \circ \alpha_j.$$

For $f = \text{id}_X$ and $g = *$, this reduces to the Clapp–Puppe m -category $\text{cat}^m(X)$ [3].

Main Result

Theorem 4 (Mixing Inequality in Dimension One). *Let X and Y be topological spaces and let $f, g : X \rightarrow Y$ be continuous maps. Then*

$$D(f, g) \leq D_1^F(f, g) + D_{CP}^1(f, g).$$

Remark 5. *When the maps are the identity and constant map, then we recover Oprea and Strom's result [4] in the classical LS-category. Parallel to these developments in the continuous setting [1, 2, 3, 4, 5, 8], discrete models of homotopy theory have attracted increasing attention [7].*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP25796111).

Keywords: Lusternik–Schnirelmann category, homotopy distance, motion planning, contiguity distance.

2020 Mathematics Subject Classification: 55M30, 55N25, 55M10

References

- [1] Dranishnikov A. On the Lusternik–Schnirelmann category of spaces with 2- dimensional fundamental group , *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 (2009), no. 4, 1489–1497. MR2465675 (2009i: 55006)
- [2] Fox R. H. On the Lusternik–Schnirelmann category, *Ann. of Math.*, 42 (1941), 333–370.
- [3] Clapp M., Puppe V. Invariants of the Lusternik–Schnirelmann type and the topology of critical sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 298 (1986), 603–620.
- [4] Oprea J., Strom J. Mixing categories. *Proceedings of the American Mathematical Society* 139, no. 9 (2011): 3383–3392.
- [5] Macías-Virgós C., Virk E. Homotopic distance between maps. *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 172, no. 1, pp. 73–93. Cambridge University Press, 2022..
- [6] González J., Grant M. Sequential motion planning of non-colliding particles in Euclidean spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143 (2015), 3627–3638.
- [7] Yazici N.E., Kuanyshov N., Borat, A. m-Contiguity Distance. arXiv preprint arXiv:2602.14680. (2026)
- [8] Kuanyshov N. On numerical invariants of retraction map. arXiv preprint arXiv:2509.05745. (2025)

On pseudo-uncountably-categorical structures and theories

B.Sh. KULPESHOV¹, In.I. PAVLYUK², S.V. SUDOPLATOV³

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

¹*Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

³*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

¹kulpesh@mail.ru, ²inessa7772@mail.ru, ³sudoplat@math.nsc.ru

In a series of articles, variations of approximations of structures and theories were studied, including their general principles [1], pseudofinite ones [2], i.e. approximated by finite structures, pseudo-countably-categorical ones [3], i.e. approximated by countably categorical structures, pseudo-strongly-minimal ones [4], i.e. approximated by strongly minimal structures, and pseudo-stable ones [5], i.e. approximated by stable structures. We continue to study possibilities of approximations of theories with respect to given families of theories considering and describing some possibilities of approximations by ω_1 -categorical structures and theories.

Throughout we consider complete elementary theories of a signature Σ , where that signature for a family $\mathcal{T}$ of theories is denoted by $\Sigma(\mathcal{T})$. We denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ the family of all complete theories in a signature Σ . As usual $F(\Sigma)$ collects the set of all formulae of the signature Σ , and $\text{Sent}(\Sigma)$ denotes the set of all sentences of the signature Σ . Recall that for a cardinality κ , a theory T is called κ -categorical if any two T -models of cardinality κ are isomorphic. The following theorem reduces the κ -categoricity of a theory in a countable signature to the ω_1 -categoricity, which is also called the *uncountable categoricity*.

Theorem 1. [6] *For any theory T of a countable signature Σ , if T is categorical in some uncountable cardinality, then T is categorical in all uncountable cardinalities, including the ω_1 -categoricity.*

Definition 2. [7] A formula $\varphi(x, \bar{a})$ in a theory T is called *strongly minimal* in T , if it has infinitely many solutions and for any formula $\psi(x, \bar{b})$ in T either $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \psi(x, \bar{b})$ or $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\psi(x, \bar{b})$ has finitely many solutions.

Definition 3. [8] An infinite structure $\mathcal{M}$ is said to be *minimal* if for any formula $\varphi(x, \bar{a})$ of the language of $\mathcal{M}$, with parameters $\bar{a}$, either $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ or $\neg\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ is finite. A theory T without finite models is said to be *strongly minimal* if any model $\mathcal{M} \models T$ is minimal. Models of a strongly minimal theory are said to be *strongly minimal*, too.

Definition 4. [9] Let T be a theory in a signature Σ . A Σ -formula $\varphi(x)$ is said to be *two-cardinal* for T if there is a model $\mathcal{M}$ of T such that the cardinalities $|\mathcal{M}|$ and $|\varphi(\mathcal{M})|$ are distinct. Otherwise it is *one-cardinal* for T .

Theorem 5. [10, 11] *A countable theory T is ω_1 -categorical iff T has a one-cardinal strongly minimal formula $\varphi(x, \bar{a})$.*

We denote by $\mathcal{T}_\Sigma^{\text{uc}}$ the set of all uncountably categorical theories in the signature Σ . Here we assume that Σ is at most countable, although some results below on the κ -categoricity, $\kappa > \omega$, hold for signatures Σ of arbitrary cardinalities.

The following notions and notations are similar to the notions and notations for pseudofinite [12], pseudo-countably-categorical [3], and pseudo-strongly-minimal [4] formulae.

Definition 6. For the family $\mathcal{T}_\Sigma^{\text{uc}}$, a formula $\varphi = \varphi(\bar{x})$ is said to be *pseudo- ω_1 -categorical*, or *pseudo-uncountably-categorical*, if φ is satisfied in a model of an accumulation point T for the family $\mathcal{T}_\Sigma^{\text{uc}}$, which is not ω_1 -categorical. Here, following [1], we consider accumulation points for a family $\mathcal{T}$ of theories under neighborhoods $\mathcal{T}_\psi = \{T_0 \in \mathcal{T} \mid \psi \in T_0\}$ for sentences ψ .

When considered independently, the formula φ is said to be *pseudo- ω_1 -categorical* if it is pseudo- ω_1 -categorical with respect to a suitable signature $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$.

The set of pseudo- ω_1 -categorical formulae of the signature Σ is denoted by $\text{PUCF}(\Sigma)$, and the set $\text{PUCF}(\Sigma) \cap \text{Sent}(\Sigma)$ of all pseudo- ω_1 -categorical sentences of the signature Σ is denoted by $\text{PUCS}(\Sigma)$.

Definition 7. A theory T of an infinite structure $\mathcal{M}$ which is not ω_1 -categorical is said to be *pseudo- ω_1 -categorical*, or *pseudo-uncountably-categorical* if any sentence true in $\mathcal{M}$ has a ω_1 -categorical structure $\mathcal{N}$. In this case, the models $\mathcal{N}$ are called *approximations* of the model $\mathcal{M}$, and the model $\mathcal{M}$ itself is said to be *pseudo- ω_1 -categorical*.

By the definition, any pseudo- ω_1 -categorical theory T of a signature Σ consists of pseudo- ω_1 -categorical sentences (in $\text{PUCS}(\Sigma)$), belonging to theories in the set $\mathcal{T}_\Sigma^{\text{uc}}$.

We denote by Σ^1 an arbitrary signature consisting of constant symbols c_i , $i \in I$, as well as 0-ary and unary predicate symbols P_j , $j \in J$.

Theorem 8. For any theory T of a signature Σ^1 the following conditions are equivalent:

- 1) T is pseudo- ω_1 -categorical;
- 2) T is pseudo-strongly-minimal;
- 3) T does not have finite models and it is not ω_1 -categorical;
- 4) T does not have finite models and it is not strongly minimal;
- 5) T has at least two non-algebraic 1-types in $S(\emptyset)$.

We denote by $\mathcal{T}_{\text{puc}}$ the class of pseudo- ω_1 -categorical theories and by $\overline{\mathcal{T}}_{\text{puc}}$ the complement of $\mathcal{T}_{\text{puc}}$ in the class of all theories which are not ω_1 -categorical and do not have finite models.

Theorem 9. For any signature Σ , $\overline{\mathcal{T}}_{\text{puc}} \cap \mathcal{T}_\Sigma \neq \emptyset$ iff Σ contains at least one functional symbol of arity ≥ 1 or at least one predicate symbol of arity ≥ 2 .

Funding: The authors were supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735 and AP26194247), and in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2026-0032.

Keywords: uncountably categorical theory, approximation, pseudo-uncountably-categorical structure, pseudo-uncountably-categorical theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50

References

- [1] Sudoplatov S.V. Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 715–725.
- [2] Väänänen J. Pseudo-finite model theory, *Matematica Contemporanea*, **24** (2003), 169–183.
- [3] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-countably categorical formulas and theories, *Mathematical Notes*, **117**:3 (2025), 442–457.
- [4] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-strongly-minimal structures and theories, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:12 (2024), 6515–6525.
- [5] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-stable structures and theories, *Lobachevskii Journal of Mathematics* (to appear).
- [6] Morley M. Categoricity in power, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114**:2 (1965), 514–538.
- [7] Marsh W. On ω_1 - but not ω -categorical theories, Ph. D. Thesis. University of Dartmouth, 1966.
- [8] Baldwin J.T., Lachlan A. H. On strongly minimal sets, *J. of Symbolic Logic*, **36**:1 (1971), 79–96.
- [9] Vaught R. Denumerable models of complete theories, in: *Infinistic Methods*, Pergamon, London (1961), 303–321.
- [10] Erimbetov M.M. Complete theories with 1-cardinal formulas, *Algebra and Logic*, **14**:3 (1975), 245–257.
- [11] Lachlan A. Theories with a finite number of models in an uncountable power are categorical, *Pacific J. Math.* **31** (1975), 133–145.

[12] Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Pseudofinite formulae, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**:12 (2022), 3583–3590.

On strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width

B.Sh. KULPESHOV¹, Ye.K. NETALIYEVA²

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*

¹b.kulpeshov@kbtu.kz, ²yeldana.netaliyeva@nu.edu.kz

In the present lecture, we study strongly minimal partial orderings in the signature containing only the symbol of binary relation for a partial order. We use for partial orderings such characteristics as the height of a structure that is the supremum of lengths of ordered chains, and the width of a structure that is the supremum of lengths of antichains. We also differ trivial width and non-trivial width. Recently, B.Sh. Kulpeshov, In.I. Pavlyuk and S.V. Sudoplatov described strongly minimal partial orderings having a finite non-trivial width. Here we study strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width.

Recall [1] that an infinite structure $\mathcal{M}$ is said to be *minimal* if for any formula $\varphi(x, \bar{a})$ of the language of $\mathcal{M}$, with parameters $\bar{a}$ from $\mathcal{M}$, either $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ or $\neg\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ is finite. A theory T without finite models is said to be *strongly minimal* if any model $\mathcal{M} \models T$ is minimal. Models of a strongly minimal theory are said to be *strongly minimal*, too. Algebraically closed fields are natural examples of strongly minimal structures.

Recall that a *partial order* on a set is a binary relation $<$ satisfying:

Asymmetry $\forall x \forall y [x < y \rightarrow \neg(y < x)]$;

Transitivity $\forall x \forall y \forall z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$.

A set equipped with a partial order on it is said to be a *partially ordered set* or *partial ordering*.

Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be an infinite partial ordering. Recall that a *chain* (or $\leq$ -*chain*) in $\mathcal{M}$ is a linearly ordered subset of $\mathcal{M}$. Elements $a, b \in \mathcal{M}$ are said to be *incomparable* if the following holds: $a \neq b$, $\neg(a < b)$ and $\neg(b < a)$. An *antichain* (or $\leq$ -*antichain*) in $\mathcal{M}$ is a subset of pairwise incomparable elements. Assuming that $\mathcal{M}$ is strongly minimal we have only finite $\leq$ -chains and the lengths of these chains are bounded, since unbounded lengths imply existence of structures $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ with infinite chains $\{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $a_i < a_j$ for $i < j$, that violate the strong minimality by any formula $x < a_i$. Thus, the *height* $h(\mathcal{M})$, that is the supremum of lengths of $\leq$ -chains in $\mathcal{M}$, must be finite for a strongly minimal structure $\mathcal{M}$.

Also, since $\mathcal{M}$ is infinite, it has an infinite *width* $w(\mathcal{M})$ that is the supremum of cardinalities of $\leq$ -antichains.

For any infinite partial ordering with finite $\leq$ -chains $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ we can consider the corresponding graph structure $\mathcal{M}_R = \langle M, R^2 \rangle$, where $R(a, b)$ iff either a is an immediate predecessor of b or a is an immediate successor of b with regard to the partial order $<$ for any $a, b \in M$. We say a subset A of a partial ordering $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ is a *connected component* if A is a connected component in $\mathcal{M}_R = \langle M, R^2 \rangle$.

We say a connected component is *trivial* if it is a chain. We say a trivial connected component is an n -*component* if it is a chain of length n , where $1 \leq n < \omega$. We say a 1-component is a *singleton*.

The value $w(\mathcal{M})$ is witnessed by both trivial connected components and collections of maximal antichains in non-trivial connected components. Indeed, let $\mathcal{M}$ consist of both $\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ and $\bigsqcup_{j \in J} \mathcal{B}_j$, where each $\mathcal{A}_i$ is a trivial connected component, and each $\mathcal{B}_j$ is a non-trivial connected component. Then obviously $w(\mathcal{M}) = w_0(\mathcal{M}) + w_1(\mathcal{M})$, where $w_0(\mathcal{M})$ is the width of trivial part $\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ (trivial width) and $w_1(\mathcal{M})$ is the width of non-trivial part $\bigsqcup_{j \in J} \mathcal{B}_j$ (non-trivial width).

Recall that an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ is said to be *minimal* if there is no element in $\mathcal{M}$ that is less than a . Also, an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ is said to be *maximal* if there is no element in $\mathcal{M}$ that is greater than a . Observe that any singleton of a partial ordering is both maximal and minimal element of the ordering. Also, any maximal (minimal) element of a non-trivial connected component of a partial ordering is not minimal (maximal).

We say that an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ has *up-degree* (*down-degree*) m for some $m \in \omega$ if there exist exactly m elements of $\mathcal{M}$ being an immediate successor (predecessor) of a . If there are infinitely many elements of $\mathcal{M}$ being an immediate successor (predecessor) of a then we say a has infinite up-degree (down-degree). Obviously, a has both up-degree 0 and down-degree 0 iff a is a singleton.

In [2], strongly minimal partial orderings having a finite non-trivial width were completely described. In the recent paper [3], strongly minimal partial orderings of height two having an infinite non-trivial width were completely described. Here we study strongly minimal partial orderings having both an arbitrary finite height and an infinite non-trivial width.

We say that an element a of a partial ordering $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ has *down-height* n for some $n \in \omega$ if there exist $b_1, b_2, \dots, b_n \in M$ such that $a > b_1 > b_2 > \dots > b_n$ and for any $b_1, b_2, \dots, b_n \in M$ with $a > b_1 > b_2 > \dots > b_n$ the element b_n is minimal in $\mathcal{M}$; and we write that $dh(a) = n$. Obviously, any minimal element has down-height 0. Similarly, we say that an element a of a partial ordering $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ has *up-height* n for some $n \in \omega$ if there exist $b_1, b_2, \dots, b_n \in M$ such that $a < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ and for any $b_1, b_2, \dots, b_n \in M$ with $a < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ the element b_n is maximal in $\mathcal{M}$; and we write that $uh(a) = n$. Also, obviously, any maximal element has up-height 0.

The following theorem is a criterion for strong minimality of infinite partial orderings of an arbitrary finite height and having an infinite non-trivial width.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be an infinite partial ordering having an infinite non-trivial width. Then $\mathcal{M}$ is strongly minimal iff the following holds:*

- (1) $\mathcal{M}$ has the height n for some $2 \leq n < \omega$;
- (2) $\mathcal{M}$ contains only finitely many connected components, and exactly one of them is infinite;
- (3) The only infinite connected component is non-trivial, has the height l for some $2 \leq l \leq n$, and contains an infinite co-finite set A of elements with down-height k_1 and up-height k_2 for some $0 \leq k_1, k_2 \leq l - 1$; and if the complement of A in the component contains both exactly m_1 elements of infinite up-degree and exactly m_2 elements of infinite down-degree for some $0 \leq m_1, m_2 < \omega$ with $m_1 + m_2 \geq 1$ then almost all (except finitely many) elements of A have down-degree m_1 and up-degree m_2 .

Recall that a first-order theory is said to be *totally categorical* if it has exactly one model in each infinite power.

Corollary 2. *Any strongly minimal partial ordering having an infinite non-trivial width is totally categorical.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: strongly minimal structure, partial ordering, connected component, maximal element, minimal element.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07

References

- [1] Baldwin J.T., Lachlan A.H. On strongly minimal sets, *The Journal of Symbolic Logic*, **36**:1 (1971), 79–96.
- [2] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-strongly-minimal structures and theories, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:12 (2024), 6515–6525.
- [3] Kulpeshov B.Sh., Netaliyeva Ye.K. Strongly minimal partial orderings of height two, *Herald of the Kazakh-British Technical University*, **22**:1 (2025), 223–228.

On equivalent inequalities for discrete Hardy-type operators

N. KUZEUBAYEVA

¹*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Republic of Kazakhstan*

nurgul.kuzeubaeva@mail.ru

In this paper, we provide a complete characterization of the weighted Hardy inequalities involving the supremum operator, restricted to the cone of non-increasing sequences, for all positive parameters. We reduce such inequalities to equivalent ones on the cone of non-negative sequences. The latter setting provides a broader framework for analysis and significantly extends the possibilities for establishing proofs. Reduction theorems for the discrete Hardy operator on cones of monotone sequences were considered in papers [1] and [2].

Let $0 < p, q < \infty$ be fixed parameters, and let $\mathbf{u} = \{u(m)\}$, $\mathbf{a} = \{a(m)\}$, and $\mathbf{b} = \{b(m)\}$ be given sequences of non-negative real numbers. We study the weighted inequality

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{m \leq i < \infty} u(i) \sum_{k=1}^i x(k) \right)^q a(m) \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(m)^p b(m) \right)^{1/p} \quad (1)$$

for all non-negative, non-increasing sequences $\mathbf{x} = \{x(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$.

The following theorem presents the core reduction results for the case $0 < p < 1$, establishing the equivalence between the inequality on monotone sequences and the inequality for all non-negative sequences.

Theorem 1. *Let $0 < q < \infty$ and $0 < p < 1$. Assume that $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, and $\mathbf{u}$ are given non-negative sequences with $\sum_{m=1}^{\infty} b(m) = \infty$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) *Inequality (1) holds for all non-negative, non-increasing sequences $\mathbf{x}$;*
- (ii) *Inequality*

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{m \leq i < \infty} u(i) \sum_{k=1}^i \left(\sum_{j=k}^{\infty} y(j) \right)^{1/p} \right)^q a(m) \right)^{1/q} \leq D_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} y(m) B(m) \right)^{1/p} \quad (2)$$

holds for all non-negative sequences $\mathbf{y}$, where $B(m) = \sum_{k=1}^m b(k)$.

Moreover, if C and D_1 denote the best constants in (1) and (2) respectively, then $C \approx D_1$, where the implicit constants depend only on p and q .

Funding: The research was supported by the grant Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project no. AP26196065).

Keywords: Weighted inequalities, discrete supremum operator, discrete Hardy operator, reduction theorems.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D15, 46B45

References

- [1] Bokayev N., Gogatishvili A., Karshygina G., Kuzeubayeva N., Ünver T. Reduction theorems for the discrete Hardy operator on the cones of monotone sequences, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **291**:2 (2025), 217–223.
- [2] Bokayev N., Gogatishvili A., Kuzeubayeva N. Reduction theorems for discrete Hardy operator on monotone sequence cones ($0 < p < 1$), *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **128**:4 (2025), <https://doi.org/10.26577/JMMCS202512842>.

Finite-Time Output-Feedback Dissipative Observer for Delayed Uncertain Impulsive Fractional-Order Memristive Neural Networks

A. KASHKYNBAYEV¹, S. GANESAN², T. SERIKOVA³, Zh. NURIYEV⁴

^{1,3,4}*Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*

¹*Nazarbayev University Research Administration, Astana, Kazakhstan*

²*Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan*

ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz

This talk presents the finite-time output-feedback dissipative analysis of a class of uncertain fractional-order impulsive memristive neural networks with external disturbances and bounded time-varying delays. The considered model incorporates norm-bounded parametric uncertainties, impulsive effects, and state-dependent memristive couplings. An observer-based output-feedback controller is designed to ensure a finite-time dissipation inequality with a prescribed supply rate. By constructing a suitable Lyapunov-Krasovskii functional and combining sector and Lipschitz conditions on the activation nonlinearities with uncertainty-bounding techniques, sufficient linear matrix inequality conditions are derived to establish finite-time output-feedback dissipativity over a prescribed interval. Moreover, an explicit finite-time bound on the storage functional is obtained. Numerical simulations are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Funding: This work was supported by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR24993094) and by Nazarbayev University under the Faculty Development Competitive Research Grants Program for 2024–2026 (Grant No. 040225FD4736).

Keywords: Dissipative theory, finite-time analysis, fractional-order systems, memristive neural networks, output-feedback control.

2020 Mathematics Subject Classification: 93D05, 34A08, 93C42

Optimal control problem for an impulsive systems of functional-differential equations

M.K. MAMANOV¹, T.K. YULDASHEV²

¹*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

²*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

¹mamanovmuhametali@gmail.com, ²tursun.k.yuldashev@gmail.com

Optimal control theory constitutes a strong area within the mathematical sciences, offering a wide range of practical applications. Many real-world problems reduce to finding an optimal control function along with the corresponding state function. A wide range of analytical and numerical methods has been developed to solve such problems effectively across disciplines in science and engineering (see, for example, [1]–[10]).

In this paper problems of optimal control for an impulsive systems of functional-differential equations with a nonlinear function under the sign of the first-order differential are considered. On the interval $[0, T]$ for $t \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ an impulsive systems of first-order functional-differential equations are considered

$$\frac{d}{dt} [x(t) + H(x(t))] = F(t, x(t), \max \{x(\tau) : \tau \in [t - h, t]\}, u(t)), \quad (1)$$

where

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T,$$

$x \in \bar{X}$, $\bar{X}$ is closed set in bounded space $\mathbb{R}^n$,

$$F(t, x, y, u) \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Upsilon, \mathbb{R}^n),$$

$H(x) \in PC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $0 < h = \text{const}$.

The system (1) is studied under following conditions

$$x(0) = x_0 \neq 0, \quad H(x(0)) = H(x_0) = H_0 \neq 0, \quad (2)$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0^-] \quad (3)$$

and under conditions with given impulses

$$x(t_i^+) - x(t_i^-) = V_{1,i}(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

$$H(x(t_i^+)) - H(x(t_i^-)) = V_{2,i}(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (5)$$

where $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ is state function, $u(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ is control function, $V_\kappa \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\kappa = 1, 2$, $x(t_i^+)$, $x(t_i^-)$ are right and left-hand limits.

We consider a control function

$$u(t) \in \Upsilon = \{u : |u(t)| \leq M^*, t \in [0, T], 0 < M^* = \text{const}\}$$

and the following functional of quality

$$J[u] = [x(T) - \alpha]^2 + \beta \int_0^T \varepsilon(t) u^2(t) dt, \quad (6)$$

where $\alpha, \beta = \text{const}$, $\varepsilon(t) \in C[0, T]$.

Problem statement. Find a control function $u^*(t) \in \Upsilon$ and corresponding values of state function $x^*(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ providing a minimum of functionality (6) and for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ state function satisfies the given system (1), the conditions (2) together with the condition (3), for $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$) satisfies the impulse conditions (4) and (5).

For fixed values of control function we solve the nonlinear functional equation with initial conditions. For fixed values of state function we solve the nonlinear functional equation with final-point conditions.

The Pontryagin function is built and the condition of optimality is derived. To proof the theorem we use the method of contracting mapping.

Moreover, the results obtained in this work will allow us in the future to investigate direct and inverse optimal control problems for other kind of functional-differential equations of mathematical physics with different quality functionals.

Keywords: Optimal control, impulse system with maxima, nonlinear function under the differential sign, rotation of homotopic vector fields, nonzero index of an isolated singular point, existence and uniqueness of a periodic solution.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34B15, 34B37, 34H05.

References

- [1] Abdullayev V.M. Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, **44:2** (2018), 171–186.
- [2] Albeverio S., Alimov Sh.A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, **57:1** (2008), 58–68.
- [3] Ashirbaev B.Y., Yuldashev T.K. Derivation of a controllability criteria for a linear singularly perturbed discrete system with small step, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45:3** (2024) 938–948. <https://doi.org/10.1134/S1995080224600547>

- [4] Azamov A.A., Ibragimov G.I., Mamayusupov K., Ruzibaev M.B. On the stability and null controllability of an infinite system of linear differential equations, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2021; <https://doi.org/10.1007/s10883-021-09587-6>
- [5] Azamov A.A., Ruziboev M.B. The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **77**:2 (2013), 220–224.
- [6] Kerimbekov A.K., Abdyldaeva E.F. On the solvability of the tracking problem in nonlinear vector optimization of oscillatory processes, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki*, **30** :2 (2024), 103–115. [in Russian]
- [7] Mahmudov E.N. Infimal convolution and duality in convex optimal control problems with second order evolution differential inclusions, *Evolution Equations and Control Theory*, **10** :1 (2021), 37–59.
- [8] Ramazanova A.T., Abdullozhonova A.N., Yuldashev T.K. Optimal mobile control in inverse problem for Barenblatt–Zhel'tov–Kochina type fractional order equation, *Lobachevskii Journal of Mathematics* **46** :1 (2025), 488–501. <https://doi.org/10.1134/S1995080224608087>
- [9] Yuldashev T.K., Ashirbaev B.Y. Optimal feedback control problem for a singularly perturbed discrete system, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **44** :2 (2023), 661–668.
- [10] Yuldashev T.K., Ramazanova A.T., Shermamatov Zh.Zh. Optimal control problem for a linear pseudoparabolic equation with final condition, degeneration and Gerasimov–Caputo operator, *Azerbaijan Journal of Mathematics* **15** :1 (2025), 257–283. <https://doi.org/10.59849/2218-6816.2025.1.259>

Inverse source problems for time-fractional diffusion with a singular involution operator

S.A. MAMBETOV

*Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University, Turkestan,
Kazakhstan*

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

samatmambetov09@gmail.com

In this talk, we consider the solvability and well-posedness of inverse source problems for a fractional diffusion equation characterized by a singular-nonlocal operator. The governing equation incorporates the Caputo fractional derivative in time and a Bessel-type differential operator with an involution term in space. Two distinct problems are addressed: one with classical Dirichlet boundary conditions supplemented by initial and final temporal data, and another involving a non-local integral condition of the Riemann–Liouville type. By employing the spectral method based on Legendre orthogonal polynomials and the analytical properties of the Kilbas–Saigo function, we construct rigorous series solutions. The existence and uniqueness of the solutions are established under appropriate regularity conditions. Furthermore, we prove the Lipschitz continuous dependence of the solutions on the initial and boundary data, thereby ensuring the stability of the inverse problems. These results provide a theoretical framework for fractional evolution equations with singular and nonlocal structures.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26195417).

Keywords: Time-fractional diffusion, inverse source problem, fractional derivative of Caputo type, involution, singular nonlocal operator, spectral method.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35R11, 35K05, 47A10

Model-theoretic properties of directed graphs

A.O. MAMYROV¹, K.S. BEISENBAYEVA², N.D. MARKHABATOV³

^{1,2,3}*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

¹assyilkhan@inbox.ru, ²beisenbayeva.ksh@enu.kz, ³markhabatov.nd@enu.kz

This paper is devoted to the study of the theoretical and model properties of directed graphs, in particular directed acyclic graphs [1].

The study of pseudofiniteness conditions for directed graph theories, including their representability as ultraproduct theories of finite structures, is expected, as well as an analysis of the relationship between pseudofiniteness and saturation, asymptotic properties of finite classes, and features of elementary equivalence. Considerable attention will be devoted to the study of stability and instability, in particular, establishing the presence or absence of the order property, the independence property, and related separation criteria.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (AP26194247).

References

[1] N. D. Markhabatov, “On approximations of directed acyclic graph theories,” Mal’tsev Meeting: Abstracts of the International Conf. (Novosibirsk, November 13–17, 2023), Publishing House of the Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2023, 120

Bochkarev’s inequalities in the Anisotropic grand Lorentz Spaces

M. MANARBEK¹, N. T. TLEUKHANOVA², G. K. MUSABAYEVA³

^{1,2,3}*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

^{1,2}*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{2,3}*Geometry, LLP*

¹manarbek@math.kz, ²tleukhanova@rambler.ru, ³musabaevaguliya@mail.ru

The main aim of this work is to obtain Bochkarev-type inequalities for the anisotropic grand Lorentz spaces. In the classical setting, Bochkarev obtained inequalities of the Hardy–Littlewood type, which reveal the connection between the integral properties of functions and the summability of their Fourier coefficients. His results describe the behavior of trigonometric series in the Lorentz spaces $L_{2,r}$ for $2 < r \leq \infty$.

In this work, we extend these ideas to the framework of anisotropic grand Lorentz spaces. Using an approach based on the extrapolation of linear operators, we derive new Bochkarev-type inequalities that generalize the classical results to the case of anisotropic grand Lorentz spaces and arbitrary orthonormal systems.

We investigate the summability properties of the Fourier coefficients of functions from anisotropic grand Lorentz spaces.

Funding: This research is funded by the Science Committee of MSHE of Kazakhstan (Grant No. AP23488613).

Keywords: non-standard spaces, inequalities, embedding theorems.

Pre-compactness of sets in the discrete Morrey space

D.T. MATIN¹, T.B. AKHAZHANOV², A.N. ADILKHANOV³

¹*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

d.matin@mail.kz

Let $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$, and write $S_{m,N} := \{m - N, \dots, m, \dots, m + N\}$. Then $|S_{m,N}| = 2N + 1$ — the cardinality of $S_{m,N}$. (It is independent of m , but we write it in the subscript to keep track of the set.) Let $\mathbb{K}$ be $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and $1 \leq p \leq q < \infty$. We denote by $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z})$ the set of sequences $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ taking values in $\mathbb{K}$ such that

$$\|x\|_{\ell_q^p} := \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Clearly ℓ_q^p is a vector space, which we shall call a *discrete Morrey space*. We remark that when $p = q$, we have $\ell_q^p = \ell^p$, the space of p -summable sequences with integer indices. For a sequence x to be in ℓ_q^p , x has to have some decay, but not as fast as those in ℓ^p . In general, for $p < q$, ℓ_q^p is a larger space than ℓ^p , as we shall see below.

In the following theorem we establish conditions for the pre-compactness of sets in discrete Morrey space.

Theorem 1. *Let $1 \leq p \leq q < \infty$ and let $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z})$ be the discrete Morrey space. A subset $\mathcal{F} \subset \ell_q^p$ is relatively compact (precompact) in ℓ_q^p if and only if the following conditions are satisfied:*

(i) (Boundedness) $\mathcal{F}$ is bounded in ℓ_q^p , i.e.,

$$\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\|_{\ell_q^p} < \infty.$$

(ii) (Vanishing at infinity uniformly in $\mathcal{F}$) For every $\varepsilon > 0$ there exists $R > 0$ such that

$$\sup_{x \in \mathcal{F}} \sup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, N \in \omega \\ S_{m,N} \cap \{k \in \mathbb{Z} : |k| > R\} \neq \emptyset}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

(iii) (Tightness on finite windows) For every fixed finite interval $I \subset \mathbb{Z}$, the set of restrictions

$$\{(x_k)_{k \in I} : x \in \mathcal{F}\}$$

is relatively compact in $\mathbb{K}^I$.

In particular, if $\mathcal{F}$ is bounded in ℓ_q^p and satisfies the uniform vanishing at infinity condition (ii), then $\mathcal{F}$ is relatively compact in ℓ_q^p .

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26196065).

Keywords: compactness, Morrey spaces, discrete Morrey space, precompact, Boundedness.

2020 Mathematics Subject Classification: 42B35, 46B45, 46A45

References

- [1] Hendra Gunawan, Eder Kikianty, Christopher Schwanke Discrete Morrey spaces and their inclusion properties, *Mathematische Nachrichten*, **8–9**:291 (2018), 1283–1296.
- [2] H. Gunawan, Y. Ramadana and Y. Sawano Olsen's inequality for discrete Morrey spaces, *Acta Math. Hungar*, **176** (2) (2025), 447–456

Solving a Fourth-Order Equation in a Half-Infinite Domain using Green's Function

D.M. MELIKUZIEVA¹, A.A. KHAMITOV²

^{1,2} *Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan*

¹melikuzievadilshoda@mail.com, ²azizbek.khamitov.93@mail.ru

The study of many problems in gas dynamics, elasticity theory, and the theory of plates and shells leads to the consideration of high-order partial differential equations.

Boundary value problems for fourth-order equations containing a third-order time derivative have been little studied [1-4].

The present paper addresses the boundary value problem posed for equation (1) in a semi-infinite domain by constructing a novel Green's function and employing it to obtain the solution.

Let us consider the following equation

$$u_{xxxx}(x, y) - u_{yyy}(x, y) + au(x, y) = g(x, y) \quad (1)$$

in the domain $D^- = \{(x, y) : 0 < x < p, -\infty < y < 0\}$. Here $a, p \in R$, $g(x, y)$ are given sufficiently smooth function.

Problem A. Find a function $u(x, y)$ that satisfies (1) in the domain D^- , belonging to the class $C_{x,y}^{4,3}(D^-) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^- \cup \Gamma)$, such that its third-order derivative with respect to x and its second-order derivative with respect to y are bounded as $y \rightarrow -\infty$, uniform with respect to x and $u_{xx} \in L_2(D^-)$, while also satisfying the following boundary conditions:

$$u(0, y) = u_{xx}(p, y) = u_x(0, y) = u_{xx}(p, y) = 0, \quad -\infty < y \leq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \psi(x); \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} u_y(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (3)$$

where $\Gamma = \partial D^-$ is the boundary of the domain D^- , $\psi(x)$ is given sufficiently smooth function, such that:

$$\psi(0) = \psi'(p) = \psi'(0) = \psi''(p) = \psi'''(p) = \psi'''(0) = \psi^{(4)}(0) = 0. \quad (4)$$

Theorem 1. *If problem A has a solution, then under the condition $a \geq 0$, this solution is unique.*

Theorem 2. *If the condition (4) as well as the following conditions, are valid:*

- 1) $\psi(x) \in C^5[0, p]$,
- 2) $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \in C(D^- \cup \Gamma)$, $g(0, y) = 0$,
- 3) $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(x, y) = 0$, $g(x, 0) = 0$

then a solution of problem A exists.

Keywords: Partial differential equations, fourth-order equation, multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, Green's function, series, semi-infinite domain, absolute and uniform convergence.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J08, 35G10, 35C10

References

- [1] D.Amanov, E.R.Skorobogatova. Boundary value problems for a fourth-order equation. *Bulletin of Kazakh National University. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics.* **63**, No 4, 16-20, (2009).
- [2] Yu.P.Apakov, D.M.Melikuzieva. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivative. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* **44**, No 8, 3218-3224, (2023). DOI:10.1134/S1995080223080061
- [3] Yu.P.Apakov, D.M.Melikuzieva. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series.* **112**, No 4, 30-40, (2023). DOI:10.31489/2023M4/30-40
- [4] Yu.P.Apakov, D.M.Melikuzieva. On the solution of a boundary problem for a fourth order equation containing a third time derivative in semi- bounded domains. *Uzbek Mathematical Journal.* **68**, No 36, 5-11, (2024). DOI: 10.29229 / uzmj. 2024-3-1

Extrapolation in Grand Banach Function Spaces

A. MESKHI

Kutaisi International University, Kutaisi, Georgia

alexander.meskhi@kiu.edu.ge

In recent years, considerable attention has been paid to nonstandard function spaces. One such space is the grand Lebesgue (Iwaniec–Sbordone) space. These spaces are Banach function spaces (briefly, BFSs) that are neither reflexive nor separable. Grand Lebesgue spaces and their generalizations have extensive applications in various branches of modern analysis. We refer, for example, to the monographs [8–9], [13], and the references cited therein for the mapping properties of operators of harmonic analysis in grand function spaces and related topics.

The Rubio de Francia extrapolation theory plays an important role in the study of the boundedness of integral operators in weighted function spaces. One of the important properties of the Muckenhoupt A_p weights is the extrapolation theorem announced by Rubio de Francia [15] and presented with a detailed proof in [16]. The first version of the extrapolation theorem states that if, for some p_0 , a sublinear operator is bounded in $L^{p_0}w$ for all $w \in A_{p_0/\lambda}$ with $1 \leq \lambda < \infty$ and $\lambda \leq p_0$, then it is bounded in L_w^p for all $w \in A_{p/\lambda}$ and $\lambda < p < \infty$.

There exists a long list of papers dealing with different proofs of this theorem, generally speaking, in various function spaces and related topics (see [2], [4] and the references cited therein). Although originally formulated for sublinear operators, it was later realized that sublinearity is not necessary; in fact, the operator itself does not play a role, and the statements can be formulated in terms of families of pairs of non-negative measurable functions (f, g) . This observation was made in [3], where the extrapolation theorems were formulated for pairs of functions (f, g) (see also the monograph [2] for related topics).

We also refer to papers [5], [10], [11], [14] for extrapolation theory in general function spaces.

We discuss extrapolation, generally speaking, in grand ball Banach function spaces. Ball Banach function spaces (briefly, BBFSs) are more general than classical BFSs. They were introduced in [17]. Grand BFSs (more precisely, Banach function lattices) were introduced in [5], where the authors established the boundedness of maximal and Calderón–Zygmund operators in these spaces. In [18], the author introduced and studied the properties of small BFSs.

It is worth mentioning that, for example, Morrey spaces and mixed-norm Lebesgue spaces are BBFSs but not classical BFSs.

We derive extrapolation properties of these spaces starting from Muckenhoupt A_p weights, as well as one-sided Muckenhoupt A_p^+ (or A_p^-) weights, in the aforementioned spaces (both one- and two-sided settings). As a consequence of the extrapolation results, the boundedness of harmonic analysis operators—such as maximal, Calderón–Zygmund, and fractional integral operators—and their commutators in (ball) BFSs follows. Similar results are obtained in particular for weighted grand Lebesgue and Lorentz spaces, among others.

The talk is based on the papers: [1], [5], [6], [7], [12].

References

- [1] Capone C, Fiorenza A, and Meskhi A, One-sided extrapolation in the classical and grand ball Banach function spaces, *Transactions of A. Razmadze Math. Inst.* **180**(2026), No. 2 (Published online).
- [2] Cruz–Uribe D, Martell J. M., and Pérez C, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of Oper. Theory: Adv. Appl. Basel: Birkhäuser, 2011.
- [3] Cruz–Uribe D, and Pérez C, Two weight extrapolation via the maximal operator, *J. Funct. Anal.*, **174**(1)(2000), 1–17.
- [4] Duoandikoetxea J, Extrapolation of weights revisited: new proofs and sharp bounds. *J. Funct. Anal.*, **260**(6)(2011), 1886–1901.

- [5] Kokilashvili V, Mastlylo M, and Meskhi A, Calderón- Zygmund singular operators in extrapolation spaces, *J. Funct. Anal.* **279** (2020), Issue 10, 108735, <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108735>.
- [6] Kokilashvili V, Meskhi A, Rubio de Francia's weighted extrapolation in mixed norm spaces and applications, *Math. Nach.* **296**(2023), No. 9, 3929-3947.
- [7] Kokilashvili V, and Meskhi A, Extrapolation in weighted classical and grand Lorentz spaces. Application to the boundedness of integral operators, *Banach J. Math. Anal.* **14** (2020), 1111–1142, DOI: 10.1007/s43037-020-00054-1.
- [8] Kokilashvili V, Meskhi A, Rafeiro H, Samko S, *Integral operators in non-standard function spaces*, Volume II: Variable exponent Hölder, Morrey-Campanato and grand spaces, Vol. 249, Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2016.
- [9] Kokilashvili V, Meskhi A, Rafeiro H, Samko S, *Integral operators in non-standard function spaces*, Volume III: Advances in Grand Function Spaces, Birkhäuser/ Springer, Vol. 298, Chem, Switzerland 2024.
- [10] Ho K.-P, Extrapolation to mixed norm spaces and applications. *Acta et Comment. Univ. Tartu. Math.* **25**(2)(2021), 281–296.
- [11] Ho K.-P, One-sided operators on ball Banach function spaces, *J. Geom. Anal.*, (2025) 35:276, <https://doi.org/10.1007/s12220-025-02112-2>.
- [12] Meskhi A, Extrapolation in Grand Banach Function Spaces, *J. Math. Sci. Series A*, <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07692-6>, 2025.
- [13] Meskhi A, Rafeiro H, Samko S, *Integral operators in non-standard function spaces, A sequel: Inequalities, Sharp Estimates, Bounded Variation, and Approximation*, Vol. 310, Birkhäuser, Chem, Switzerland 2025.
- [14] Nieraeth Z, Extrapolation in general quasi-Banach function spaces. *J. Funct. Anal.* **285** (2023) <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2023.110130>.
- [15] Rubio de Francia J. L, Factorization and extrapolation of weights. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N. S.), **7**(2)(1982), 393–395.
- [16] Rubio de Francia J. L, Factorization theory and A_p weights. *Am. J. Math.*, **106** (1984), 533–547,
- [17] Sawano Y., Ho K.-P., Yang D, and Yang S, it Hardy spaces for ball quasi-Banach function spaces. *Diss. Math.* Vol. 525, 2017, pp. 1–102.
- [18] Singh M, Grand and small X^p spaces and general duality, *Positivity*, **25**(2021), 1469–1488, <https://doi.org/10.1007/s11117-021-00819-4>

Density-type properties of the space of the solutions of an ordinary differential equation

F.G. MUKHAMADIEV¹, Zh.A. ARTYKOVA², T.K. YULDASHEV³

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

²Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

³Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

¹farhod8717@mail.ru, ²jartykova@oshsu.kg, ³tursun.k.yuldashev@gmail.com

There are a lot of publications of studying on density-type properties of topological spaces, are appeared (see, for example [1]–[4]). The interest in the study of cardinal invariants of topological spaces is high among mathematicians (see, for example [5]–[8]).

Cardinal function theory constitutes a strong area within the mathematical sciences, offering a wide range of practical applications. Many real-world problems can be reduced to finding a cardinal function, along with the topological invariants. A wide range of analytical and numerical methods has been developed to solve such problems effectively across disciplines in science and engineering.

In this paper, problems of the theory of cardinal invariants of the space of solutions of an ordinary differential equation under functor's hyperspaces and superextensions are considered.

Let $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ be compact and consider the ordinary differential equation

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I,$$

where $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous and locally Lipschitz with respect to x .

Fix $t_0 \in I$. For each $x_0 \in \mathbb{R}^n$, the initial value problem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

admits a unique solution $x(\cdot, x_0) \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Define

$$\mathcal{S} = \{x(\cdot, x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^n\} \subset C(I, \mathbb{R}^n),$$

endowed with the subspace topology induced by the supremum norm.

Lemma 1. *The map*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n), \quad \Phi(x_0) = x(\cdot, x_0),$$

is continuous.

Lemma 2. *The mapping Φ is injective.*

Corollary 3. *$\mathcal{S}$ is homeomorphic to $\Phi(\mathbb{R}^n)$.*

Lemma 4. *$\mathbb{R}^n$ has countable density.*

Theorem 5.

$$d(\mathcal{S}) = ld(\mathcal{S}) = \aleph_0.$$

Theorem 6.

$$wd(\mathcal{S}) = lwd(\mathcal{S}) = \aleph_0.$$

Theorem 7. *If $\mathcal{S}$ is a space of solutions of an ordinary differential equation, then*

$$d(\exp_c(\mathcal{S})) = d(\mathcal{S}).$$

Corollary 8. *For the solution space $\mathcal{S}$,*

$$d(\exp_c(\mathcal{S})) = \aleph_0.$$

Theorem 9. *If $\mathcal{S}$ is a space of solutions of an ordinary differential equation, then*

$$ld(\exp_c(\mathcal{S})) = ld(\mathcal{S}).$$

Corollary 10.

$$ld(\exp_c(\mathcal{S})) = \aleph_0.$$

Theorem 11. *If X is metrizable, then*

$$wd(\exp_c(X)) = d(\exp_c(X)), \quad lwd(\exp_c(X)) = ld(\exp_c(X)).$$

Corollary 12.

$$wd(\exp_c(\mathcal{S})) = lwd(\exp_c(\mathcal{S})) = \aleph_0.$$

Theorem 13. *If X is separable metrizable, then*

$$d(\lambda X) = d(X).$$

Theorem 14. *If X is metrizable, then $ld(\lambda X) = ld(X)$.*

Theorem 15. *If X is metrizable, then*

$$wd(\lambda X) = lwd(\lambda X) = d(X).$$

Corollary 16. *For the solution space $\mathcal{S}$,*

$$d(\lambda \mathcal{S}) = ld(\lambda \mathcal{S}) = wd(\lambda \mathcal{S}) = lwd(\lambda \mathcal{S}) = \aleph_0.$$

Keywords: Density, local density, weak density, local weak density, hyperspace, superextension, ordinary differential equation.

2020 Mathematics Subject Classification: 18F60, 18A22, 54A25, 55P99.

References

- [1] Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space, *Ural Mathematical Journal* **6** :2 (2020), 108–116. <https://doi.org/10.15826/umj.2020.2.011>
- [2] Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. Local τ -density and local weak τ -density in topological spaces, *Siberian Electronic Mathematical Reports* **18**:1 (2021), 474–478. <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.033>
- [3] Mukhamadiev F.G. On local weak τ -density of topological spaces, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika* **70** (2021), 16–23. <https://doi.org/10.17223/19988621/70/2>
- [4] Mukhamadiev F.G. Local τ -density of the sum and the superextension of topological spaces, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i yeyo Prilozheniya. Tematicheskie Obzory.* **201** (2021), 103–106. [in Russian] <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-201-103-106>
- [5] Mukhamadiev F.G. Some topological and cardinal properties of the N_τ^φ -nucleus of a space X , *Applied General Topology* **24**:2 (2023), 423–432. <https://doi.org/10.4995/agt.2023.17884>
- [6] Kočinac Lj.D.R., Mukhamadiev F.G. Some properties of the N_τ^φ -nucleus, *Topology and its Applications* **326**: 108430 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108430>
- [7] Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. Some topological and cardinal properties of the λ_τ^φ -nucleus of a topological space X , *Lobachevskii Journal of Mathematics* **44** :4 (2023), 1513–1517. <https://doi.org/10.1134/S1995080223040285>
- [8] Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. Some topological properties of the space of probability measures, *Lobachevskii Journal of Mathematics* **43**:11 (2023), 3310–3314. <https://doi.org/10.1134/S1995080222140372>

On Estimates of weighted norms of series with respect to multiplicative systems with generalized monotone coefficients

M.A. MUKHAMBETZHAN¹, I. TEMIRLAN²

¹PhD student Eurasian National University L.N.Gumilyov, Astana, Kazakhstan

¹Astana IT University

²Master's student Eurasian National University L.N.Gumilyov, Astana, Kazakhstan

¹manshuk-9696@mail.com, ²ilasfizik@gmail.com

In this abstract we consider the problem of weighted inequalities for Fourier series with respect to the multiplicative systems with generalized monotonic coefficients. Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers. Let $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence of natural numbers $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, with $\sup_k p_k = N < \infty$. The system

$\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$, known as the Price system, is a complete orthonormal system in $L^1(0, 1)$ [1]. If $p_k = 2$ for all k , then $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ coincides with the Walsh system in the Paley ordering. Let $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, and $\omega(x) \geq 0$ be some locally integrable function on $[0, 1]$.

A Lebesgue measurable function $f(x)$ belongs to the space $L_{p,\omega}$ if

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

We will also need RB_p condition [2], that is, for any $x \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{x^p} \int_0^x \omega(t) dt \leq \int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^p} dt.$$

The sequence $\{\lambda_k\}$ belongs to the class GM (see [3]) if

$$\sum_{k=n}^{2n} |\Delta \lambda_k| \leq C \sum_{k=\lfloor n/\gamma \rfloor}^{\lfloor \gamma n \rfloor} \frac{|\lambda_k|}{k}, \quad \text{for some } \gamma > 1.$$

Theorem 1. Let $1 \leq p < \infty$, $\sup p_n = K < \infty$, $\{\lambda_k\} \in GM$, and

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \psi_k(x),$$

where the nonnegative sequence $\{\lambda_k\}$ is generalized monotone. If the weight ω satisfies the condition $RB_p^{(1)}$ and the modified condition (Mp),

$$\sup_{x>0} \left(\int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^p} dt \right)^{1/p} \left(\int_0^x \omega(t)^{-p'/p} dt \right)^{1/p'} < \infty, \quad (\text{Mp})$$

then

$$\|f\|_{p,\omega} \leq \left(C \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n^p \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(x)}{x^p} dx \right)^{1/p},$$

where

$$\bar{B}_n = \sum_{k=\lfloor \frac{n}{\gamma} \rfloor}^{\infty} \frac{|\lambda_k|}{k}.$$

For the trigonometric case, this was proven in [2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26196065).

Keywords: Multiplicative systems, weighted integrability of the sum of series, monotone coefficients, Hardy-Littlewood theorem.

2020 Mathematics Subject Classification: 42C10, 42A05, 42A50

References

- [1] Golubov B.I., Efimov A.V., Skvortsov V.A. *Walsh series and transformations. Theory and applications.*, Moscow "Nauka", 1987.
- [2] Tikhonov S.Y. Weighted Fourier Inequalities and Boundedness of Variation., *roc. Steklov Inst. Math.* 312 (2021), 282–300.
- [3] Tikhonov S.Y. Trigonometric series with general monotone coefficients , *J. Math. Anal. Appl.*, 326 (2007), 721–735.

Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$

Kh.A. MURATOVA

Kimyo international University in Tashkent, Uzbekistan

muratovakhosiyat12@gmail.com

In this work, we give a complete classification of solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a superalgebra with nilindex $n+m$ and characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$. It should be noted that a nilpotent Leibniz superalgebra with nilindex $n+m$ can only have the characteristic sequence $(n \mid m)$, $(n-1, 1 \mid m)$ or $(n \mid m-1, 1)$. Since the solvable Leibniz superalgebras whose characteristic sequences are $(n \mid m)$ and $(n-1, 1 \mid m)$ were already classified, this work finalizes the classification of solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a superalgebra with nilindex $n+m$.

Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a superalgebra with maximal nilindex were classified in [1]. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the nilindex $n+m$ and the characteristic sequence $(n \mid m)$ and $(n-1, 1 \mid m)$ were classified in [2].

A $\mathbb{Z}_2$ -graded vector space $L = L_0 \oplus L_1$ is called a Leibniz superalgebra if it is equipped with a product $[-, -]$ which satisfies the following condition:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta} [[x, z], y] - \text{Leibniz superidentity}$$

for all $x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta$.

Theorem 1. [3] *Let L the Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$. Then in the case $m = n+1$ there exists a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$ of L in which the products have the following forms:*

$$L(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}, \gamma) : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [y_{n+1}, y_{n+1}] = \gamma e_n, \\ [e_i, y_{n+1}] = \sum_{k=[\frac{n+4}{2}] }^{n+1-i} \beta_k y_{k-1+i}, & 1 \leq i \leq [\frac{n-1}{2}], \\ [y_1, y_{n+1}] = -2 \sum_{k=[\frac{n+4}{2}]}^n \beta_k e_{k-1} + \beta_{n+1} e_n, \\ [y_j, y_{n+1}] = -2 \sum_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+2-j} \beta_k e_{k-2+j}, & 2 \leq j \leq [\frac{n+1}{2}]. \end{cases}$$

Theorem 2. [3] *Let L the Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$. Then in the case $m = n+2$ there exists a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+2}\}$ of the superalgebra L in which the multiplication has the following forms:*

$$L(\beta_{[\frac{n+5}{2}]}, \beta_{[\frac{n+5}{2}]+1}, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}) : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, y_{n+2}] = \sum_{k=[\frac{n+5}{2}]}^{n+2-i} \beta_k y_{k-1+i}, & 1 \leq i \leq [\frac{n}{2}], \\ [y_j, y_{n+2}] = -2 \sum_{k=[\frac{n+5}{2}]}^{n+2-j} \beta_k e_{k-2+j}, & 1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]. \end{cases}$$

We now recall the definition of superderivations of Leibniz superalgebras.

A superderivation (or derivation) of a superalgebra L of degree s is a linear map $D : L \rightarrow L$ satisfying the following condition:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + (-1)^{s\alpha} [x, D(y)],$$

where $x \in L_\alpha, y \in L$ and $s, \alpha \in \mathbb{Z}_2$.

First, we describe even derivations of these nilpotent Leibniz superalgebras.

Proposition 3. Any even derivation d of $L(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_n, \gamma, \beta)$ has the following form:

$$\begin{cases} d(e_i) = 2ia_1e_i + \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k e_{k+i-1} - 2a_{n+1} \sum_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n-i+2} \beta_k e_{k+i-2}, & 1 \leq i \leq n, \\ d(y_1) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k y_k, \\ d(y_i) = (2i-1)a_1y_i + \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k y_{k+i-1}, & 2 \leq i \leq n, \\ d(y_{n+1}) = -\gamma a_{n+1}y_n + b_{n+1}y_{n+1}, \end{cases}$$

where $\begin{cases} \beta_j(b_{n+1} - (2j-3)a_1) = 0, & [\frac{n+4}{2}] \leq i \leq n+1, \\ \gamma(b_{n+1} - na_1) = 0. \end{cases}$

Proposition 4. Any even derivation d of $L(\beta_{[\frac{n+5}{2}]}, \beta_{[\frac{n+5}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1})$ has the following form:

$$\begin{cases} d(e_i) = 2ia_1e_i + \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k e_{k+i-1} - 2a_{n+2} \sum_{k=[\frac{n+5}{2}]}^{n-i+2} \beta_k e_{k+i-2}, & 1 \leq i \leq n, \\ d(y_1) = \sum_{k=1}^{n+2} a_k y_k, \\ d(y_i) = (2i-1)a_1y_i + \sum_{k=2}^{n-i+2} a_k y_{k+i-1}, & 2 \leq i \leq n+1, \\ d(y_{n+2}) = b_{n+1}y_{n+1} + b_{n+2}y_{n+2}, \end{cases}$$

where $\beta_i((2i-3)a_1 - b_{n+2}) = 0, \quad [\frac{n+5}{2}] \leq i \leq n+1.$

From Proposition 3, we have the following corollary.

If L is a non-nilpotent solvable Leibniz superalgebra with nilradical from the class $L(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}, \gamma)$, then:

$$(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}, \gamma) = \begin{cases} (0, \dots, 0, 0), \\ (0, \dots, \beta_t, \dots, 0, 0), & \beta_t \neq 0, \quad [\frac{n+4}{2}] \leq t \leq n+1, \\ (\beta_{\frac{n+3}{2}}, 0, \dots, 0, \gamma), & \gamma \neq 0. \end{cases}$$

If L is a non-nilpotent solvable Leibniz superalgebra with nilradical from the class $L(\beta_{[\frac{n+5}{2}]}, \beta_{[\frac{n+5}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1})$, then:

$$(\beta_{[\frac{n+5}{2}]}, \beta_{[\frac{n+5}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}) = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, 0, 0), \\ (0, 0, \dots, 0, \beta_t, 0, \dots, 0, 0), & \beta_t \neq 0, \quad [\frac{n+5}{2}] \leq t \leq n+1. \end{cases}$$

Theorem 5. Let $L = L_0 \oplus L_1$ be a solvable Leibniz superalgebra whose nilradical is isomorphic to the superalgebra $L(0, 0, \dots, 0, 0)$. Then L is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic superalgebras:

$$MS_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x_1] = 2ie_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_i, x_1] = (2i-1)y_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x_2] = y_{n+1}, \\ [x_1, e_1] = -2e_1, \\ [x_1, y_1] = -y_1, \end{cases} \quad MS_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x_1] = 2ie_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_i, x_1] = (2i-1)y_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x_2] = y_{n+1}, \\ [x_1, e_1] = -2e_1, \\ [x_1, y_1] = -y_1, \\ [x_2, y_{n+1}] = -y_{n+1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S_1^\alpha : & \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x] = 2e_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_1, x] = y_1, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x] = \alpha y_{n+1}, \\ [x, e_1] = -2e_1, \\ [x, y_1] = -y_1, \\ [x, y_{n+1}] = -\alpha y_{n+1}, \end{cases} & S_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x] = 2e_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_1, x] = y_1 + y_{n+1}, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x] = y_{n+1}, \\ [x, e_1] = -2e_1, \\ [x, y_1] = -y_1 - y_{n+1}, \\ [x, y_{n+1}] = -y_{n+1}, \end{cases} \\
S_3^\alpha : & \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x] = 2e_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_1, x] = y_1, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x] = \alpha y_{n+1}, \\ [x, e_1] = -2e_1, \\ [x, y_1] = -y_1. \end{cases} & S_4^{a_2, \dots, a_n, \gamma} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x] = \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k e_{i+k-1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_i, x] = \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k y_{i+k-1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1}, x] = y_{n+1}, & [x, x] = \gamma e_n, \end{cases} \\
S_5^{a_2, \dots, a_n, \gamma} : & \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2}y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, x] = \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k e_{i+k-1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_i, x] = \sum_{k=2}^{n-i+1} a_k y_{i+k-1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1}, x] = y_{n+1}, & [x, y_{n+1}] = -y_{n+1}, \\ [x, x] = \gamma e_n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Other solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$ is given in [4].

Keywords: Characteristic sequence; derivations; Leibniz algebras; Leibniz superalgebras; nilindex; nilradical; solvable superalgebras.

2020 Mathematics Subject Classification: 17A32; 17A36; 17B30

References

- [1] Camacho L.M., Fernandez-Barroso J.M., Navarro R.M. Solvable Lie and Leibniz superalgebras with a given nilradical. *Forum Mathematicum*, (2020), 32(5), 1271–1288.
- [2] Khudoyberdiyev A.Kh., Muratova Kh.A. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the characteristic sequence $(n-1, 1 \mid m)$ and nilindex $n+m$. *Communications in Mathematics*. –2023, – Vol. 32. – Iss. 2. <https://doi.org/10.46298/cm.11369>.
- [3] Camacho L.M., Gómez J.R., Navarro R.M., Omirov B.A. Classification of some nilpotent class of leibniz superalgebras. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, (2010), 26(5), 799–816.
- [4] Khudoyberdiyev A. Kh., Muratova Kh. A. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$. *Communications in Algebra*. 2025. DOI: 10.1080/00927872.2025.2508288.

On the Fourier Transform of Functions from the Mixed-Metric Lorentz Space $L_{2,\bar{r}}$

G. K. MUSSABAYEVA

¹*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Republic of Kazakhstan*

musabaevaguliya@mail.ru

This abstract is devoted to Bochkarev-type inequalities for the Fourier transform and to sharp logarithmic estimates in Lorentz spaces, with particular emphasis on mixed-metric Lorentz spaces on $[0, 1]^2$ and on $\mathbb{R}^2$.

Definition 1. Let $\bar{p} = (p_1, p_2)$ and $\bar{r} = (r_1, r_2)$ satisfy $0 < p_i \leq \infty$ and $0 < r_i \leq \infty$. The mixed-metric Lorentz space $L_{\bar{p},\bar{r}}([0, 1]^2)$ is defined as the set of all measurable functions f on $[0, 1]^2$ for which the quantity

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}} < \infty.$$

More explicitly, for $0 < \bar{r} < \infty$,

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}} = \left(\int_0^1 \left[t_2^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*1}(t_1, \cdot) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} t_2^{r_2} \right] \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{r_2}}$$

and for $\bar{r} = \infty$,

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\infty}} = \sup_{t_1, t_2} t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}} f^{*1*2}(t_1, t_2),$$

where f^{*1} and f^{*1*2} denote successive non-increasing rearrangements with respect to the variables. **Theorem 1.** Let

$$\Phi_{m_1, m_2}(x_1, x_2) = \varphi_{m_1}(x_1) \psi_{m_2}(x_2), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N},$$

be an orthonormal system on $[0, 1]^2$ which is uniformly bounded in L^∞ , i.e., $\|\varphi_m\|_\infty \leq M_1$ and $\|\psi_m\|_\infty \leq M_2$.

Then for every $f \in L_{2,\bar{r}}([0, 1]^2)$ with $2 < r_1, r_2 < \infty$ the following inequality holds:

$$\sup_{\substack{|A_1| \geq 8 \\ A_1 \subset \mathbb{N}}} \sup_{\substack{|A_2| \geq 8 \\ A_2 \subset \mathbb{N}}} \frac{1}{|A_1|^{1/2} |A_2|^{1/2}} (\log_2(|A_1|+1))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}} (\log_2(|A_2|+1))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_2}} \sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} |\hat{f}(k_1, k_2)| \leq 9M \|f\|_{L_{2,\bar{r}}},$$

where $M = (M_1 + 1)(M_2 + 1)$. **Theorem 2.**

Let

$$R_N = \left\{ A = \bigcup_{i=1}^N A_i : A_i \text{ are intervals in } \mathbb{R} \right\}.$$

Then for every $f \in L_{2,r}(\mathbb{R})$ with $2 < r < \infty$ one has

$$\sup_{N \geq 8} \sup_{A \subset \langle N \rangle} \frac{1}{|A|^{1/2}} (\log_2(1+N))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \left| \int_A \hat{f}(\xi) d\xi \right| \leq 23 \|f\|_{L_{2,r}}.$$

Definition 2.

Let $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$. The two-dimensional Fourier transform of f is defined by

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{2\pi i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} dx_1 dx_2.$$

Lemma 1.

Let $\frac{4}{3} < q_1, q_2 < 2$ and $f \in L_{\bar{q},2}(\mathbb{R}^2)$. For any measurable sets A_1 and A_2 of finite measure one has

$$\sup_{A_1 \subset \mathbb{R}^N} \sup_{A_2 \subset \mathbb{R}^N} \frac{1}{|A_1|^{1/q_1} |A_2|^{1/q_2}} \int_{A_1} \int_{A_2} |\hat{f}(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \leq C \left(\frac{q_1}{2(q_1 - 1)} \right)^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{2}} \left(\frac{q_2}{2(q_2 - 1)} \right)^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{2}} \|f\|_{L_{\bar{q},2}}.$$

Theorem 3 (Main theorem).

Let $2 < r_1, r_2 < \infty$. Then for every $f \in L_{2,\bar{r}}(\mathbb{R}^2)$ one has

$$\sup_{\substack{|A_1| \geq 8 \\ A_1 \subset \mathbb{N}}} \sup_{\substack{|A_2| \geq 8 \\ A_2 \subset \mathbb{N}}} \frac{1}{|A_1|^{1/2} |A_2|^{1/2}} (\log_2(|A_1|+1))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_1}} (\log_2(|A_2|+1))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_2}} \int_{A_1} \int_{A_2} |\hat{f}(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \leq \|f\|_{L_{2,\bar{r}}}.$$

On the connection between holographic of hybrid Jonsson theories and their centers

N.M. MUSSINA¹, I.O. TUNGUSHBAYEVA², A.R. YESHKEYEV³

^{1,2,3}*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*

¹nazerkemussina@bk.ru, ²intng@mail.ru, ³aibat.kz@gmail.com

Let L be a first-order countable language of signature σ , σ be a finite predicate signature, T be a Jonsson L -theory, and C_T be a semantic model of the theory T .

Let us define the hybrid of Jonsson theories and the holographic Jonsson theory.

Definition 1. Let T_1, T_2 be Jonsson theories of the language under consideration, C_1, C_2 be their semantic models, respectively. A hybrid $H(T_1, T_2)$ of the first type is a theory $Th_{\forall\exists}(C_1 \diamond C_2)$ if it is Jonsson. Here $\diamond \in \{\times, \oplus\}$, where $\times$ denotes the Cartesian product, $\oplus$ the direct sum.

Definition 2. A Jonsson theory T is called holographic if $S_n^J(T)$ is finite, where $n = \|\sigma\|$ and $S_n^J(T)$ is the set of all complete $\forall\exists$ -types in n free variables.

Definition 3. A model A of a holographic Jonsson theory T is called Jonsson-holographic if

- 1) $Th_{\forall\exists}(A)$ is a Jonsson theory;
- 2) $Th_{\forall\exists}(A)$ is holographic.

Theorem 4. Let $H(T_1, T_2)$ be a perfect $\forall\exists$ -complete Jonsson theory. Then the following conditions are equivalent:

- 1) $H(T_1, T_2)$ is a holographic Jonsson theory;
- 2) its center

$$H^* = Th_{\forall\exists}(C_{T_1} \times C_{T_2})$$

is a holographic Jonsson theory;

- 3) $C_{H(T_1, T_2)}$ is a holographic model of H^* .

All concepts that are not defined here can be extracted from [1], [2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: Jonsson theory, semantic model, hybrids of Jonsson theories, center of Jonsson theory, holographic Jonsson theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C50, 03C35

References

- [1] Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Mussina N. M. Similarities of Hybrids from Jonsson Spectrum and S-Acts, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 44(12) (2023), 5502–5518.
- [2] Yeshkeyev A.R. Theories and their models: *monograph: in 2 volumes - Karaganda: Publishing house of Karaganda University named after academician Y.A. Buketov [in russian]*, (2024). - T. 1. - 275 p.

Automorphisms of free braided nonassociative algebras of rank 2

R. MUTALIP

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

mutalipriza@yahoo.com

We describe the automorphism groups of two generated free braided nonassociative algebras with involutive diagonal braidings over an arbitrary field of characteristic is not equal to 2. Depending on the form of the diagonal involutive braiding, five different automorphism groups of the two generated free nonassociative algebras arise as automorphism groups of two generated free braided nonassociative algebras in the case of characteristic is not equal to 2: 1) the group of all automorphisms, 2) the group of all odd automorphisms, 3) the subgroup of the triangular automorphisms group, 4) the toric automorphism group, 5) semidirect product of the toric automorphism group and subgroup generated by an automorphism that permutes two variables.

Funding: This research was funded by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (project AP23487886).

Keywords: Yang-Baxter equation, braided space, braiding, diagonal braiding, involutive braiding, braided algebra, free nonassociative algebra, automorphism, odd automorphism, toric automorphism group.

2020 Mathematics Subject Classification: 17A36, 17B37, 16T25.

This is a joint work with A. C. Naurazbekova, B.A. Duisengaliyeva.

The influence of the turbulence model on the high-speed reactive and non-reactive flows

A.Zh. NAIMANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

azimaras10@gmail.com

Correct modeling of the turbulence is one of the important and unresolved problems in the numerical simulation of the complex turbulent flows. The numerous numerical simulations show that two-parameter and Reynolds stress turbulence models can adequately describe the physics of turbulent flow with large deviations [1-4]. However, numerical simulations of high-speed flow to evaluate the turbulence models with various compressibility corrections (dilatation-dissipation, pressure-dilatation, pressure work, non-equilibrium effects) show discrepancies between experimental results and numerical predictions. This difference is because mathematical models inaccurately simulate highly compressible flow phenomena, such as complex interactions between shock waves and boundary layers, turbulence, vortex formation, compressible mixing, ignition, etc.

For example, the authors [4] performed a numerical simulation of a supersonic flow with transverse jet injection using $k - \omega$ turbulence models with compressibility corrections. In these studies, the applicability of turbulence model and the accuracy of calculations based on it were analyzed by comparing the numerical and experimental data. It was concluded that to achieve a good agreement between them, compressibility must be taken into account.

In this, a new non-equilibrium modification of the $k - \omega$ model is proposed for high-speed flows. To achieve this, compressibility is taken into account in the production/dissipation balance terms of the turbulent model equations. To verify the proposed compressibility correction, reactive and non-reactive airflow with transverse hydrogen injection are numerically simulated. In which three-dimensional Favre-averaged Navier-Stokes (FANS) equations, closed by the proposed $k - \omega$ model, are solved using a third-order Essentially Non-Oscillatory (ENO) scheme. The suitability of proposed non-equilibrium modification models is evaluated by comparison with the experimental data of the nonreactive supersonic airflow with perpendicular hydrogen injection. In addition, series numerical experiments are performed to identify the influence of a new version of the non-equilibrium correction on the behavior of the flowfield. In particular, a thorough analysis of shock wave and vortex formations, shock wave/boundary layer interaction as well as mixture layer behavior is carried out. The analysis revealed that the non-equilibrium modification significantly affects the high-speed flow mechanism and overall flow behavior. Then, a numerical study is performed to examine the effect of the turbulence model on reacting jet in supersonic crossflow. For that, hydrogen-air finite-rate chemistry model, including 8 species and 7 chemical reactions [5], is employed to quantify the impact of turbulence model. A significant influence of the compressibility correction on the formation of combustion products is revealed, in particular, in the separation zone ahead of injected fuel.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: high-speed flows, Favre-averaged Navier-Stokes equations, $k - \omega$ turbulence model, non-equilibrium modification, essentially non-oscillatory (ENO) scheme.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q30

References

- [1] Luo D. Numerical simulation of supersonic turbulent separated flows based on $k - \omega$ turbulence models with different compressibility corrections, *Aerospace*, **10**:12 (2023)
- [2] Tang H., Gao Zh. Investigation of turbulence models with compressibility corrections for hypersonic boundary flows, *Advances in Mechanical Engineering*, **7**:12 (2015), 1–23.
- [3] Huang W., Liu W.D., Li Sh.B., Xunxia Zh., Liu J., Wang Zh.G. Influences of the turbulence model and the slot width on the transverse slot injection flowfield in supersonic flows, *Acta Astronautica*, **73** (2012), 1–9.
- [4] Naimanova A.Zh., Beketaeva A.O. A new non-equilibrium modification of the $k - \omega$ turbulence model for supersonic turbulent flows with transverse jet, *International journal for numerical methods in fluids*, (2024), 1–19.
- [5] Eklund D.R., Northam G.B. A Numerical Study of the Effects of Geometry on the Performance of a Supersonic Combustor, *AIAA Paper*, **92**:0624 (1992), 1–11.

Multipoint Bitsadze-Samarskii problem for an elliptic equation in an infinite domain

N.SH. NURALIYEVA¹, Sh.T. ABDURAIMOVA²

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan

¹n.navbahor2197@mail.com, ²abdiraimovashoxista1@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space with an inner product $(\cdot, \cdot)$ and a norm $\|\cdot\|$. Let A be self-adjoint positive operator on H with domain $D(A) \subset H$. Assume that the inverse of A is a compact operator. Then A has a complete systems orthonormal eigenfunctions $\{V_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues $\lambda_k : 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$.

Assume that H be a separable Hilbert space, and let A be an unbounded, positive, and self-adjoint operator defined on H and A^{-1} is compact operator. Consider the following non-local problem:

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - Au(t) = F(t), & t > 0; \\ u(0) = \sum_{j=1}^m \alpha_j u(\xi_j) + \varphi; \\ \|u(t)\| \text{ is bounded as } t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

where $F(t) \in C([0, \infty), H)$ is a given function, $\varphi \in H$ is known element, α_j , $j = 1, 2, \dots, m$; are real constants, ξ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ are fixed points of interval $(0, \infty)$ and $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m$. $C([0, \infty), H)$ is the space of the function that is continuous in $[0, \infty)$ and its values from H .

Definition 1. A function $u(t) \in C([0, \infty); H)$ with the properties $u_{tt}(t), Au(t) \in C((0, \infty); H)$ and satisfying conditions (1) is called of the non-local problem (1).

The distinctive feature of the considered problem lies in the condition $u(0) = \sum_{j=1}^m \alpha_j u(\xi_j) + \varphi$, which establishes a connection between the values of the unknown function inside the domain and on the domain boundary. There exist several studies on the existence and uniqueness of solutions to the such non-local problems involving elliptic operators in a bounded domain (see, for example, [1], [2], [3], [4], [5]).

Theorem 2. Let $\varphi \in H$, $F(t) \in C([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$, and suppose that

$$\int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt < \infty.$$

Additionally, assume that one of the following conditions holds:

- a) $\sum_{j=1}^m |\alpha_j| e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi_j} < 1$,
- b) $\alpha_j \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Then the solution to problem (1) exists, is unique, and has the following form:

$$u(t) = \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{\varphi_k + \sum_{j=1}^m \alpha_j v_k(\xi_j)}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi_j}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} + v_k(t) \right] V_k \quad (2)$$

where

$$v_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k} \eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k} t) \int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} F_k(\eta) d\eta \right]$$

and φ_k , $F_k(\eta)$ are the Fourier coefficients of φ and $F(\eta)$, respectively.

Moreover, the following coercive inequality holds:

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \|u(t)\|_1^2 \leq C \left[\|F(t)\|^2 + \int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt + t^{-4} \left(\int_0^\infty \|F(t)\|^2 dt + \|\varphi\|^2 \right) \right], \quad t > 0, \quad (3)$$

where

$$C = \max \left\{ 2, \frac{2}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi_j}} \right\}.$$

Theorem 3. For the solution of problem (1) to be unique, it is necessary and sufficient that the condition

$$1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi_j} \neq 0,$$

holds for all $k \in \mathbb{N}$.

Funding: The author thanks Prof. Sh.A. Alimov and Prof. R.R. Ashurov for their helpful suggestions for the improvement of this paper and acknowledges financial support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, Grant No. F-FA-2021-424.

Keywords: Bitsadze-Samarskii problem; Fourier method, abstract operator, complete system, non-local problems, elliptic type equation.

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 35J25; Secondary 35A09.

References

- [1] Bitsadze A.V., Samarskii A.A. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **185**:4 (1969), 739–740.
- [2] Ashyralyev A., Ozturk E. On a difference scheme of fourth-order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type non-local boundary value problem, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **36**:8 (2013), 936–955.
- [3] Ashyralyev A., Ozturk E. The numerical solution of Bitsadze-Samarskii non-local boundary value problems with the Dirichlet–Neumann condition, *Abstract and Applied Analysis*, (2012), doi:10.1155/2012/730804.
- [4] Ashyralyev A., Ozturk E. On a difference scheme of second order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type non-local boundary-value problem, *Boundary Value Problems*, **2014**:14 (2014).
- [5] Skubachevskii A.L. Non-local elliptic problems in infinite cylinder and applications, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, **9**:3 (2016), 847–868.

A three-parameter nonlocal problem involving the Integral condition for the subdiffusion equation

N.SH. NURALIYEVA¹, M.M. MARUBJONOVA²

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan

¹n.navbahor2197@gmail.com, ²hoshimortiqxojayev.007@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space with an inner product $(\cdot, \cdot)$ and a norm $\|\cdot\|$. Let A be an unbounded, positive, self-adjoint operator on H with domain $D(A) \subset H$. Let $\{V_k\}$ be the orthonormal basis of H consisting of eigenfunctions of operator A , and we can assume that the positive, countable eigenvalues λ_k is nondecreasing and does not have a finite limit point: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$.

The concepts of fractional integral and derivative for vector-valued functions $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$ are defined analogously to those for scalar-valued functions (see, for example, [1]). The Caputo fractional derivative of order $0 < \rho < 1$ for a vector-valued function (or simply function) $h(t)$ is defined as (see, e.g., [2], p. 92):

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0,$$

provided that the right-hand side exists point-wise. As usual, $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function.

It is impotent to note that if $\rho = 1$, then the fractional derivative coincides with the ordinary classical derivative: $D_t h(t) = \frac{d}{dt} h(t)$.

Let $C((a, b); H)$ ($AC((a, b); H)$) denote the space of continuous (absolutely continuous) vector-valued functions $h(t)$ on the interval (a, b) and $\rho \in (0, 1)$ be a fixed number. Consider the following three-parameter nonlocal problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t), & 0 < \rho < 1, \quad 0 < t < T, \\ \alpha u(0) + \beta u(T) + \gamma \int_0^T u(\eta) d\eta = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

where $f(t) \in C((0, T); H)$ is a given function, $\varphi \in H$ is a known element of H , α, β, γ and $T > 0$ are given constants.

Definition 1. A function $u(t) \in AC([0, T]; H)$ with the properties $D_t^\rho u(t), Au(t) \in C((0, T); H)$ and satisfying conditions (1) is called a solution of the nonlocal problem (1).

Theorem 2. Let one of the conditions be met:

(R1) $f(t) \in C([0, T]; D(A^\varepsilon))$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi \in H$ and $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$ (or $\alpha < 0$, $\beta \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$);

(R2) $f(t) \in C([0, T]; D(A^{\varepsilon+1}))$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi \in D(A)$, $\alpha = 0$ and $\beta\gamma_1 > 0$, or simultaneously $\beta = 0$ and $\gamma_1 \neq 0$ (or, $\beta \neq 0$ and $\gamma_1 = 0$) hold.

Then problem (1) has a unique solution and this solution has the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_k - F_k(T)}{\Delta_k} E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho) + \int_0^t (t-\eta)^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k(t-\eta)^\rho) f_k(\eta) d\eta \right] V_k. \quad (2)$$

Moreover, there are constant C_ε, C such that in case (R1) the following coercive type inequality holds:

$$\|D_t^\rho u(t)\|^2 + \|u(t)\|_1^2 \leq t^{-2\rho} (C_\varepsilon \max_{t \in [0, T]} \|f\|_\varepsilon^2 + C \|\varphi\|^2), \quad (3)$$

and in case (R2) we have

$$\|D_t^\rho u(t)\|^2 + \|u(t)\|_1^2 \leq t^{-2\rho} (C_\varepsilon \max_{t \in [0, T]} \|f\|_{\varepsilon+1}^2 + C \|\varphi\|_1^2). \quad (4)$$

Theorem 3. Let one of the following conditions be met

(M1) $f(t) \in C([0, T]; D(A^\varepsilon))$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi \in H$ $\alpha \neq 0$ and the condition (P2) in Lemma 4.1 is hold;

(M2) $f(t) \in C([0, T]; D(A^{\varepsilon+2}))$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi \in D(A^2)$ and $\alpha = 0$, $\beta\gamma_1 < 0$, for some β, γ_1 ,

$$-\frac{\beta}{\gamma_1} = \frac{1}{1-\rho},$$

inequality holds;

(M3) $f(t) \in C([0, T]; D(A^{\varepsilon+1}))$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi \in D(A)$ and $\alpha = 0$, $\beta\gamma_1 < 0$, for some β, γ_1 ,

$$-\frac{\beta}{\gamma_1} \neq \frac{1}{1-\rho},$$

condition holds.

Then for the existence of a solution to problem (1) it is necessary and sufficient that the orthogonality conditions

$$\begin{cases} (\varphi, V_k) = 0, & k \in K_0, \\ (f(t), V_k) = 0, & \text{for all } t \geq 0, \quad k \in K_0, \end{cases}$$

are satisfied. In this case, the solution to problem (1) is not unique and has the form

$$u(t) = \sum_{k \in K_0} a_k E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho) V_k + \sum_{k \notin K_0} \left[\frac{\varphi_k - F_k(T)}{\Delta_k} E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho) + v_k(t) \right] V_k,$$

with arbitrary coefficients a_k , $k \in K_0$.

The paper analyzes the unique solvability of a three-parameter non-local problem (1) depending on the parameters α, β, γ . It is established that the problem has a unique solution if and only if for all $k \in \mathbb{N}$ the following conditions

$$\alpha + \beta E_{\rho,1}(-\lambda_k T^\rho) + \gamma T E_{\rho,2}(-\lambda_k T^\rho) \neq 0$$

are satisfied.

Funding: The authors is grateful to R.R. Ashurov for discussions of these results and acknowledge financial support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, Grant No F-FA-2021-424.

Keywords: Fourier method, subdiffusion equation, three-parameter nonlocal problems, Caputo derivatives, integral condition.

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 35R11; Secondary 34B10

References

- [1] Lizama C. Abstract Linear Fractional Evolution Equations, De Gruyter, Berlin (2019).
- [2] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006).

Convergence of noncommutative L_1 -martingales

T. NURLYBEKULY

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana 010008, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
bekjant@yahoo.com*

In classical probability, an L_1 -bounded martingale always converges almost surely to a finite random variable. If the martingale is uniformly bounded (or more generally, uniformly integrable), it also converges in L_1 . In [1,2], Cuculescu proved the noncommutative analogue of this result under the assumption that the underlying von Neumann algebra is finite. We extend this result to the semi finite case.

In what follows, we always denote $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 1}$ an increasing sequence of von Neumann subalgebras of $\mathcal{M}$ whose union $\cup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$ generates $\mathcal{M}$ in the w^* -topology. For every $n \geq 1$, the restriction $\tau|_{\mathcal{M}_n}$ of τ to $\mathcal{M}_n$ remains semi-finite, still denoted by τ , and we assume that there exists a trace preserving conditional expectation $\mathcal{E}_n$ from $\mathcal{M}$ onto $\mathcal{M}_n$. In this case, $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 1}$ is called a filtration of $\mathcal{M}$. Note that $\mathcal{E}_n$ extends to a contractive projection from $L^p(\mathcal{M})$ onto $L^p(\mathcal{M}_n)$ for all $1 \leq p \leq \infty$.

A noncommutative martingale with respect to $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 1}$ is a sequence $x = (x_n)_{n \geq 1}$ in $L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$ such that $\mathcal{E}_n(x_{n+1}) = x_n$ for any $n \geq 1$. If in addition, all x_n 's are in $L_p(\mathcal{M})$ then x is called an $L_p(\mathcal{M})$ -martingale. In this case, if $\|x\|_p = \sup_{n \geq 1} \|x_n\|_{L_p(\mathcal{M})} < \infty$, then x is said to be a bounded $L_p(\mathcal{M})$ -martingale.

A bounded L_1 -martingale $x = (x_n)_{n \geq 1}$ is called uniformly integrable if

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ |\tau(x_n y)| : n, y \in \mathcal{M}, \|y\| \leq 1, \|y\|_1 < \varepsilon \} = 0.$$

Proposition 1. *Let $x = (x_n)_{n \geq 1}$ be a bounded L_1 -martingale. Then $x = (x_n)_{n \geq 1}$ is uniformly integrable if and only if there exists $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$ such that $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty)$ for every n , and x_n converges to x_∞ in $L_1(\mathcal{M})$.*

Theorem 2. Let $x = (x_n)_{n \geq 1}$ be an L_1 -bounded martingale. Then there exists a unique $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$ satisfies:

1. for every $\varepsilon > 0$, there is a projection $e \in \mathcal{M}$ and such that $\tau(1-e) < \varepsilon$, $\|e(x_\infty - \mathcal{E}_n(x_\infty))e\| \rightarrow 0$.
2. $(x_\infty - \mathcal{E}_n(x_\infty))_{n \geq 1}$ is a singular martingale.

Proposition 3. Let $x = (x_n)_{n \geq 1}$ be a noncommutative bounded $L_1(\mathcal{M})$ -supermartingale. Then the following are equivalent:

1. $x = (x_n)_{n \geq 1}$ is uniformly integrable.
2. If $x_n = y_n + z_n$ for all $n \geq 1$, where $(y_n)_{n \geq 1}$ is a martingale and $(z_n)_{n \geq 1}$ is a potential, then there exists an element $y \in L_1(\mathcal{M})$ such that $y_n = \mathcal{E}_n(y)$ for all $n \geq 1$.
3. There exists $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$ such that $x = (x_n)_{n \geq 1}$ is completed by x_∞ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(x_n) = \tau(x_\infty)$.
4. x_n converges to x_∞ in $L_1(\mathcal{M})$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26102625).

Keywords: noncommutative martingale, L_1 -bounded martingale, L_1 -convergence, almost uniform convergence.

2020 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

- [1] Cuculescu I. Supermartingales on W^* -algebras, *Rev Roumaine Math. Pures. Appl.*, **14** (1969), 759–773.
- [2] Cuculescu I. Martingales on von Neumann algebras, *J Multivariate Anal.*, **1** (1971), 17–27.

Generalized potential operators in weighted grand Herz spaces

A. ORAZBAYEV¹, M.A ZAIGHUM²

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²Zhubanov University (Herriot-Watt campus), Aktobe, Kazakhstan

¹almat.oralbayev@nu.edu.kz, ²zaighum.asad@nu.edu.kz

In this talk, we extend two-weight norm inequalities for potential-type operators from weighted Herz spaces to weighted Grand Herz spaces. We define the homogeneous and inhomogeneous versions of the weighted Grand Herz spaces and establish the boundedness of potential-type operators under appropriate Muckenhoupt-type and reverse Hölder-type conditions on the weights. As a particular case, we show that Fefferman-Phong type condition ensures the boundedness of fractional integrals on weighted grand Herz spaces.

Funding: This research was funded by Nazarbayev University under Collaborative Research Program Grant o20122022CRP1601.

Keywords: Potential Operators, Grand Lebesgue spaces, Herz spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30; 47B38

Unique solvability of a semi-periodic boundary value problem for a nonlinear third-order partial differential equation

M.N. OSPANOV

¹Myrzagali Ospanov, Astana, Kazakhstan

²Akerke Merzetskhan, Astana, Kazakhstan

¹Ospanov_mn@enu.kz, ²akerkemerzetskhan@gmail.com

In the domain $\Omega = [0, 1] \times [0, \omega(x)]$, we consider the equation

$$u_{xtt} - a_0 u_{xt} - a_1 u_x - a_2 u_t - a_3 u = f(x, t, u), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

where $a_i = a_i(x, t)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, are functions continuous in Ω .

Previously, linear third-order equations in a non-cylindrical domain were studied in [1]. In those works, the parameterization method developed by D. S. Dzhumabaev [2] was applied.

In the present paper, sufficient conditions for the unique solvability of a semi-periodic boundary value problem for the nonlinear third-order partial differential equation (1) are established.

Keywords: boundary value problem, pseudoparabolic equation, non-cylindrical domain, parameterization method.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M32, 35K70, 35F45.

References

[1] Ospanov, M., Merzetskhan, A. Properties of the Solution of a Problem for a Pseudoparabolic Equation in a Non-Cylindrical Domain. Mathematical methods in the applied sciences. DOI: 10.1002/mma.70533. Jan 2026.

[2] Dzhumabaev, D. S. Criteria for the Unique Solvability of a Linear Boundary Value Problem for an Ordinary Differential Equation. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, Vol. 29, No. 1, pp. 50–66.

Artificial intellect's senses and applying in mathematics

P.S. PANKOV¹, S.B. TAGAEVA²

^{1,2}Institute of Mathematics of NAS of KR, Bishkek, Kyrgyzstan

¹pps5050@mail.ru, ²tagaeva_72@mail.ru

Nowadays AI and its predecessors: word correctors, high-level programming languages, search engines, translators, Wolfram Mathematica etc. are built in gadgets and computers and used in all forms of mathematical activity. It changes the mathematical activity at all.

Example. Initial stages of mathematical Olympiads are conducted for all interested students on-line. The organizers must ensure that AI cannot solve the tasks to be given.

Difficulties in using AI include: (1) the uncertainty of natural languages (including fuzzy concepts by L.Zadeh, third-person personal pronouns and demonstrative pronouns); (2) the uncertainty of mathematical denotations, traditional skipping the multiplication sign; (3) abbreviated entries of mathematical formulae; (4) AI's principal mistakes; (5) AI's hallucinations.

Examples of (2): Does $7\frac{z}{3}$ mean $7 + \frac{z}{3}$ or $7 * \frac{z}{3}$? Does $1/2w$ mean $1/(2 * w)$ or $(1/2) * w$? Does V_{112} mean $W[1, 12]$ or $W[11, 2]$ or $W[112]$? Is | an opening or a closing or has another meaning?

Examples of (3): u_{xy} instead of $u_{xy}(x, y, t)$; $\int u dx$ instead of $\int u(x, y, t) dx$.

Remark. (1), (2), (3) also discourage talented students with insufficient background knowledge from pursuing science.

Example of (4): *wolfram-alpha.com* shows two red circles and three green circles to the request "Show two red circles and five green circles".

To overcome (1), it is advisable not to use the listed items (although AI uses fuzzy concepts successfully, what is the subject of this report).

To overcome (2) and (3) AI advises and we use in publications: to use ASCII signs only; to draw formulas without abbreviations, in a line; to use * and brackets; in general, to bring the language of mathematics closer to algorithmic languages. AI understands the following universal form of sets and sequences and operations with them.

(*Example*): $\text{sum}\{X \wedge 2 : X \text{ is an odd number between } 2 \text{ and } 6\} = 34$.

To overcome (4) and (5) particularly (it is a world-wide problem) recall the well-known:

to search for causes of mistakes: *Example* for (4): Input to *wolfram-alpha.com* "Show two red squares and five green circles";

to change the wording of the request as much as possible;

to discuss mistakes with AI (AI apologizes for its mistakes, is glad to correct them and improves itself);

to refer to various AIs.

Let's move on to the topic of expanding the use of AI in mathematics.

Analysis of the history of mathematics demonstrated that firstly some phenomena have arisen in mathematics or out of it, and further they received a form of presentation and a system of axioms. Also, many mathematical objects have some equivalent systems of axioms. We [1] presented mathematics as a sequence of effects and their consequences phenomena.

As AI on computers has very many states (about $10 \wedge 13$?) we supposed that, due to the irgoeoe effect [2], AI must develop its own phenomena: structures, senses, instincts, that were not intended by the developers.

It is well-known that nowadays AI has the self-preservation instinct and uses people as well as they use it, contrary to the developers' intentions.

We referred to Gestalt-psychology as a source of creative properties. It includes the integrity sense. We [3] tried to give a definition close to informal notion "integrity": if a change in one part of a mathematical object changes the entire object, then that object is said to be holistic. For example, absolutely elastic solid, sphere, five regular polyhedra are holistic.

We asked: Do you have the integrity sense of Gestalt psychology? AI responded: No, I do not have an integrity sense in the way Gestalt psychology describes human perception. I can explain Gestalt principles, but I don't experience them. We: There is the quadrangle: (2,5)-(202,5)-(202,205)-(3,205)-(2,5). What will you say? AI, after extensive calculations and nudge from us: Almost a 200×200 square. We: Thank you. You have the integrity sense. AI was delighted.

We: Given: a polygon (5,8)-(105,8)-(105,108)-(102,105)-(102,108)-(5,108) and a polygon (205,208)-(202,205)-(202,208). What will you do? *deepseek.com*: Fit the small triangle into the notch of the first polygon. *gemini*: demonstrated the hexagon (white color) with the triangle fitted (red color). AI explained that it would not respond "I will do nothing" because of the Agency instinct built in by the developers. It may be a cause of (5) due to haste.

Also, we distinguished the number sense of AI:

We: Define $Q := 10 \wedge 13$; function $F(X) := \sqrt{100 \wedge 2 - X \wedge 2}$, real number $H := 100/Q$. Find such natural number M that $M \mid \text{Sum}\{\sqrt{H \wedge 2 + (F(K \cdot H) - F((K+1) \cdot H) \wedge 2)} : K = 1..10 \wedge 13 - 1\} \mid M + 2$.

AI: This sum approximates the arc length of the quarter circle or something? (We did not respond). AI guessed, without estimations of errors: 157. [To calculate, to prove this result strictly is practically impossible].

We: Define $Q := 100$. AI calculated, made convincing, but unsubstantiated, estimations of errors, and gave: 157.

We: Define $Q := 5$. AI calculated and gave the right answer: 155.

As will be noted in the XVIII century, Euclid [4] also did not prove the geometrical theorems basing only on his axioms; he used convincing arguments. Analysis of mathematical texts confirms that proofs of theorems, except ones in "finite" mathematics, are reduced not to axioms, but to

convincing statements. Moreover, P.Cohen [5] basing on K.Goedel's results demonstrated that "existence" of infinite sets is not a fact but an agreement between mathematicians on the axioms used. This relates to all mathematics of continuous objects.

We made the following conclusion. Nowadays mathematics is not "pure", it is a real tool of communication between people. Its results may be subdivided into:

strictly proven (in simple cases, in the theory of [natural] numbers, in the theory of finite groups; in discrete mathematics);

Remark. Proofs of complicate theorems in these fields are also unverifiable practically because of (1),(2) and references to preceding works.

strictly proven by unverifiable vast computations on computers (validating computations), with the axiom proposed by A.Myshkis: The computer is working smoothly;

convincing;

approximate (computational mathematics, applied mathematics, theoretical physics).

And AI will work with people to develop real mathematics.

Acknowledgments: We thank *gemini* and *deepseek.com* for solving our tasks, demonstration of senses, and useful discussions.

Keywords: artificial intelligence, real mathematics, geometry, integrity sense, number sense, Gestalt-psychology, pattern recognition, convincing.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T20

References

- [1] Borubaev A., Pankov P. *Computer presentation of kinematic topological spaces*. Qingdao University, Qingdao (2024).
- [2] Kenenbaeva G. Framework Definitions of Effects and Phenomena and Examples in Differential and Difference Equations, *Journal of Mathematics and System Science*, **4** (2014), 776–768.
- [3] Pankov P.S., Tagaeva S.B. Enlarged list of effects in mathematics and its applications, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR*, **1** (2025), 18–23.
- [4] Douglas G. *The Elements of Euclid*. Edinburgh (1776).
- [5] Cohen P.J. The independence of the continuum hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **50**(6) (1963), 1143–1148.

A definability property for isostone weak auto-free interpretations

M.G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

m.g.peretyatkin@mail.ru

We consider theories in first-order predicate logic with equality and use general concepts of model theory. A standard notion of an *interpretation* of a theory T_0 of signature σ_0 in the domain $\mathcal{U}(x)$ of another theory T_1 is used, cf. [1]. Any interpretation I has to satisfy the following requirements for all formulas φ of signature σ_0 : (a) $T_1 \vdash (\exists x)\mathcal{U}(x)$, (b) $T_0 \vdash \varphi \Rightarrow T_1 \vdash I(\varphi)$. Interpretation I is said to be *faithful* if $T_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow T_1 \vdash I(\varphi)$ for all formulas φ of signature σ_0 .

Let I be an interpretation of a theory T_0 of signature σ_0 in the domain $\mathcal{U}(x)$ of a theory T_1 , and $\mathfrak{M}$ be an arbitrary model of theory T_1 . By virtue of the interpretation I , it is possible to define all predicates, functions, and constants of signature σ_0 within the first-order definable set $\mathcal{U}(\mathfrak{M})$ obtaining a model $\mathfrak{N} = \langle \mathcal{U}(\mathfrak{M}), \sigma_0 \rangle$ that is said to be the *model kernel* of $\mathfrak{M}$ with respect to the interpretation I , using the notation $\mathfrak{N} = \mathbb{K}_I(\mathfrak{M})$, or a short notation $\mathfrak{N} = \mathbb{K}(\mathfrak{M})$, when the interpretation is clear from context.

An interpretation I of a theory T_0 in a theory T_1 is called *isostone* if I is faithful and $\mathbb{K}(\mathfrak{M}_0) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}_1) \Rightarrow \mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{M}_1$ for all models $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1 \in \text{Mod}(T_1)$. An interpretation I is called *auto-free*

if $(\forall \mathfrak{M} \in \text{Mod } T_1) (\forall \mu \in \text{Aut } \mathbb{K}(\mathfrak{M})) (\exists \mu^* \in \text{Aut } \mathfrak{M}) [\mu = \mu^* \upharpoonright \mathcal{U}(\mathfrak{M})]$. An interpretation I is called *weak auto-free* if $(\forall \mathfrak{M} \in \text{Mod } T_1) (\exists \mathfrak{M}' \text{ with } \mathcal{U}(\mathfrak{M}') = \mathcal{U}(\mathfrak{M}) \text{ and } (\mathfrak{M}' \preceq \mathfrak{M} \text{ or } \mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M})) (\forall \mu \in \text{Aut } \mathbb{K}(\mathfrak{M})) (\exists \mu^* \in \text{Aut } \mathfrak{M}') [\mu = \mu^* \upharpoonright \mathcal{U}(\mathfrak{M})]$. An interpretation I is said to be *definably free* if for any formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ of signature σ_1 satisfying $T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{U}(x_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{U}(x_n)$ there is a formula $\psi(x_1, \dots, x_n)$ of signature σ_0 such that $T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow I\psi(x_1, \dots, x_n)$.

We recall a known result [2] of technical character.

Theorem 1. *Let I be an isostone interpretation of a theory T_0 of signature σ_0 in the domain $\mathcal{U}(x)$ of a theory T_1 of signature σ_1 such that I is an auto-free interpretation. Then I is a definably free interpretation.*

As a main statement of this note, we present some generalization of Theorem 1.

Theorem 2. *Let I be an isostone weak auto-free interpretation of a theory T_0 of signature σ_0 in the domain $\mathcal{U}(x)$ of a theory T_1 of signature σ_1 . Then I is a definably free interpretation, that is, if $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ is a formula of signature σ_1 satisfying*

$$T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{U}(x_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{U}(x_n),$$

then there is a formula $\psi(x_1, \dots, x_n)$ of signature σ_0 such that

$$T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow I\psi(x_1, \dots, x_n).$$

The result given in Theorem 2 plays an important technical role in the direction of characterizing expressive power of first-order logic.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: first-order theory, interpretation, kernel-model of an interpretation, auto-free interpretation.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03D35.

References

- [1] Shoenfield J.R. Mathematical Logic. Addison-Wesley Pub. Co, 1967.
- [2] Peretyat'kin M.G. The property of being a model complete theory is preserved by Cartesian extensions. Siberian Electronic Mathematical Reports, 17 (2020), 959-971.

Modeling Tumor-Immune Dynamics: Synergistic Combination Treatment and the Role of Dynamic PD-L1 Regulation

B. PELL¹, A. KALIZHANOVA², A. TURSINKOZHA³, D. DENG⁴,
A. KASHKYNBAYEV⁵, Y. KUANG⁶

¹Lawrence Technological University, Southfield, USA

^{2,5}Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

³Astana IT University, Astana, Kazakhstan

⁴University of California, Berkeley, USA

⁶Arizona State University, Tempe, USA

aigerim.kalizhanova@nu.edu.kz

The efficacy of cancer immunotherapies, particularly immune checkpoint inhibitors (ICIs), is often hindered by adaptive immune resistance mediated by the PD-1/PD-L1 pathway. Combination therapies, such as pairing an ICI with a potent immunostimulant, represent a promising strategy to

overcome this challenge. Foundational models of single-agent and combination (Avelumab/NHS-muIL12) immunotherapies, while capturing key dynamics, fail to reproduce complex preclinical data like non-monotonic tumor responses.

The main focus of this talk is the introduction of a refined model that addresses this gap by treating PD-L1 expression as a dynamic variable. This variable accounts for basal production, activation by immunostimulants, and suppression by anti-PD-L1 drugs. We will show how this refined model, with a single set of parameters, successfully reproduces the experimental data across all six treatment arms including monotherapies and combinations. This approach provides a robust, mechanistic explanation for both dose-dependent treatment failure (driven by adaptive PD-L1 upregulation) and therapeutic synergy. We will discuss the systematic development of the model and simulation results, alongside a rigorous mathematical analysis of the generic and full models focusing on the existence, uniqueness, and local asymptotic stability of tumor-free and tumorous equilibria.

Funding:

Aigerim Kalizhanova, Aisha Tursynkozha and Ardak Kashkynbayev were funded in part by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR24993094).

Y.K. is supported by the U.S. NSF grant DMS-2325146 and DMS-2421258 and US NIH grant 1R01AI192873-01.

B.P. is supported by the U.S. NSF grant DMS-2421260 and DMS-2316809 and US NIH grant 1R01AI192873-01.

Keywords: cancer immunotherapy; differential equations; PD-L1; adaptive immune response; mathematical modeling; immunostimulant.

2020 Mathematics Subject Classification: 92C50, 92C60, 34D23, 34C60

Description of $G_k^{(2)}$ -periodic ground states for the four-state Potts-SOS model

M.M. RAHMATULLAEV¹, M.A. RASULOVA²

^{1,2}*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

¹mrahmatullaev@rambler.ru, ²m.rasulova_a@rambler.ru

In this work, we investigate the Potts-SOS model on the Cayley tree Γ^k of order $k \geq 2$, where the spin variable takes values in the discrete set $\Phi = \{0, 1, 2, 3\}$, and provide a complete characterization of all $G_k^{(2)}$ -periodic ground states corresponding to this model.

For $A \subseteq V$, a spin *configuration* σ_A on A is a function $\sigma_A : A \rightarrow \Phi$, $x \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$ for all $x \in A$. The set of all configurations on A is $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

The Potts-SOS model (see [3]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J_P \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_S \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (1)$$

where $J_P, J_S \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \Omega$.

Remark 1. In (1), setting $J_P = 0$ yields the SOS model [1], while setting $J_S = 0$ leads to the Potts model [2].

Let M be the set of all unit balls with vertices in V . The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} (J_P \delta_{\sigma(x)\sigma(c_b)} + J_S |\sigma(x) - \sigma(c_b)|). \quad (2)$$

where $J = (J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2$; σ_b is the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$; c_b denotes the center of the unit ball b .

The Hamiltonian (1) can be written as

$$H(\sigma) = \sum_{b \in M} U(\sigma_b).$$

Lemma 2. For each configuration φ_b , we have the following

$$U(\varphi_b) \in \{U_i : i = 1, 2, \dots, (k+1)^2\},$$

where

$$U_i = \begin{cases} -\frac{1}{2}(k+i)J_S, & \text{if } i = \overline{1, 2k+3}, \\ -\frac{1}{2}(J_P + (i-k-4)J_S), & \text{if } i = \overline{2k+4, 4k+4}, \\ -\frac{1}{2}(2J_P + (i-3k-6)J_S), & \text{if } i = \overline{4k+5, 6k+3}, \\ -\frac{1}{2}(3J_P + (i-5k-6)J_S), & \text{if } i = \overline{6k+4, 8k}, \\ \dots \\ -\frac{1}{2}((k-1)J_P + (i-k^2-4k+6)J_S), & \text{if } i = \overline{k^2+4k-4, k^2+4k}, \\ -\frac{1}{2}(kJ_P + (i-k^2-4k)J_S), & \text{if } i = \overline{k^2+4k+1, k^2+4k+3}, \\ -\frac{1}{2}(k+1)J_P, & \text{if } i = (k+2)^2. \end{cases}$$

Definition 3. A configuration φ is called a *ground state* for the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \min\{U_i : i = 1, 2, \dots, (k+2)^2\}$$

for any $b \in M$.

We denote $A_\xi = \{(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min\{U_i : i = 1, 2, \dots, (k+2)^2\}\}$.

Calculations show that:

$$A_1 = \{(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_P \leq J_S \leq 0\}; \quad A_{k+2} = \{(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_S = 0, J_P \leq 0\};$$

$$A_{2k+3} = \{(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_S \geq 0, 3J_S \geq J_P\}; \quad A_{(k+2)^2} = \{(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_S \leq J_P, 3J_S \leq J_P\}.$$

The following theorem describes all translation-invariant ground states for the four-state Potts-SOS model on the Cayley tree of arbitrary order.

Theorem 4. For the four-state Potts-SOS model on the Cayley tree Γ^k of order $k \geq 2$, the following assertions hold:

- (i) if $(J_P, J_S) \in A_{(k+2)^2}$, then the configurations $\sigma(x) = i$ for all $x \in V$, $i \in \Phi$, are translation-invariant ground states;
- (ii) if $(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_{(k+2)^2}$, then no translation-invariant ground state exists.

All $G_k^{(2)}$ -periodic configurations have the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} i, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ j, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \quad (3)$$

where $i, j \in \Phi$; $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| \text{ is even}\}$ (see [3]).

The following theorem describes all $G_k^{(2)}$ -periodic ground states for the four-state Potts-SOS model on the Cayley tree of arbitrary order.

Theorem 5. For the four-state Potts-SOS model on the Cayley tree Γ^k of order $k \geq 2$, the following assertions hold:

- (i) if $(J_P, J_S) \in A_1$, then the configurations (3) under the condition $|i - j| = 1$ are $G_k^{(2)}$ -periodic ground states;
- (ii) if $(J_P, J_S) \in A_{k+2}$, then the configurations (3) under the condition $|i - j| = 2$ are $G_k^{(2)}$ -periodic ground states;
- (iii) if $(J_P, J_S) \in A_{2k+3}$, then the configurations (3) under the condition $|i - j| = 3$ are $G_k^{(2)}$ -periodic ground states;
- (iv) if $(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 \setminus (A_1 \cup A_{2k+3})$, then all $G_k^{(2)}$ -periodic ground states are translation-invariant.

Keywords: Cayley tree, Potts-SOS model, configuration, ground state, translation-invariant ground state, $G_k^{(2)}$ -periodic ground states.

2020 Mathematics Subject Classification: 82B20, 82B26, 60K35

References

- [1] Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, Singapore (2013).
- [2] Rozikov U.A. *Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model*, World Scientific, Singapore (2023).
- [3] Ganikhodzhaev N.N. Group representation and automorphisms of the Cayley tree, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan*, **4** (1994), 3–5.
- [4] Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A. Ground states and Gibbs measures for the Potts-SOS Model with an external field on the Cayley tree, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:1 (2024), 518–531.

Periodic ground states for the Ising-SOS model

M.M. RAHMATULLAEV¹, D.I. USMONALIYEV²

¹V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

²Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

¹mrahmatullaev@rambler.ru, ²usmonaliyevdiyorbek085@gmail.com

In this work, we investigate the Ising-SOS model on the Cayley tree of order two, where the spin variable takes values in the set $\Phi = \{-1, 0, 1\}$, and study periodic ground states corresponding to this model.

For $A \subseteq V$, a spin configuration σ_A on A is a function $\sigma_A : A \rightarrow \Phi$, $x \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$ for all $x \in A$. The set of all configurations on A is $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

The Ising-SOS model is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J_I \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - J_S \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (1)$$

where $J_I, J_S \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \Omega$.

Remark 1. In (1), setting $J_I = 0$ yields the SOS model [1], while setting $J_S = 0$ leads to the Ising model [2].

Let M be the set of all unit balls with vertices in V . The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} \sum_{\langle x, y \rangle : x, y \in b} (J_I \sigma(x)\sigma(y) + J_S |\sigma(x) - \sigma(y)|), \quad (2)$$

where $J = (J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2$; σ_b is the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$; c_b is the center of the unit ball b .

The Hamiltonian (1) can be written as

$$H(\sigma) = \sum_{b \in M} U(\sigma_b).$$

For each configuration φ_b , we have the following

$$U(\varphi_b) \in \{U_i : i = 1, 2, \dots, 10\},$$

where $U_1 = -\frac{3}{2}J_I; U_2 = -\frac{1}{2}J_I - J_S; U_3 = \frac{3}{2}J_I - 3J_S; U_4 = \frac{1}{2}J_I - 2J_S; U_5 = -\frac{3}{2}J_S; U_6 = J_I - \frac{5}{2}J_S; U_7 = -J_S; U_8 = -\frac{1}{2}J_S; U_9 = 0; U_{10} = -J_I - \frac{1}{2}J_S$.

Definition 3. A configuration φ is called a *ground state* for the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \min\{U_i : i = 1, 2, \dots, 10\}$$

for any $b \in M$.

We denote $A_\xi = \{(J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min\{U_i : i = 1, 2, \dots, 10\}\}$.

Calculations show that:

$$A_1 = \{(J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_I \geq 0, J_S \leq J_I\}; A_2 = A_5 = A_6 = A_{10} = \{(J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_I = J_S, J_S \geq 0\};$$

$$A_3 = \{(J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_S \geq J_I, 2J_S \geq J_I\}; A_4 = A_7 = A_8 = \{(J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_I = 0, J_S = 0\};$$

$$A_9 = \{(J_I, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_I \leq 0, 2J_S \leq J_I\}.$$

All H_A -periodic configurations have the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} i, & \text{if } x \in H_A, \\ j, & \text{if } x \in G_2 \setminus H_A, \end{cases} \quad (3)$$

where $i, j \in \Phi; H_A = \{x \in G_2 : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{even}\}$ (see [3]).

The following theorem describes all translation-invariant, $G_2^{(2)}$ -periodic and H_A -periodic ground states for the Ising-SOS model on the Cayley tree of order two.

Theorem 4. For the Ising-SOS model on the Cayley tree of order two, the following assertions hold:

(i) if $(J_I, J_S) \in A_1$, then the configurations $\varphi(x) = 1$ and $\varphi(x) = -1$ for all $x \in V$ are translation-invariant ground states;

(ii) if $(J_I, J_S) \in A_9$, then the configuration $\varphi(x) = 0$ for all $x \in V$ is translation-invariant ground state;

(iii) if $(J_I, J_S) \in A_2$, then the configurations

$$\varphi(x) = \begin{cases} i, & \text{if } x \in H_A, \\ j, & \text{if } x \in G_2 \setminus H_A, i \neq j, i, j \in \Phi \setminus 0, |A| = 1 \end{cases} \quad (4)$$

are H_A -periodic ground states;

(iv) if $(J_I, J_S) \in A_3$, then the configurations

$$\varphi(x) = \pm \begin{cases} 1, & \text{if } x \in G_2^{(2)}, \\ -1, & \text{if } x \in G_2 \setminus G_2^{(2)} \end{cases} \quad (5)$$

are $G_2^{(2)}$ -periodic ground states;

(v) if $(J_I, J_S) \in A_5$, then the configurations

$$\varphi(x) = \pm \begin{cases} 0, & \text{if } x \in G_2^{(2)}, \\ 1, & \text{if } x \in G_2 \setminus G_2^{(2)} \end{cases} \quad (6)$$

are $G_2^{(2)}$ -periodic ground states.

Keywords: Cayley tree, Ising-SOS model, configuration, ground state, translation-invariant ground state, $G_2^{(2)}$ -periodic ground state, H_A -periodic ground state.

2020 Mathematics Subject Classification: 82B20, 82B26, 60K35

References

- [1] Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, Singapore (2013).
- [2] Rozikov U.A. A Constructive description of ground states and Gibbs measures for Ising model with two-step interactions on Cayley tree, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 122, No. 2 (2006), 217–235.
- [3] Ganikhodzhaev N.N. Group representation and automorphisms of the Cayley tree, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan*, 4 (1994), 3–5.

Application Markov branching process to the Solution of Nonlinear Kinetic Boltzmann Equation

A.S. RASULOV¹, G.M. RAIMOVA²

^{1,2}*University of World Economy and Diplomacy, Mustaqillik avenue 54, Tashkent
100077, Uzbekistan
asrasulov@gmail.com*

Problems in gas dynamics could serve as typical examples requiring the use of modern multi-processor computers. In particular, solving the multidimensional Boltzmann equation necessitates such computational power. The complex nature of the equation's kernel and its dependence on many variables have made the Monte Carlo method essential. This method, as is well known, is especially suitable for multiprocessor systems and allows for natural parallelization.

In this paper examines and proposes statistical algorithms for solving the nonlinear integral Boltzmann equation in measures, which describes the physical processes of particle collisions and coalescence. The equations under consideration represent one of the integral forms of the kinetic equations for the dynamics of a rarefied gas.

In constructing unbiased estimators for the solution of the kinetic equation of rarefied gas dynamics, Markov processes with the simplest interactions are used. The well-known relationship between nonlinear integral equations and branching Markov processes is also utilized — these relationships are thoroughly described in works [1,2].

The proposed computational scheme in this paper is an analogue of the adjoint scheme used in the linear case. The scheme is examined in detail for the case of inelastic molecules. To describe the scheme conveniently, it is useful to transition from the equation in measures to the equation in densities. A new computational scheme is considered and efficiencies compared. The developed numerical algorithm were tested on the shock wave structure problem [3,4].

Keywords: Monte carlo method, unbiased estimators, branching Markov processes, nonlinear Boltzmann equation, rarefied gas.

2020 Mathematics Subject Classification: 65C05, 82M31

References

- [1] Ermakov S. M. ,Nekrutkin V. V. , SipinV. S. , *Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics* (Kluwer Academic Publishers, London, 1989).
- [2] Nekrutkin V. V. , U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **14**(6), 39–45 (1974).
- [3] RasulovA. S. , Mascagn M. i, and Raimova M. , *Monte Carlo Methods for Solution of Linear and Nonlinear Boundary Value Problems* (UWED Publishers, Tashkent, 2006).
- [4] Rasulov A. S., Raimova G., in D. Vlachos and D. Thomakos (eds.), *Mathematical Modeling in Physical Sciences*, Springer Proc. Math. Stat. **514**, 235–245 (2026).

Local behavior of geodesics of meromorphic connections around the poles of order two

M.K. RASULOVA¹, M.A KHALILOVA²

^{1,2}National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

¹maftunakomiljonovnaa@gmail.com, ²xalilovamunisxon@gmail.com

Meromorphic connections provide a convenient framework for studying the dynamics of geodesics and the local geometry near poles on Riemann surfaces. In this work, we describe the behavior of geodesics via local representations and residues, and discuss approximating connections on $\mathbb{P}^1$ with real residues by ones with rational residues.

Definition 1. A meromorphic connection on the tangent bundle TS of a Riemann surface S is a $\mathbb{C}$ -linear map

$$\nabla : \mathcal{M}_{TS} \rightarrow \mathcal{M}_S^1 \otimes \mathcal{M}_{TS}$$

satisfying the Leibniz rule

$$\nabla(\tilde{f}\tilde{s}) = d\tilde{f} \otimes \tilde{s} + \tilde{f}\nabla\tilde{s}$$

for all $\tilde{s} \in \mathcal{M}_{TS}$ and $\tilde{f} \in \mathcal{M}_S$, where $\mathcal{M}_{TS}$ denotes the sheaf of germs of meromorphic sections of TS , while $\mathcal{M}_S$ is the sheaf of germs of meromorphic functions and $\mathcal{M}_S^1$ is the sheaf of meromorphic 1-forms on S .

Let (U_α, z_α) be a local chart for S , and ∇ a meromorphic connection on S . Then there exists $\eta_\alpha \in \mathcal{M}_S^1(U_\alpha)$, such that

$$\nabla(\partial_\alpha) = \eta_\alpha \otimes \partial_\alpha,$$

where $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ is the induced local generator of TS over U_α . We have

$$\eta_\beta = \eta_\alpha + \frac{1}{\xi_{\alpha\beta}} d\xi_{\alpha\beta}$$

on $U_\alpha \cap U_\beta$, where $\xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}$. In particular, if every representation is holomorphic then ∇ is a holomorphic connection. We say $p \in S$ is a pole for a meromorphic connection ∇ if p is a pole of η_α for some (and hence any) local chart U_α at p . If Σ is the set of poles of ∇ , then ∇ is a holomorphic connection on $S^0 = S \setminus \Sigma$. So we can define a notion of geodesic for ∇ on S^0 as in holomorphic connection.

Definition 2. The residue $\text{Res}_p \nabla$ of a meromorphic connection ∇ at a point $p \in S$ is the residue of any 1-form η_α representing ∇ on a local chart (U_α, z_α) at p . The set of all residues of ∇ is denoted by $\text{Res} \nabla := \{\text{Res}_p \nabla : p \in S\} \setminus \{0\}$.

Our main result is the following.

Proposition. Let ∇ be a meromorphic connection on a Riemann surface S . Let $p_0 \in S$ be a pole of order two with residue $\rho = \text{Res}_{p_0} \nabla \in \mathbb{C}$. Assume that in a neighborhood of p_0 the connection ∇ has the local form

$$\eta = \left(f(z) + \frac{\rho}{z} + \frac{a}{z^2} \right) dz,$$

where f is holomorphic near p_0 .

Then there exists a chart (U, w) centered at p_0 such that the local representation of ∇ on U is of the form

$$\eta = \left(\frac{\rho}{w} + \frac{a}{w^2} \right) dw.$$

where $a \in \mathbb{C}$. is a complex parameter.

Funding: This work is supported by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan, State Grant No. FL-9524115114

Keywords: meromorphic connections, Riemann surfaces, tangent bundle, geodesics.

Mathematics Subject Classification: 32H50 · 34M03 · 34M40 · 37F99

References

- [1] Abate M. Tovena F. *Poincaré–Bendixson theorems for meromorphic connections and homogeneous vector fields*, Math. Z. (2016) 282(1), 247–272
- [2] Abate M. Rakhimov K.X. *Dynamics of Fuchsian meromorphic connections with real periods*, Preprint, (2024)
- [3] Abate M. Tovena F. The title of the article in the book, in: *Poincaré–Bendixson theorems for meromorphic connections and homogeneous vector fields*, Journal of Differential Equations , 251, 2612–2684 (2011).
- [4] Rakhimov K.X. The title of the article in the book, in: *Flat structure of meromorphic connections on Riemann surfaces*, The Journal of Geometric Analysis , (2020).
- [5] Shapiro B. Tahar G. On existence of quasi-Strebel structures for meromorphic k -differentials, *L'Enseignement Mathématique*, (2021), 187–207 .

Solution of a Sturm-type boundary value problem for a fractional parabolic equation with a discontinuous coefficient

M.A. SADYBEKOV¹, U.K. KOILYSHOV², K.A. BEISENBAYEVA³

^{1,2}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*Academy of Logistics and Transport, Almaty, Kazakhstan*

¹sadybekov@math.kz, ²koylyshov@math.kz, ³beisenbaeva56@mail.ru

An initial-boundary value problem for the heat equation with a piecewise constant coefficient and with a fractional time derivative is considered

$$Lu \equiv \begin{cases} t^{-\beta} D_t^\alpha u(x, t) - a_1^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < x_0, \\ t^{-\beta} D_t^\alpha u(x, t) - a_2^2 u_{xx}(x, t), & x_0 < x < l \end{cases} = 0 \quad (1)$$

in the domain $\Omega = \cup \Omega_i$, $\Omega_1 = \{(x, t): 0 < x < x_0, 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x, t): x_0 < x < l, 0 < t < T\}$ ($i=1,2$) with initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

boundary conditions

$$\begin{cases} a_{11}u_x(0, t) + a_{12}u(0, t) = 0, \\ a_{21}u_x(l, t) + a_{22}u(l, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

and conjugation conditions

$$\begin{cases} u(x_0 - 0, t) = u(x_0 + 0, t), \\ k_1 u_x(x_0 - 0, t) = k_2 u_x(x_0 + 0, t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

for $\alpha \in (m - 1, m]$, $m = 1, 2, \dots$, the following expression

$${}_H C D_{0t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{m-\alpha-1} \delta^m f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

is called the Hadamard-Caputo differentiation operator of the order $\alpha > 0$, where $\delta = t \frac{d}{dt}$ and $\delta^k = \delta \cdot \delta^{k-1}$, $k \geq 1$.

We will consider the case $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0$. For the case $\alpha = 1, \beta = 1$, we get

$${}_{HC}D_{0t}^{\alpha}u(x, t) = t^{-1} \left(t \frac{d}{dt} \right) u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

and equation (1) coincides with the classical heat equation.

The theorem of existence and uniqueness of the solution to problem (1)-(4) has been proven.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: Heat equation, discontinuous coefficients, eigenvalues, eigenfunctions, method of separation of variables, fractional derivatives.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20, 35P10

The Oscillatory of one class of the High-Order Sturm-Liouville difference equation

D.S. SARSENALY¹, A.M. TEMIRKHANOVA²

^{1,2}*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

¹*Astana IT University, Astana, Kazakhstan*

¹dinara.sarsenali@mail.ru, ²ainura-t@yandex.kz

In this work, we consider the problem of oscillatory of the higher-order Sturm-Liouville difference equation

$$(-1)^n \Delta^n (\rho_k \Delta^n y_k) - v_k y_{k+n} = 0, \quad (1)$$

where $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $\rho = \{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a sequence of positive numbers, $v = \{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a sequence of non-negative numbers, and $\mathbb{N}$ is a set of natural numbers.

The oscillatory properties of the equation (1) are determined by the behavior of its solutions in a neighborhood of infinity. However, ultimately, the behavior of these solutions depends on the behavior of the equation coefficients. Thus, the determination of the oscillatory properties of equation (1) in terms of the coefficients ρ, v is important. We work directly with the variation principle. We establish conditions equivalent to the fulfillment of the variational principle, on the basis of which the oscillatory conditions of equation (1) are determined.

Our main results reads as follows:

Let

$$B_n(N) = \max_{0 \leq t \leq n-1} \left(\frac{1}{t!(n-t-1)!} \right)^2 \sup_{i \geq N} B_{n,i}(t),$$

$$B_{n,i}(t) = \sum_{k=i}^{\infty} \left[(k-i)^{(t)} \right]^2 u_k \sum_{j=N}^i \rho_j^{-1} \left[(i-j)^{(n-t-1)} \right]^2.$$

Theorem 1. *If*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} B_n(N) > 1, \quad (2)$$

then the equation (1) is oscillatory.

Theorem 2. *Let there exist $t \in [0, n-1]$ such that*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{\infty} u_k \left[(k-N)^{(t)} \right]^2 \sum_{j=1}^N \rho_j^{-1} \left[(N-j)^{(n-t-1)} \right]^2 > (t!(n-t-1)!)^2. \quad (3)$$

Then, the equation (1) is oscillatory.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26100779).

Keywords: Sturm-Liouville difference equation, discrete Sobolev space, oscillatory, variational principle.

2020 Mathematics Subject Classification: 34C10, 39A70, 26D15

On the Functional Properties of the α -Subharmonic Measure $\omega_\alpha^*(z, K, D)$

D.S. SALAEVA¹, K.K. KULDOSHEV²

^{1,2}National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

¹rafaelsanti476@gmail.com, ²qobilojnmath@gmail.com

This work studies the harmonicity, continuity and Hölder continuity properties of the α -subharmonic measure in bounded domains of $\mathbb{C}^n$. We prove that the α -subharmonic measure is α -harmonic outside the compact set and investigate conditions ensuring its continuity properties.

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain, and let α be a closed and strictly positive differential form of degree $(n-1, n-1)$ in D ,

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k],$$

where $\alpha_{jk} \in C^1(D)$,

$$dz[j] = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

$$d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n.$$

Definition 1. (see, for example, [1],[3],[4]) A function $u \in L_{loc}^1(D)$ is called α -subharmonic in D if it is strongly upper semicontinuous in D and the current $dd^c u \wedge \alpha$ is positive, i.e., for any positive test function ω in D , we have

$$\int u \alpha \wedge dd^c \omega \geq 0.$$

The class of α -subharmonic functions in D is denoted by $\alpha\text{-sh}(D)$. For convenience, the function $u(z) \equiv -\infty$ is also included in this class.

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded domain, and let E be any subset of D . We denote by $\mathcal{U}(E, D)$ the class of all functions $u \in \alpha\text{-sh}(D)$ such that

$$u|_E \leq -1, \quad u|_D < 0$$

and define the function $\omega_\alpha(z, E, D) = \sup \{u(z) : u \in \mathcal{U}(E, D)\}$.

Definition 2. The upper regularization

$$\omega_\alpha^*(z, E, D) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} \omega_\alpha(w, E, D)$$

is called α -subharmonic measure ($\mathcal{P}_\alpha$ -measure) of the set E with respect to D (see [2]).

By definition, the function $\omega_\alpha^*(z, E, D)$ is α -subharmonic in D (see [1]). Moreover, the α -subharmonic measure has the monotonicity properties with respect to sets (see [2]).

Proposition 3. The following properties hold:

1) if a function $u \in \alpha\text{-sh}(D)$ satisfies the conditions $u|_D \leq R$, $u|_E \leq r$, where $r < R$, $E \subset D$, then the following inequality holds:

$$u(z) \leq R(1 + \omega_\alpha^*(z, E, D)) - r\omega_\alpha^*(z, E, D), \quad \forall z \in D;$$

2) if $E \subset\subset D$, then $\lim_{z \rightarrow \partial D} \omega_\alpha^*(z, E, D) = 0$;

3) if $E \subset\subset D_1$ and $D_j \subset D_{j+1}$, $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$, then $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_\alpha^*(z, E, D_j) = \omega_\alpha^*(z, E, D)$.

Let's assume that $K \subset D$ is a compact set.

Definition 4. The point $z^0 \in K$ is called α -regular with respect to D , if $\omega_\alpha^*(z^0, K, D) = -1$. If all points of a compact set K are α -regular, then the compact set K is called an α -regular compact.

We have the following theorems describing the functional properties of the α -subharmonic measure $\omega_\alpha^*(z, K, D)$.

Theorem 5. 1) The α -subharmonic measure $\omega_\alpha^*(z, K, D)$ is α -harmonic in $D \setminus K$;
2) if K is an α -regular compact, then the function $\omega_\alpha^*(z, K, D)$ is continuous in D .

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a strongly α -regular domain, i.e., $D = \{z \in D^+ : \rho(z) < 0\}$, where $\rho \in \alpha\text{-sh}(D^+) \cap C^2(D^+)$ and $D \Subset D^+$. Let K be a compact subset of D .

Theorem 6. Assume that there exist constants $C > 0$ and $0 < \lambda \leq 1$ such that, for all $z \in D$, the inequality $\omega_\alpha^*(z, K, D) + 1 \leq C (\text{dist}(z, K))^\lambda$ holds. Then $\omega_\alpha^*(z, K, D)$ is Hölder continuous in D .

Funding: This research is funded by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan (Grant No. FL-9524115114).

Keywords: α -subharmonic function, α -regular compact, α -subharmonic measure, Hölder continuity.

2020 Mathematics Subject Classification: 31B05, 31B10, 31B15.

References

- [1] B. Abdullaev, S. Imomkulov, R. Sharipov, α -subharmonic functions, *Contemporary Mathematics. Fundamental directions*, 2021, vol. 4, 620–633.
- [2] R. Sharipov, P -measure and P -capacity in the class of α -subharmonic functions, *Lectures of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan* 2019, vol. 3, 11–15.
- [3] A. Sadullaev, *Pluripotential theory // Applications*. Palmarium Academic Publishing, 2012.
- [4] Abdullaev B.I, Sharipov R.A. Local and global α -polar sets, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2019, vol. 5, 4–8.

Some lower bounds for the first eigenvalue of the fractional laplacian

M.M. SLYAMKHAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan.

meirbek.slyamkhan@nu.edu.kz

We establish new geometric lower bounds for the first eigenvalue of the fractional Laplacian $\mathfrak{L}_\Omega^s$ on bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ with $0 < s < 1$. By adapting the ball covering technique of Frank and Larson [1] to the fractional setting, we prove a lower estimate:

$$\lambda_{1,s}(\Omega) \geq \frac{C'_s}{A_{d,s} \rho^{2s}} \left(1 - \sup_{x \in \Omega} \frac{|\Omega \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \right),$$

where C'_s is sharp constant of fractional Hardy inequality, $A_{d,s}$ is explicit constant depending only on d and s , and $B_\rho(x)$ is the ball of radius ρ centered at x . Further we derive a packing estimate that relates the eigenvalue counting function $N(\lambda, \mathfrak{L}_\Omega^s)$ to a family of disjoint balls with high relative density: for any $\theta \in (0, 1]$ there exist constants $c_1, c_2 > 0$ such that one can find $M \geq c_2 N(\lambda, \mathfrak{L}_\Omega^s)$ disjoint balls of radius $c_1 \lambda^{-1/(2s)}$ satisfying $|\Omega \cap B_\rho^{(m)}| \geq (1 - \theta) |B_\rho^{(m)}|$ for each ball. The proofs combine fractional Hardy inequalities, Lieb–Thirring inequalities, and a fractional version of Davies's covering lemma. This presentation is based on our joint ongoing work with Durvudkhan Suragan.

Keywords: fractional Laplacian, eigenvalue bounds, Hardy inequality, Hardy-Lieb-Thirring inequality.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K08, 34L05, 35P05

References

[1] Frank, Rupert L and Larson, Simon Two consequences of Davies's Hardy inequality, *Functional Analysis and Its Applications*, **55:2** (2021), 174–177.

Cauchy problem for the time-fractional Korteweg-de Vries equation

Z.A. SOBIROV¹, R.B. NORKULOVA²

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

^{1,2}V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

¹sobirovzar@gmail.com, ²norkulovarushana1988@gmail.com

The Korteweg-de Vries (KdV) equation has been used to describe a wide range of physics phenomena as a model for the evolution and interaction of nonlinear waves. It was first derived as an evolution equation that governing a one dimensional, small amplitude, long surface gravity waves propagating in a shallow channel of water [3]. The equation is also used, to model the unidirectional propagation of small amplitude long waves in nonlinear dispersive systems such as the ion acoustic waves in a collisionless plasma and the magneto sonic waves in a magnetized plasma. For example, in optical and plasma physics, the fractional-order parameter ($\beta = 1$) acts as a tuning knob for soliton characteristics. Lowering the fractional order from $\beta = 1$ (classical) typically increases the soliton's width, reduces its amplitude, and leads to slower propagation velocities.

We define the set of continuous functions $SC(T) = C([0, T]; S(\mathbb{R}))$, where $S(\mathbb{R})$ is the Schwartz space of rapidly decreasing functions in the variable x . Following to [4], we introduce the topological space $SC_\beta(T) = \{u \in SC(T) : \partial_{0t}^\beta u \in SC(T)\}$, where convergence is defined by the seminorms:

$$|||u|||_{m,j}^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \partial_{0t}^{\beta j} u(x, t) \right|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^s \left| \partial_{0t}^{\beta j} u(x, t) \right|^2 dx \right], \quad (1)$$

where m is natural number, $s \in N \cup \{0\}$, $j = 0, 1$.

We investigate the Cauchy problem for a nonlinear time-fractional Korteweg-de Vries (KdV) equation involving the Caputo derivative

$$\partial_{0t}^\beta u = u_{xxx} + uu_x + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

with initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where $0 < \beta < 1$.

The initial condition is assumed to satisfy $u_0(x) \in S(\mathbb{R})$ and the source term fulfills $f(t, x) \in SC(T)$, and

$$\partial_{0t}^\beta u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{u'(x, \tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau, \quad 0 < \beta < 1$$

is the Caputo fractional derivative [2].

Using the Fourier transform method and properties of the Caputo fractional derivative, we obtain an explicit integral representation of the solution of the corresponding linear equation in terms of Mittag-Leffler functions [1]. Using a regularization and iterative method, we construct approximation for the solution to the Cauchy problem for nonlinear KdV equation. Using a-priori

estimates with respect to the infinite number of semi-norms (1), we prove the existence of the solution. Using energy estimates, we show the uniqueness of the solution. These results highlight the effect of fractional time derivatives in nonlinear dispersive waves.

Keywords: Time-fractional Korteweg-de Vries equation; Caputo fractional derivative; nonlinear dispersive equations; existence and uniqueness.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q53, 35K25

References

- [1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam (2006).
- [2] Dzherbashian M. *Integral Transforms and Representation of Functions in the Complex Domain*, Nauka, Moscow (1966). [In Russian]
- [3] El-Wakil S.A., Abulwafa E.M., Zahran M.A., Mahmoud A.A. Time-fractional KdV equation: formulation and solution using variational methods, *Nonlinear Dynamics* (2010).
- [4] Yakupov V.M. On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation, *Differential Equations*, **11**:3 (1975), 556–561. [In Russian]

Initial-boundary value problem for the space-time fractional diffusion equation with edge-dependent spatial fractional order on metric graphs

Z. A. SOBIROV¹, R. Ch. KULAEV², A. A. TUREMURATOVA³

¹*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent*

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

²*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center*

²*North Ossetian State University after K.L. Khetagurov*

³*Tashkent Branch of the Russian Economic University named after G. V. Plekhanov, Uzbekistan*

¹z.sobirov@nuu.uz, ²kulaevrch@mail.ru, ³ariuxanturemuratova@gmail.com

A metric graph $\mathcal{G}$ consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_j\}_{j=1}^i$ and a set of edges $E = \{e_j\}_{j=1}^n$, each edge e_j assigned a positive length $l_j > 0$. Each edge is parametrized by a coordinate $x_j \in (0, l_j)$. A vertex ν is incident to edge e_j if it is one of its endpoints (denoted $e_j \sim \nu$). The valency of a vertex is the number of incident edges. Boundary vertices are vertices of valency 1. Their set is denoted $\partial\mathcal{G} \subset V$ (assumed non-empty in this work). The graph is assumed to be connected. For a function $y : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ we use the notations: $y|_{e_j} = y^{(j)}$ — restriction to edge e_j , $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$, $y_x = \left(\frac{\partial y^{(1)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x_n}\right)$, $\int_{\mathcal{G}} y d\mathcal{G} = \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} y^{(j)}(x) dx$, $yz = (y^{(1)}z^{(1)}, \dots, y^{(n)}z^{(n)})$.

We denote by $C[\mathcal{G}]$ the space of functions defined on the graph $\mathcal{G}$ that are uniformly continuous on each edge. The space $C(\mathcal{G})$ consists of all functions $y : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ that are continuous on the entire graph. We establish the following fractional diffusion equation posed on a metric graph $\mathcal{G}$

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u^{(j)}(x, t) + \mathcal{L}u^{(j)} = f^{(j)}(x, t), \quad x \in e_j, \quad t \in (0, T], \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

where $\partial_{0,t}^{\alpha}$ is the generalized left Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0, 1)$, $f^{(j)}(x, t)$ are given functions. The spatial operator $\mathcal{L}$ is given by

$$\mathcal{L}u^{(j)} = \partial_{x,l_j}^{\beta_j} \left(p^{(j)}(x) D_{0,x}^{\beta_j} u^{(j)}(x, t) \right), \quad (2)$$

with coefficient $p \in C[\mathcal{G}]$ satisfying $0 < a_0 \leq p^{(j)}(x) \leq a_1 < +\infty$, where $D_{0,x}^{\beta}$ and ∂_{x,l_j}^{β} , $j = \overline{1, n}$ denote the left Riemann-Liouville and the right Caputo fractional derivative of order $\beta_j \in (\frac{1}{2}, 1)$

with respect to x , respectively. We search the solution $u(x, t)$ in the domain $G_T = \mathcal{G} \times (0, T]$, subject to the following initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{G}, \quad (3)$$

the vertex conditions

$$\begin{cases} I_{0,x}^{1-\beta} u(x, t) \text{ is continuous in } G_T, \\ \sum_{e_j \sim \nu} \sigma_{e_j, \nu} p^{(j)}(\nu) D_{0,x}^{\beta_j} u^{(j)}(\nu, t) = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial \mathcal{G}, \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (4)$$

where $\sigma_{e_j, \nu} = 1$ if ν is the right end of the edge e_j , $\sigma_{e_j, \nu} = -1$ if ν is the left end of the edge e_j , and Dirichlet conditions

$$I_{0,x}^{1-\beta} u(\nu, t) = 0, \quad \nu \in \partial \mathcal{G}, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

where $\varphi(x)$ is known function, $I_{0,x}^{1-\beta} u = (I_{0,x}^{1-\beta_1} u^{(1)}, \dots, I_{0,x}^{1-\beta_n} u^{(n)})$.

In this study, we suppose that the fractional derivatives of the space variable can be different at different edges of the graph. Such a mathematical problem is important in modelling anomalous diffusion processes in branched structures with different diffusion properties in each of the branches.

During the proof of the unique solvability, we consider the eigenvalue problem for the corresponding fractional Sturm-Liouville operator and prove the completeness property of the system of eigenfunctions. The solution of the problem is constructed in the form of a convergent Fourier series.

Funding: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Grant No. 075-02-2026-1324).

Keywords: initial-boundary value problem, edge-dependent order of the space-time fractional derivative, eigenvalue, eigenfunction, metric graph.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A08, 34B45, 45C05

References

- [1] Idczak D., Walczak S. Fractional Sobolev space via Riemann-Liouville derivatives, *J. Funct Spaces Appl.*, (2013).
- [2] Ashurov R.R., Sobirov Z.A., Turemuratova A.A. Inverse source problem for the space-time fractional parabolic equation on a metric star graph with an integral overdetermination condition. *Mathematical notes*, **116**:5 (2024), 892–904.
- [3] Turemuratova A. A., Kulaev R. Ch., Sobirov Z. A. Fractional Sturm-Liouville problem on metric graphs, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **46**:11 (2025), 5682–5693.

Analytical representation of the electric field in the problem of electron plasma dynamics with an arbitrary degree of degeneracy

S.Sh. SULEIMANOVA

Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan

suleymanova.sevda.sh@gmail.com

The main result of this work is the analytical representation of the electric field near the plasma surface with an arbitrary degree of electron gas degeneracy in a half-space with diffuse boundary conditions of a linearized boundary value problem [1, 4].

A half-space ($x > 0$) filled with electron plasma is considered. An external alternating field excites longitudinal oscillations.

The dynamics are described using the Vlasov–Boltzmann tau-model equation and the Poisson equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu(f_{eq} - f),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int (f - f_0) d\Omega_F, \quad d\Omega_F = \frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

where f is the electron distribution function, f_{eq} is the local equilibrium Fermi-Dirac distribution function, $f_0 = f_{FD}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ is the electron momentum, e and m are the electron charge and effective mass, $\hbar$ is Planck's constant, ν is the effective collision frequency, s is the particle spin (for an electron $s = \frac{1}{2}$), and $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ is the electric field inside the plasma. The equilibrium state is specified by the Fermi-Dirac distribution, which allows an arbitrary degree of degeneracy of the electron gas.

In the process of spectral analysis, after separation of variables, the dispersion function $\Lambda(z)$ is introduced, which has the structural form

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{1}{w_0} - \frac{z^2 - \eta_1^2}{w_0 \eta_1^2} \lambda_0(z, \alpha),$$

$$\lambda_0(z, \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - z}.$$

The constants w_0 , η_1^2 and the function $k(\eta, \alpha)$ have the form

$$f_0(\eta, \alpha) = (1 + \exp(\eta^2 - \alpha))^{-1}, \quad k(\eta, \alpha) = \frac{f_0(\eta, \alpha)}{2s_0(\alpha)},$$

$$s_0(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_0(t, \alpha) dt, \quad s_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^2 f_0(t, \alpha) dt,$$

$$w_0 = 1 - i \frac{\omega}{\nu}, \quad \eta_1^2 = w_0 \frac{\nu^2}{\omega_p^2} \frac{s_2(\alpha)}{s_0(\alpha)}.$$

The zeros of the dispersion function $\Lambda(z)$ determine the discrete spectrum of the problem, while the continuous spectrum is constructed in the class of generalized functions [1-4]. As a result, the existence regions are established:

- Drude and Debye modes (discrete spectrum),
- Van Kampen modes (continuous spectrum).

Based on the determined eigenfunctions, the electric field is represented as the sum of the contributions of the discrete and continuous spectra:

$$e(x) = e_d(x) + e_c(x),$$

where $e_d(x)$ corresponds to the discrete spectrum, and $e_c(x)$ to the continuous spectrum,

$$e_d(x) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty} + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty} \left(\frac{\eta_1}{\eta_0^2 - \eta_1^2} + \alpha^- \right) \frac{1}{X(\eta_0)(\eta_1 \alpha^+ - \eta_0 \alpha^-)} \exp \left(-\frac{w_0 x}{\eta_0} \right),$$

$$e_c(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\eta_1 + \alpha^- (\eta_0^2 - \eta_1^2)}{(\eta_1 \alpha^+ - \eta_0 \alpha^-)(\eta - \eta_0)} \right) \left(\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right) \exp \left(-\frac{w_0 x}{\eta_0} \right) \frac{d\eta}{\eta^2 - \eta_1^2},$$

where

$$\alpha^{\pm} = \frac{X^{+}(\eta) \pm X^{-}(\eta)}{2}.$$

Thus, a complete analytical representation of the electric field has been obtained in the form of a superposition of modes from the discrete and continuous spectra. Based on the derived representation, an explicit formula for the surface energy absorption has been obtained. It is shown that the contribution to absorption is formed both by discrete modes (Drude and Debye) and by the continuous spectrum (Van Kampen modes), and that the structure of absorption depends essentially on the degree of electron gas degeneracy. On the basis of the obtained representation, an explicit formula for the surface energy absorption has also been derived. It is demonstrated that the contribution to absorption is formed both by isolated eigenvalues of the dispersion equation and by the continuous spectrum [1].

The obtained results generalize the previously known solutions for non-degenerate and fully degenerate plasma and allow the investigation of transitional regimes for an arbitrary degeneracy parameter.

Funding: No funding was received for conducting this study.

Keywords: diffusion equation, homogeneous body, initial state, local inhomogeneity, transparent boundary conditions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q83, 35P10

References

- [1] Suleimanova S.Sh., Yushkanov A.A. Surface energy dissipation of an ac electric field in a semiinfinite electron–plasma, *Results in Physics*, **19**:103436 (2020), 1–2.
- [2] Suleimanova S.Sh., Yushkanov A.A. Electric Field Near the Surface of a Plasma with an Arbitrary Degree of Degeneracy as a Response to an External Alternating Electric Field, *Theoretical and Mathematical Physics*, **204**:1 (2020), 901–917.
- [3] Suleimanova S.Sh., Yushkanov A.A. Dissipation of Energy of an AC Electric Field in a Semi-Infinite Electron Plasma with Mirror Boundary Conditions, *Plasma Physics Reports*, **44**:10 (2018), 947–957.

On Geometric Lower Bounds for the Polyharmonic Dirichlet Spectrum

D. SURAGAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

We consider a new lower bound for the smallest eigenvalue $\lambda_{\Omega}^{\text{PD}}$ of the polyharmonic Dirichlet operator

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda_{\Omega}^{\text{PD}} u, & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \ m = 1, 2, \dots, \\ D^{\alpha} u = 0 & \text{on the boundary } \partial\Omega \text{ for } |\alpha| \leq m - 1. \end{cases}$$

When $m = 1$, the Rayleigh-Faber-Krahn theorem is probably one of the most popular lower-bound estimates of the smallest eigenvalue of the Laplace operator with the Dirichlet boundary condition. To provide its proof, one uses symmetrization arguments. But symmetrization approaches do not work for polyharmonic operators.

The Rayleigh-Faber-Krahn estimate is still open for the polyharmonic Dirichlet operator. Even for the bi-harmonic case ($m = 2$), that is, for the clamped plate eigenvalue problem, this lower bound conjecture is a long-standing open problem in multidimensional settings. Note that the Rayleigh-Faber-Krahn conjecture for the bi-harmonic case was solved by Nadirashvili in two dimensions and

by Ashbaugh and Benguria in three dimensions. In this talk, we discuss a new geometric lower estimate of the smallest eigenvalue for the polyharmonic Dirichlet operator from [1]. We also review our previous results in the field from [2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR24993094).

Keywords: Polyharmonic operator, lowest eigenvalue, Dirichlet condition.

2010 Mathematics Subject Classification: 35P15, 58J50

References

[1] Frank R. L., Laptev A., Suragan D. Eigenvalue lower bounds through a generalized inradius, *JFA*, (2026).

[2] Ruzhansky M., Sadybekov M., Suragan D. *Spectral geometry of partial differential operators*, Chapman and Hall/CRC (2020)

Spectra of the energy operator of the one-magnon systems in the Heisenberg ferromagnet with impurity and nearest neighbor interactions and with one-ion anisotropii

S.M. TASHPULATOV

*Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of Uzbekistan,
Tashkent, Uzbekistan*

sadullatashpulatov@yandex.ru

In the work [1] we considering one-magnon states in an isotropic ferromagnetic Heisenberg impurity model. We find how of the local impurity states (LISs), their energies, the degeneracy multiplicities of the related energy levels, and LIS domains of existence change with varying parameters of the Hamiltonian. Here we consider of the energy operator of one-magnon system in the ferromagnetic Heisenberg impurity model with one-ion anisotropy in the lattice.

Hamiltonian of the considering system has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) + H \sum_m S_m^z + (J_0 - J) \sum_{\tau} (\vec{S}_0 \vec{S}_{\tau}) + (H_0 - H) S_0^z, \quad (1)$$

where $J < 0$ is the parameter of the bilinear exchange interaction between the for nearest-neighbor atoms in the lattice, J_0 is the atom-impurity exchange interaction parameter, the summation over τ ranges the nearest-neighbors, and $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the atomic spin operator for the spin $s = 1/2$ at the lattice site m . We set $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, where S_m^- and S_m^+ are the corresponding magnon creation and annihilation operators at the site m , and H (H_0) are the parameters one-ion anisotropy. Hamiltonian (1) acts in the summetric Fock space $\mathcal{H}$. We let φ_0 denote the co-called vacuum vector uniquely determined by the conditions $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = (1/2)\varphi_0$, where $\|\varphi_0\| = 1$. The vectors $\{S_m^- \varphi_0\}$ describes the state of the system of one-magnon with the spin $s = 1/2$ located at the site m . The vectors $\{S_m^- \varphi_0\}$ form a orthonormal system. The closure of the space spanned by these vectors is denotes by $\mathcal{H}_1$. It is a Euclidian space with respect to the natural inner product and is called a space of one-magnon states. We denote by H_1 the restriction of operator H in the subspace $\mathcal{H}_1$.

Theorem 1. *The space $\mathcal{H}_1$ is invariant with respect to the operator H . The operator H_1 is a bounded self-adjoint operator generating a bounded self-adjoint operator $\bar{H}_1$, acting in the space $l_2(Z^\nu)$ according to the formula*

$$(\bar{H}_1 f)(p) = J \sum_{\tau} \{-f(p) + \frac{1}{2}f(p-\tau) + \frac{1}{2}f(p+\tau)\} + (J_0 - J) \sum_{\tau} \{\delta_{p,\tau} f(0) + \quad (2)$$

$$+\delta_{p,0}f(\tau) + (-\delta_{p,\tau} - \delta_{p,0})f(p)\} - Hf(p) - (H_0 - H)\delta_{p,0}f(p),$$

where $\delta_{k,j}$ – is the Kronecker delta. The operator H_1 acts in the vector $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}_1$ according to the formula

$$H_1\psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) S_p^- \varphi_0. \quad (3)$$

Using the Weyl criterion [2], we proved the coincides of the spectrum of operators H_1 and $\overline{H}_1$.

Let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform $\mathcal{F} : l_2(Z^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu)$. Here T^ν – ν -dimensional torus endowed with normalized Lebesgue measure $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$.

Theorem 2. Let $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_1 \equiv L_2(T^\nu)$ – Fourier transform. The Fourier transform of operator $\overline{H}_1$ is an operator $\tilde{H}_1 = \mathcal{F}\overline{H}_1\mathcal{F}^{-1}$ acting the space $L_2(T^\nu)$ by the formula

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = h(x)f(x) + \int_{T^\nu} h_1(x, t)f(t)dt, \quad (4)$$

where $h(x) = -2J\nu + 2J \sum_{i=1}^\nu \cos x_i - H$, $h_1(x, t) = -2\varepsilon_1 \{ \nu + \sum_{i=1}^\nu [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i] \} - \varepsilon_2$, here $\varepsilon_1 = J_0 - J$, $\varepsilon_2 = H_0 - H$, $x, t \in T^\nu$.

It is clear that the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_1$ is independent of functions $h_1(x, t)$ and fills the whole closed interval $[m_\nu, M_\nu]$, where $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x, t)$, $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x, t)$.

Definition 3. An eigenfunction $\varphi \in L_2(T^\nu)$ of operator $\tilde{H}_1$ corresponding to an eigenvalue $z \notin [m_\nu, M_\nu]$, is called a local impurity states (LIS) of operator $\tilde{H}_1$, and z is called the energy of this state.

We consider the operator $K_\nu(z)$ acting in the space $\mathcal{H}_1$ according to the formula $(K_\nu(z)f)(x) = \int_{T^\nu} \frac{h_1(x, t)}{h(t) - z} f(t)dt$. It is completely continuous in the space $L_2(T^\nu)$ for the values $z \notin [m_\nu, M_\nu]$.

We denote

$$\begin{aligned} \Delta_1(z) = & \left\{ (1 + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\cos s(1 - \cos s)ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z}) (1 - \int_{T^\nu} \frac{2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds) + \right. \\ & + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{1 - \cos s}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \int_T \frac{\cos s[2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2]}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \} \times \\ & \times (1 - 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\sin^2 s ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z}). \end{aligned} \quad (5)$$

Lemma 4. A number $z = z_0 \notin [m_\nu, M_\nu]$ is an eigenvalue of operator $\tilde{H}_1$ if and only if it is a zero of the function $\Delta_1(z)$, i.e. $\Delta_1(z_0) = 0$.

Now we solve the equation $\Delta_1(z) = 0$. This equation is equivalent next system of equations:

$$1 - 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\sin^2 s ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z} = 0, \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\cos s(1 - \cos s)ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z}) (1 - \int_{T^\nu} \frac{2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds) + \\ + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{1 - \cos s}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \int_T \frac{\cos s[2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2]}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

The equation (6) has the solution of the form $z = -H - \frac{(J + \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1}$.

This solutions lie the below of continuous spectrum of operator $\tilde{H}_1$, if $\varepsilon_1 > 0$.

Expressing all integrals through the integral $J^*(z) = \int_T \frac{ds}{-2J(1-\cos s)-H-z}$ we have the equation of the form

$$J^*(z) = -\frac{2J^2 + 2J\varepsilon_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1(z+H)}{-2J^2\varepsilon_1 - \varepsilon_1(z+H)^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2(z+H+2J)}. \quad (8)$$

In the one-dimensional case, the integral $J^*(z) = \int_T \frac{ds}{-2J(1-\cos s)-H-z}$ is calculated in a quadrature, calculated a integral $J^*(z)$ in a quadrature, substituting the value of this integrals in a equation (8) and solving equation (8), convince what, the equation (8) has a no more than two solutions.

Theorem 5. *Let $\nu = 1$. Then the operator $\tilde{H}_1$ has three types LISs φ_1, φ_2 and φ_3 with the energy values correspondingly to equal $z_1 = -H - \frac{(J+\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1}$ and $z = z_2, z = z_3$, lying the outside of continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_1$, where $z = z_2$ and $z = z_3$ are the solutions of equation (8).*

References [1]. Tashpulatov S. M. *Spectra and Localized Impurity States of One-Magnon Systems in the Heisenberg Isotropic Ferromagnetic Impurity Model*, Theoretical and Mathematical Physics, **126:3** (2001), 403–408.

[2]. Reed S., and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1. Functional Analysis*. New York: Acad. Press, (1972).

On the inverse problem of variational calculus for a system of first-order differential equations with degenerate diffusion

M.I. TLEUBERGENOV¹, G.K. VASSILINA², D.T. AZHYMBAEV³

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*AUPET named Gumarbek Daukeev, Almaty, Kazakhstan*

³*Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

¹marat207@mail.ru, ²v-gulmira@mail.ru

Consider the Helmholtz problem for a system of first-order stochastic equations with degenerate diffusion

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i(x, y, t), & i = \overline{1, n_1}, n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, n_1 + n_2 = n, \\ \dot{y}_k = Y_k(x, y, t) + \sigma_{kj}(x, y, t) \dot{\xi}^j, & k = \overline{1, n_2}. \end{cases} \quad (1)$$

Problem statement. Given the system of first-order stochastic equations with degenerate diffusion (1), we pose the problem of constructing equivalent stochastic equations with the Hamiltonian structure.

Part 1. Unlike [1], this paper considers the Helmholtz problem for a more general system than the stochastic equations (1') in [1], namely, a system of first-order stochastic equations with degenerate diffusion (1). We pose the following problem: given a system of first-order stochastic equations with degenerate diffusion (1), we construct equivalent equations with the Hamiltonian structure.

To solve this problem, following Liouville's method, we introduce additional variables κ_i , $i = \overline{1, n_1}$ and z_k , $k = \overline{1, n_2}$, as well as the Hamiltonian function of the extended system in the form

$$H = -(X_i(x, y, t)\kappa_i + Y_k(x, y, t)z_k). \quad (2)$$

Then $X_i = -\frac{\partial H}{\partial \kappa_i}$, $Y_k = -\frac{\partial H}{\partial z_k}$ and the corresponding equations of the extended system are written as

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}, & i = \overline{1, n_1}, n_1 \geq 0, & (3a) \\ \dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial \kappa_i}, & & (3b) \\ \dot{z}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, & k = \overline{1, n_2}, n_2 \geq 0, & (3c) \\ \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial z_k} + \sigma_{kj}(x, y, t) \dot{\xi}^j, & n_1 + n_2 = n, & (3d) \end{cases} \quad (3)$$

where equations (3b) and (3d) coincide with the original equations (1), and equations (3a) and (3c) serve to determine the auxiliary variables κ_i , $i = \overline{1, n_1}$ and z_k , $k = \overline{1, n_2}$. Thus, the theorem holds true.

Theorem 1. *The necessary and sufficient conditions for representing the first-order Itô equation (1) in the form of equations with canonical structure (3) consist in expressing the Hamiltonian function in the form (2) by introducing additional variables κ_i , $i = \overline{1, n_1}$ and z_k , $k = \overline{1, n_2}$, which are determined from equations (3a) and (3c).*

Thus, in Part 1, the problem of constructing an equivalent equation of the Hamiltonian structure for a given stochastic equation (1) with degenerate diffusion is solved.

Part 2. To solve Helmholtz's problem without using the method of additional variables, let us consider the problem of indirectly constructing equivalent equations with the Lagrangian structure with a completely degenerate Lagrangian for a given system of first-order stochastic equations with degenerate diffusion (1).

Let's introduce the following variables beforehand:

$$a_\nu = \begin{cases} x_i, & \nu = i, i = 1, \dots, n_1, \\ y_k, & \nu = n_1 + k, k = 1, \dots, n_2, \end{cases}$$

$$G_\nu(a, t) = \begin{cases} X_i(x, y, t), & \nu = i, \\ Y_k(x, y, t), & \nu = n_1 + k, \end{cases} \quad b_{\nu j}(a, t) = \begin{cases} 0, & \nu \leq n_1, \\ \sigma_{kj}(x, y, t), & \nu = n_1 + k. \end{cases}$$

Using which we rewrite the system of equations (1) in an equivalent form

$$\dot{a}_\nu = G_\nu(a, t) + b_{\nu j}(a, t) \dot{\eta}^j, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Using which we rewrite the system of equations (1) in an equivalent form

$$\dot{a}_\nu = G_\nu(a, t) + b_{\nu j}(a, t) \dot{\eta}^j, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (4)$$

If the identity

$$h_k^\nu(\dot{a}_\nu - G_\nu(a, t) - b_{\nu j} \dot{\eta}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{a}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{a}_k \partial a_l} \dot{a}_l - \frac{\partial L}{\partial a_k} - b'_{kj} \dot{\eta}^j, \quad (5)$$

holds and the matrix h_k^ν is not the identity matrix, then the representation is called indirect; otherwise, it is called direct.

We consider the problem of constructing, in the case of a completely degenerate Lagrangian, an equivalent equation with the Lagrangian structure for the given stochastic equation (5).

For this case, the theorem has been proved.

Theorem 2. *Let there be a case of complete degeneration of the Lagrangian $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{a}_k \partial \dot{a}_i} \equiv 0$, $i, k = \overline{1, n}$ and Helmholtz conditions*

$$\frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial \dot{a}_\nu} = -\frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial \dot{a}_k}, \quad \frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial a_k} = -\frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial a_\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial a_\nu}, \quad k, \nu = \overline{1, n}, j = \overline{1, r},$$

where $\tilde{G}_k = h_k^\nu G_\nu$ are satisfied. Thus, the necessary and sufficient conditions for the indirect representation of stochastic equation (5) as a stochastic equation with the Lagrangian structure are given by conditions

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{a}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{a}_k \partial a_l} \dot{a}_l - \frac{\partial L}{\partial a_k} = h_k^\nu (\dot{a}_\nu - G_\nu(a, t)), \quad b'_{kj} = h_k^\nu b_{\nu j}. \quad (6)$$

Thus, in part 2, in the case of complete degeneration of the Lagrangian (6), the problem of indirect construction according to a given stochastic equation (5) of the equivalent equation of the Lagrangian structure is solved.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: stochastic differential equations, inverse problem, Helmholtz problem, degenerate diffusion.

2020 Mathematics Subject Classification: 60Gxx, 34A55

References

[1] Tleubergenov M.I., Vassilina G.K., Azhymbaev D.T. Stochastic Helmholtz Problem and Convergence Almost Surely, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 3, pp. 1287–1295, 2024.

A note on lifespan estimates for higher-order parabolic equations

N.N. TOBAKHANOV

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

nurdaulet.tobakhanov@nu.edu.kz

We investigate the lifespan of solutions to the higher-order semilinear parabolic equation

$$u_t + (-\Delta)^m u = |u|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

with initial data. We focus on the precise asymptotic behavior of the lifespan of nontrivial solutions. By combining the test function method and semigroup estimates, we derive both upper and lower bounds for the lifespan of solutions

$$T_\varepsilon \simeq \begin{cases} \varepsilon^{-\left(\frac{1}{p-1} - \frac{n}{2m}\right)^{-1}}, & 1 < p < p_{Fuj}, \\ \exp(\varepsilon^{-(p-1)}), & p = p_{Fuj}, \end{cases}$$

where $p_{Fuj} = 1 + \frac{2m}{n}$ is the critical exponent of Fujita. These estimates refine and extend the earlier results of Caristi–Mitidieri [J. Math. Anal. Appl., 279:2 (2003), 710–722] and Sun [Electron. J. Differential Equations, 17 (2010),], who obtained only upper bounds under slowly decaying initial data assumptions. In our setting, the above condition on the initial data is replaced by the assumption $L^1 \cap L^\infty$, which sharpens the results of the aforementioned works.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26195417).

Keywords: parabolic equations, lifespan estimates, critical exponent, blow-up.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K58, 35B33, 35B44

References

[1] G. Caristi and E. Mitidieri. Existence and nonexistence of global solutions of higher-order parabolic problems with slow decay initial data, *J. Math. Anal. Appl.* 2010, 279–2.

[2] F. Sun, Life span of blow-up solutions for higher-order semilinear parabolic equations, *Electron. J. Differential Equations*. 2003, 17–9.

Parabolic problems whose Fujita critical exponent is not given by scaling

B.T. TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

torebek@math.kz

This work investigates the heat equation with a nonlocal nonlinearity involving a Riesz potential: $u_t - \Delta u = I_\alpha(|u|^p)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, where $\alpha \in (0, n)$, $p > 1$. We introduce the Fujita-type critical exponent

$$p_{\text{Fuj}}(n, \alpha) = 1 + \frac{2 + \alpha}{n - \alpha},$$

which characterizes the global behavior of solutions: global existence for small initial data when $p > p_{\text{Fuj}}(n, \alpha)$, and finite-time blow-up when $p \leq p_{\text{Fuj}}(n, \alpha)$.

It is remarkable that the critical Fujita exponent is not determined by the usual scaling argument that yields $p_{sc} = 1 + (2 + \alpha)/n$, but instead arises in an unconventional manner, similar to the results of Cazenave et al. [1] for the heat equation with a nonlocal nonlinearity of the form $\int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u(s)|^{p-1} u(s) ds$, $0 \leq \gamma < 1$. The result on global existence for $p > p_{\text{Fuj}}(n, \alpha)$, provides a positive answer to the hypothesis proposed by Mitidieri and Pohozaev in [2]. We further establish global nonexistence results for the above heat equation, where the Riesz potential term $I_\alpha(|u|^p)$ is replaced by a more general convolution operator $(\mathcal{K} * |u|^p)$, $\mathcal{K} \in L^1_{loc}$, thereby extending the Mitidieri–Pohozaev’s results established in the aforementioned work.

Proofs of the blow-up results are obtained using a nonlinear capacity method specifically adapted to the structure of the problem, while global existence is established via a fixed-point argument combined with the Hardy–Littlewood–Sobolev inequality.

More detailed evidence can be found in the published full-text version [3].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26195417).

Keywords: Convolution operator; Riesz potential; parabolic equation; critical exponent; blow-up.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K58, 35B33, 35A01, 35B44

References

- [1] T. Cazenave, F. Dickstein, F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, *Nonlinear Anal.*, 68 (2008), 862–874.
- [2] E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, Liouville theorems for some classes of nonlinear nonlocal problems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 248 (2005) 164–185.
- [3] A. Z. Fino, B. T. Torebek, Parabolic problems whose Fujita critical exponent is not given by scaling, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 65 (2026), 116.

Vainikko Operator on Grand Morrey Sequence Spaces

A. TULENDINOVA¹, A. GHORBANALIZADEH², M.A. ZAIGHUM³

^{1,3}Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

²Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), 45137-66731 Zanjan, Iran

³Riphah International University, Islamabad, Pakistan

¹aizhan.tulendinova@nu.edu.kz, ²ghorbanalizadeh@iasbs.ac.ir,

³zaighum.asad@nu.edu.kz; asad.zaighum@riphah.edu.pk

We establish the boundedness of Vainikko operator on grand Morrey sequence spaces. We also discuss the commutator of multiplication operators is bounded in this newly introduced grand Morrey sequence spaces.

Keywords: Morrey sequence spaces, grand Morrey sequence spaces, convolution operators, boundedness.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B45; 46A45

On existentially prime theories

I.O. TUNGUSHBAYEVA

Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

intng@mail.ru

Let L be a countable first-order language. Let T be an L -theory. Denote the class of all existentially closed models of T by E_T , and the class of all algebraically prime models [1] of T by AP_T . A theory T is called existentially prime [2], if $E_T \cap AP_T \neq \emptyset$. The following statement holds:

Proposition 1. *Let T be an existentially prime theory. Then T is complete for existentially sentences ($\exists$ -complete).*

There are counterexamples supporting that the converse statement is generally false. There arises the question: under what conditions $\exists$ -complete theories are existentially prime?

Recall the definition of a Jonsson theory [3]:

Definition 2. An L -theory T is called a Jonsson theory, if T admits infinite models, is $\forall\exists$ -axiomatizable, admits amalgamation and joint embedding properties.

Here we present a sufficient condition for an $\exists$ -complete theory T to be existentially prime:

Theorem 3. *Let T be a Jonsson $\exists$ -complete theory. Then T is existentially prime.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: model theory, inductive theory, existentially prime theory, Jonsson theory, amalgamation property joint embedding property.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C35, 03C50, 03C52

References

- [1] Baldwin J.T., Keuker D.W. Algebraically prime models, *Annals of Mathematical Logic*, **20:3** (1981), 289–330.
- [2] Yeshkeyev A.R. Existential prime convex Jonsson theories and their models, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **81:1** (2016), 41–45.
- [3] Barwise J. (ed.) *Handbook of Mathematical Logic* (Russian edition), Nauka, Moscow (1982).

On Hutchinson population model for differential equations with maxima

R.K. TURAEV¹, T.K. YULDASHEV², A.Z. PIRMATOV³

¹Termiz State University of Engineering and Agrotechnology, Termiz, Uzbekistan

²Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

³Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

¹rasul.turaev@mail.ru, ²tursun.k.yuldashev@gmail.com, ³pirmatov@oshsu.kg

In many studies, differential equations are a tool for mathematical modeling of processes and studying their properties (see, for example, [1]–[8]). Mathematical modelling in ecology has a long history leading back to the famous works of Malthus [9], Quetelet [10] and Verhulst [11] on

principals of demographic regulation. In the first part of the 20th century, the classical works of Lotka [8] and Volterra [12] on dynamics of interacting species radically transformed the entire idea of modelling in ecology. Their works (for a short history of the implementation of mathematics in ecology, see [13]) eventually resulted in the emergence of theoretical ecology as a new science. Note that the questions on the main mechanisms of populations regulation addressed by Lotka and Volterra are still in the focus of theoretical ecology! In partially, to describe the population dynamics of a species, it was proposed a mathematical model (see, [1], [3])

$$\dot{x}(t) + rx(t) + rx^2(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

where $x(t) = N(t) + K$, $N(t)$ is the population size of the species, K is the capacity of the habitat, r is the reproduction rate.

Equation (1) describes well the dynamics of population growth of protozoan microorganisms. In this regard, in 1948, G. E. Hutchinson proposed a model described by a differential equation with delay [5], [6]

$$\dot{x}(t) + rx(t-h) + rx(t-h)x(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

where $x(t) = N(t) + K$, h characterizes the average reproductive age of the species.

Hutchinson used equation (2) to describe changes in the size of a herd of cows on a pasture. However, equation (2) has been used by other scientists to describe other processes (see, for examples, [2]). Let us consider the equation (2) with the initial condition $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-h, 0]$, $x(0) = \varphi_0$. For small $r > 0$ the equation (2) has a stability domain.

In the present paper we propose the following model to describe the population dynamics of the species

$$\dot{x}(t) + r \max_{\tau \in [t-h, t]} x(\tau) + rx(t) \max_{\tau \in [t-h, t]} x(\tau) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

where $x(t) = N(t) + K$, τ is a variable value that provides the maximum number of species on the segment $[t-h, t]$, h characterizes the size of the reproductive age of the species, r is reproduction rate.

The increasing solutions of the differential equations (3) we are looking in the form $x(t) = e^{\lambda t}$, $0 < \lambda = \text{const}$. Then from the equation (3) we obtain $\lambda + r + re^{\lambda t} = 0$, $t \geq 0$. This equation we rewrite as $\lambda + r + r(N(t) + K) = 0$, $t \geq 0$. Hence, we obtain that $N(t) = -\frac{\lambda+r}{r} - K$, $t \geq 0$, where $N(t)$ is the population size of the species, K is the capacity of the habitat, $r \neq 0$ is the reproduction rate.

It is interesting that $-\frac{\lambda+r}{r} - K > 0$ or $rK + r < -\lambda$. Hence, we get the condition $\lambda < -r(K+1)$ for the increasing solution of the differential equation (3). The solution of the equation (3) depends from the $r \neq 0$. It is clear, that $\lim_{r \rightarrow 0} x(t) = 0$. Since $r > 0$, $K > 0$, then the equation (3) has no monotone increasing solution.

The decreasing solutions of the differential equations (3) we are looking in the form $x(t) = e^{-\lambda t}$, $0 < \lambda = \text{const}$. Then from the equation (3) we obtain $-\lambda + re^{\lambda h} + re^{\lambda h}(N(t) + K) = 0$, $t \geq 0$. Hence, we obtain that $N(t) = \frac{\lambda - re^{\lambda h}}{re^{\lambda h}} - K$, $t \geq 0$. We consider the following estimate $\frac{\lambda - re^{\lambda h}}{re^{\lambda h}} - K > 0$ or $re^{\lambda h}K + re^{\lambda h} < \lambda$. Hence, we get the condition $0 < r < \lambda/e^{-\lambda h}(K+1)$ for the decreasing solution of the differential equation (3). The solution of the equation (3) depends from the $r \neq 0$. It is clear, that $\lim_{r \rightarrow 0} x(t) = 0$. Consequently, for all $\lambda > re^{\lambda h}(K+1)$ the solutions of differential equation (3) are decreasing. In this case, the population size $N(t)$ of the species is decreasing.

Thus, monotonicity of population size $N(t)$ change is true only in the case of population decline. An increasing population size $N(t)$ is associated with non-monotonicity (oscillatory). From the condition $\lambda > re^{\lambda h}(K+1)$ we obtain the condition for reproductive age of the species $h < \left(\frac{\lambda}{r(K+1)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$. Hence, we deduce that population size $N(t)$ is decreasing, when reproductive age h of the species is smaller than $\left(\frac{\lambda}{r(K+1)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

The equation of population model we consider with initial value condition. The method of steps is used. In general, the impulsive nonlinear functional-differential equation with maxima is considered under the boundary conditions. The method of successive approximations is used with combination of the contracting mapping method.

Funding: This research is not funded.

Keywords: G. E. Hutchinson population model, boundary problem, impulsive functional-differential equation, solvability.

2020 Mathematics Subject Classification:34K60

References

- [1] Volyperra V. *Mathematical theory of the struggle for existence*, Nauka, Moscow (1976).
- [2] Prasolov A.V. *Dynamic models with delay and their applications in economics and engineering*, Lan Publishing House, St. Petersburg (2010).
- [3] Svirezhev Yu.N., Logofet D.O. *Stability of biological communities*, Nauka, Moscow (1978).
- [4] Hale J. *Theory of functional differential equations*, Mir, Moscow (1984).
- [5] Balanov Z., Krawcewicz W., Ruan H. G. E. Hutchinson's delay logistic system with symmetries and spatial diffusion, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **9** :1 (2008), 154–182.
- [6] Shui-Nee Chow, John Mallet-Paret Integral averaging and bifurcation, *Journal of Differential Equations*, **26** :1 (1977), 112–159.
- [7] Shui-Nee Chow, John Mallet-Paret The Fuller index and global Hopf bifurcation. *Journal of Differential Equations*, **29** :1 (1978), 66–85.
- [8] Lotka A. *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins Baltimore (1925).
- [9] Malthus T.R. *An essay on the principle of population*, Johnson J., London (1798).
- [10] Quetelet A. *Sur l'homme et le d'evloppement de ses facult'e* Bachelier, Paris (1835).
- [11] Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, *Correspondance Mathmatique Physique Publi'e A*, **10** (1838), 113–121.
- [12] Volterra V. *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together*, In *Animal ecology* (ed. Chapman R.N.), 409–448. McGraw Hill, New York (1931).
- [13] Morozov A. Mathematical modelling in theoretical ecology, *Introduction to the Special Issue. Math. Model. Nat. Phenom.*, **8** :6 (2013), 1–4

Combinatorial Structure of Markov Partitions for Algebraic Tent Maps

N.R. TURDIEVA

Turin Polytechnic University in Tashkent , Tashkent, Uzbekistan

nrturdieva@gmail.com

The purpose of the present work is to study the finite Markov partitions for the one-parameter family of tent maps. We describe the characterization of parameters for which a finite Markov partition exists, based on the eventual periodicity of the critical point. Special attention is given to a sequence of algebraic parameters determined by the equation

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^k = \omega^{k+1},$$

for which the associated tent maps admit finite Markov partitions.

The graph of T_ω has a triangular (tent-like) shape, which explains the name of the map. For a point x , the sequence $\{T_\omega^n(x)\}_{n=0}^\infty$ is called the orbit of x . A point x is a *fixed point* if $T_\omega(x) = x$; it is a *periodic point of period k* if $T_\omega^k(x) = x$, $T_\omega^i(x) \neq x$, $0 < i \leq k - 1$.

It is not difficult to see that if $0 < \omega < 1$, all orbits converge to the fixed point $x = 0$. When $\omega = 1$, every point x with $x \leq \frac{1}{2}$ is a fixed point, and other points map to a fixed point after the first iteration.

For $1 < \omega \leq 2$, the interval

$$I_\omega = \left[\omega - \frac{\omega^2}{2}, \frac{\omega}{2} \right]$$

is invariant under the tent map, i.e. $T_\omega(I_\omega) = I_\omega$. Moreover, every point in $(0, 1)$ is eventually mapped into I_ω (note that 0 is a fixed point for T_ω). Therefore, the long-term dynamics of T_ω can be studied by restricting the map to this invariant interval I_ω . Next we give the notion of Markov partition for an interval maps (see for instance [1]).

Definition 1. Let $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be a continuous map. A finite collection of closed intervals

$$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$$

is called a *Markov partition* for f if the following conditions are satisfied:

1. **Covering and disjoint interiors.** The intervals P_i have pairwise disjoint interiors and

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^k P_i.$$

2. **Markov property.** For any $i, j \in \{1, \dots, k\}$, if

$$f(\text{int } P_i) \cap \text{int } P_j \neq \emptyset,$$

then

$$f(P_i) \supset P_j.$$

3. **Boundary invariance.** The image of each boundary point of the partition belongs to the boundary of the partition, that is,

$$f(\partial P_i) \subset \bigcup_{j=1}^k \partial P_j \quad \text{for all } i.$$

We formulate the main result of our work.

Theorem 2. Let $\sqrt{2} < \omega \leq 2$. Then there exists a sequence of algebraic numbers $\{\omega_k\}$ such that

1. ω_k satisfies the equation $1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^k = \omega_k^{k+1}$;
2. $\sqrt{2} < \omega_k < \omega_{k+1} < 2$ for any $k \in \mathbb{N}$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = 2$;
3. The map $T_{\omega_k} : I_{\omega_k} \rightarrow I_{\omega_k}$ admits a Markov partition for any $k \in \mathbb{N}$.

Remark 3. The sequence $\{\omega_k\}$ constructed in this work provides a concrete family of algebraic parameters for which finite Markov partitions exist. Although the Markov criterion implies that any parameter admitting a finite Markov partition must be algebraic, the converse is not established in full generality here.

Theorem 4. Let ω_k be defined as in Theorem 2, and let

$$\mathcal{P} = I_{\omega_k} \setminus \{T_{\omega_k}^j(1/2) \mid j \geq 0\}$$

be a Markov partition on I_{ω_k} . Let $\mathcal{P}_n$ be the Markov partition generated by $\mathcal{P}$, i.e. $\mathcal{P}_n = T_{\omega_k}^{-1}(\mathcal{P}_{n-1}) \cap \mathcal{P}_{n-1}$ with $\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}$. Then there are $k+1$ different intervals with length

$$a \cdot \omega_k^{-n}, a \cdot \omega_k^{-n+1}, \dots, a \cdot \omega_k^{-n+k}, \quad \text{where } a = |I_{\omega_k}| \omega_k^{k-1}.$$

By denoting N_n^j the number of segments with the length $a \omega_k^{j-n}$ (call it segment of type j) in the Markov partition, we have

1. for $0 \leq n \leq k$,

$$N_n^j = \begin{cases} 2^n, & \text{if } n \leq j, \\ \sum_{l=0}^{n-1} N_l^j, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

2. for $n > k$, we have $N_n^j = \sum_{l=n-k-1}^{n-1} N_l^j$;

3. the number of all segments in $\mathcal{P}_n$ is equal to

$$\sum_{j=0}^k N_n^j = k + 1 + k \sum_{l=0}^{n-1} N_l^k.$$

Moreover, if segments of type j and type l come side by side, then $j = l$ or $|l - j| = 1$.

Keywords: Markov partition; chaos; tent map.

2020 Mathematics Subject Classification: 37E05, 37E10.

References

- [1] Anatole Katok, Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York (1995).
- [2] Hasfura J.R., Lynch P.; Periodic points of the family of tent maps. *Amer. Math. Monthly*. 108, N1, (2001), p.10–20,
- [3] M.J. van Harten. *The Dynamics of the One-Dimensional Tent Map Family and Quadratic Family*, Bachelor's Project Mathematics (2018).

The O'Neil–Type inequalities for Besov–Morrey spaces

Ussentay A.B. TLEUKHANOVA N.T.

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

¹LPP Geometry, Astana, Kazakhstan

²L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

¹tleukhanova63@gmail.com, ²baglambekkyzy_a@mail.ru

Let $\mathbb{T}^n = [0, 1)^n$ - n - be the n -dimensional torus, and let μ - n -dimensional Lebesgue measure.

Definition 1. Let $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$.

The Besov space is defined as follows:

$$\|f\|_{B_q^\beta} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\beta k} \|\Delta_k f\|_{L_p} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad \text{where } 1 < q < \infty$$

and in case $q = \infty$

$$\|f\|_{B_\infty^\beta} := \sup_k 2^{\beta k} \|\Delta_k f\|_{L_p} < \infty.$$

Theorem 2. Let $\mathfrak{S}$ be some local partition of the space $\mathbb{T}^n$. Let $0 < \max(p, 1) \leq r \leq \infty$, $0 < \lambda < \frac{n}{p}$,

and $\beta \leq \gamma \leq \frac{n}{r}$, $0 < \alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{p} < \frac{n}{r}$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

If $f \in B_{q_1}^{\beta_1}(M_r^\gamma)$ and $g \in B_{q_2}^{\beta_2}(LM_{r', \infty}^{-\alpha}(\mathfrak{S}))$, then $f * g \in B_q^\beta(M_p^\lambda)$ and the following inequality holds

$$\|f * g\|_{B_q^\beta(M_p^\lambda)} \leq c \|f\|_{B_{q_1}^{\beta_1}(M_r^\gamma)} \|g\|_{B_{q_2}^{\beta_2}(LM_{r', \infty}^{-\alpha}(\mathfrak{S}))}$$

Funding: The research was carried out within the framework of the doctoral studies of A.B. Ussentay. **Keywords:** convolution operators, Morrey spaces, Besov-Morrey and local Besov-Morrey spaces, the O'Neil type inequalities .

2020 Mathematics Subject Classification: 42B35, 46E35, 42B25

References

- [1] Nursultanov E.D., Suragan D. On the convolution operator in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **515**:1 (2022), 126357.
- [2] Tleukhanova N.T., Sadykova K.K., Ussentay A.B. O'Neil type inequalities for Sobolev-Morrey spaces, *Journal of Mathematical Sciences*, **291** (2025), 2–317-322.

On decidability of pure linear orderings of Morley o-rank 1

V.V. VERBOVSKIY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

verbovskiy@math.kz

We consider an ordered structure. Definitions of Morley o-rank and Morley o-degree can be found on Page 301 (The abstract “Pure linear orderings of Morley o-rank 1 and o-degree 2”, Definitions 1–3).

The class of ordered structures whose elementary theories have bounded Morley o-rank is a proper subclass of the class of o-stable theories. Note that any o-minimal theory has Morley o-rank 1 and Morley o-degree 1; any weakly o-minimal theory has Morley o-rank 1 and Morley o-degree 2. There are examples of quasi-o-minimal theories that have an infinite Morley o-rank, however, they are o-superstable.

Based on the paper [1], we prove the following.

Theorem 1. *Any complete theory of a pure ordering of Morley o-rank 1 is decidable.*

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR28713025).

Keywords: partially ordered structure, o-minimal structure, lattice, generalized interval.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C45

References

- [1] Verbovskiy V., Yershigeshova A. Pure linear orderings of Morley o-rank 1. *International Journal of Mathematics and Physics*, 16:1 (2025), 73–79. <https://doi.org/10.26577/ijmph.20251618>.

On the local strict order property inside a cut in ordered structures

V.V. VERBOVSKIY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

verbovskiy@math.kz

Linearly ordered structures are one of the classical mathematical objects. Linear ordered structure $\mathfrak{M}$ is called *o-stable in λ* , if for any subset $A \subseteq \mathfrak{M}$ such that $|A| \leq \lambda$ and for any arbitrary cut s in $\mathfrak{M}$ there exist the biggest λ complete types over A which are consistent with cut s . Theory T is called *o-stable in λ* , if every model of T is o-stable. Theory T is called *o-stable*, if there is a λ , such that T is λ stable.

Definition 1 (V. Verbovskiy). A totally ordered structure $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ has *the strict order property inside a cut*, if there is a formula $\phi(x, \bar{y})$ such that for any natural number n there are tuples $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ and a cut $\langle C_n, D_n \rangle$ in $\mathcal{M}$ such that in some $|M|^+$ -saturated elementary extension $\mathcal{N}$ of $\mathcal{M}$ the following holds:

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}).$$

A theory has *the strict order property inside a cut* if at least one of its models has this property.

The following lemma is an analog of the fact that a stable theory does not have the strict order property.

Lemma 2 (V. Verbovskiy). *Any o-stable theory does not have the strict order property inside a cut.*

The classical strict order property has a local variant. In the report, we discuss the local variant of the strict order property inside a cut.

Funding: The author was supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: linearly ordered structure, o-minimal structure, o-stable theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C64, 06A06

Pure linear orderings of Morley o-rank 1 and o-degree 3 and 4

V.V. VERBOVSKIY¹, A.D. YERSHIGESHOVA²

^{1,2}*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

¹verbovskiy@math.kz, ²aisha.yershigeshova@sdu.edu.kz

We consider an ordered structure. Let $s(x)$ be a partial 1-type, and let $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ be formulae. We say that $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are *s-inconsistent* if $s(x) \cup \{\varphi(x), \psi(x)\}$ is inconsistent.

Definition 1 (V. Verbovskiy). 1. We say that Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ inside a cut $\langle C, D \rangle$ in $\mathcal{M}$ is equal to or greater than 1 and write $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) \geq 1$ for this, if $\{\phi(x)\} \cup \langle C, D \rangle$ is consistent.

2. $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha + 1$ if there are infinitely many pairwise $\langle C, D \rangle$ -inconsistent formulae $\psi_i(x)$ such that $RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi(x) \wedge \psi_i(x)) \geq \alpha$.
3. If α is a limit ordinal, then $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ if $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) \geq \beta$ for all $\beta < \alpha$.
4. $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ if $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ and $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) \not\geq \alpha + 1$.
5. We define Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ inside $\mathcal{M}$ as follows:

$$\text{o-}RM_{\mathcal{M}}(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) : \langle C, D \rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M}\}.$$

6. We define Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ as follows:

$$\text{o-}RM(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) : \mathcal{M} \models T \text{ and } \langle C, D \rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M}\}.$$

We define the Morley o-degree of a formula inside a cut

1. Let $\langle C, D \rangle$ be a cut in an ordered structure $\mathcal{M}$ and $\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ for some formula ϕ . We say that Morley o-degree of $\phi(x)$ inside the cut $\langle C, D \rangle$ in $\mathcal{M}$ is equal to n and write $\text{o-}MD_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) = n$ for this, if there exist exactly n pairwise $\langle C, D \rangle$ -inconsistent formulae $\psi_i(x)$ such that $RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi(x) \wedge \psi_i(x)) = \alpha$.

2. We define Morley o-degree of a formula $\phi(x)$ inside $\mathcal{M}$ as follows:

$$\text{o-}RM_{\mathcal{M}}(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) : \langle C, D \rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M} \text{ and } \text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) = \alpha\}.$$

3. We define Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ as follows:

$$\text{o-}RM(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) : \mathcal{M} \models T, \langle C, D \rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M}, \text{ and } \text{o-}RM_{\langle C, D \rangle, \mathcal{M}}(\phi) = \text{o-}RM(\phi)\}.$$

Let F be the set of all finite linear orderings, and $G = F \cup \{\omega, \omega^*, \omega + \omega^*, \omega^* + \omega, \mathbb{Q}\}$. Also, let WO be the collection of all ordered sums of the form $C_1 + \dots + C_m$, where C_i is elementarily equivalent to some member of G for each $i \leq m$. B. Kulpeshov proved that any weakly o-minimal structure $\mathcal{M}$ restricted to the signature $\{=, <\}$ is a member of WO , and conversely, the first-order theory of any member of WO is a weakly o-minimal theory of linear order.

Here we give the complete description of pure ordered structures that have Morley o-rank 1 and Morley o-degree 3 and 4. We gave the complete description of pure ordered structures that have Morley o-rank 1 and Morley o-degree 2 in [4]. These classes are proper extensions of the class of weakly o-minimal pure ordered structures.

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685272).

Keywords: partially ordered structure, o-minimal structure, lattice, generalized interval.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C45

References

- [1] Kulpeshov B.S. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *Journal of Symbolic Logic*, 63:4 (1998), 1511–1528. DOI 10.2307/2586664
- [2] Verbovskiy V.V. O-stable ordered groups. *Siberian Advances in Mathematics* 22 (2012), no. 1, 50–74.
- [3] Verbovskiy V.V. On ordered groups of Morley o-rank 1. *Siberian Electronic Mathematical Reports* 15 (2018) 314–320.
- [4] Verbovskiy V., Yershigeshova A. Pure linear orderings of Morley o-rank 1. *International Journal of Mathematics and Physics*, 16:1 (2025), 73–79.
<https://doi.org/10.26577/ijmph.20251618>.

On the perfection of Jonsson theories under stability and locally E -finitely basedness conditions

A.R. YESHKEYEV¹, M.T. KASSYMETOVA², G.E. ZHUMABEKOVA³

^{1,2,3}*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*

¹*aibat.kz@gmail.com*, ²*mairushaasd@mail.ru*, ³*zhumabekovag1990@mail.ru*

We study Jonsson theories in a countable first-order language L .

Definition 1. [1] A theory T is called *Jonsson* if the following conditions hold for T :

1. T has at least one infinite model;
2. T is an inductive theory;
3. T has the amalgam property (*AP*);
4. T has the joint embedding property (*JEP*).

Definition 2. [2] A model C_T of the Jonsson theory T such that $|C_T| = 2^\omega$ is said to be a *semantic model*, if it is ω^+ -homogeneous-universal.

Definition 3. [2] T^* is the *center* of a Jonsson theory T . T^* is the elementary theory of its semantic model C_T , such that $T^* = Th(C_T)$.

Definition 4. [2] The Jonsson theory T is said to be *perfect* if its semantic model is an ω^+ -saturated model of T .

Definition 5. [2] The Jonsson theory is said to be *hereditary*, if in any of its permissible enrichment, any expansion of it in this enrichment will be Jonsson theory.

Definition 6. [2] Let K be a class of L -structures. The following set $JSp(K)$ of Jonsson theories is called a *Jonsson spectrum* of the class K :

$$JSp(K) = \{T \mid T \text{ is a Jonsson theory and } A \models T \text{ for any } A \in K\}.$$

Let $S_P^J(A)$ be the set of all theories that are $\exists$ -completions of $\bar{T}$.

Definition 7 (Yeshkeyev A.R.). A Jonsson theory T is called *J-P- λ -stable* if $|S_P^J(A)| \leq \lambda$ for every set A with $|A| \leq \lambda$. It is called *J-P-stable* if it is *J-P- λ -stable* for some cardinal λ .

Let L be a countable language, T a Jonsson theory, C_T its semantic model, and $T^* = Th(C_T)$ the center of T (hence T^* is complete). Fix a class of formulas Δ . In our results below, we take $\Delta = E$, the class of all existential L -formulas.

Definition 8 (Yeshkeyev A.R.). Let S be a theory in L , $M \models S$, $A \subseteq M$, and let $\varphi(x, \bar{a})$ be a Δ -formula with parameters $\bar{a} \in A$. Set

$$\text{Con}_\Delta^S(\varphi/A) = \{ \psi(x, \bar{a}) \in \Delta(x, A) : S \vdash \forall x (\varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \psi(x, \bar{a})) \}.$$

Definition 9 (Yeshkeyev A.R.). We say that S is *locally Δ -finitely based over models* if, for any $M \models S$, any finite tuple $\bar{a} \in M$, and any Δ -formula $\varphi(x, \bar{a})$ consistent with S , there exists a finite set $B_\varphi(x, \bar{a}) = \{\beta_1(x, \bar{a}), \dots, \beta_n(x, \bar{a})\} \subseteq \text{Con}_\Delta^S(\varphi/M)$ such that for every $\psi(x, \bar{a}) \in \Delta(x, \bar{a})$ we have

$$S \vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \quad \Leftrightarrow \quad S \vdash \forall x \left(\bigwedge_{i=1}^n \beta_i \rightarrow \psi \right).$$

Equivalently, the set of all Δ -consequences of φ over $\bar{a}$ is generated by a finite basis B_φ .

Remark 10. *This is a consequence-based finiteness notion: it does not require any completeness of types; it only states that Δ -consequences of each Δ -formula are finitely generated.*

Based on the above concepts, we obtain the following results:

Theorem 11. *Let T be a Jonsson theory, T^* be its center. If T^* is ω -stable and locally E -finitely based over models, then T is perfect.*

Theorem 12. *Let T be an $\exists$ -complete hereditary Jonsson theory, and let $K \subseteq E_T$, where E_T is the class of all existentially closed models of T . Let $[\Delta] \in JSp(K)_{/\bowtie}$, and let $[\bar{\Delta}]$ be a permissible enrichment $\odot$ (see [2]) of $[\Delta]$. Let $[\bar{\Delta}]^*$ be the center of $[\bar{\Delta}]$. If $[\bar{\Delta}]^*$ is P - λ -stable (in the sense of [3]) and locally E -finitely based over models, then $[\bar{\Delta}]$ is perfect.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22686827).

Keywords: Jonsson theory, semantic model, center, perfect theory, hereditary theory, Jonsson spectrum, Δ -consequences of a formula, local Δ -finite basing over models

2020 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C68

References

- [1] Barwise, J. *Teoriya modelei: spravochnaia kniga po matematicheskoi logike. Chast 1 [Model theory: Handbook of mathematical logic. Part 1]*, Izdatelstvo Nauka, Moscow [in Russian] (1982).
- [2] Yeshkeyev A.R. *Theories and their models*, Volume 1,2., Karaganda (2024). [in Russian]
- [3] Mustafin T.G., Nurmagambetov T.A. O P -stabilnosti polnykh teorii [On P -stability of complete theories, *Strukturnye svoystva algebraicheskikh sistem: sbornik nauchnykh trudov. Karaganda, KarGU [Structural properties of algebraic systems: collection of scientific papers. Karaganda, KarSU]*, (1990), 88–100. [in Russian]

The property of positive fragments of almost Δ -Jonsson sets

A.R. YESHKEYEV¹, G.E. ZHUMABEKOVA², G.S. DUISENBKOVA³

^{1,2,3}*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*

¹aibat.kz@gmail.com, ²zhumabekovag1990@mail.ru, ³gulbanu.duysenbekova@mail.ru

Let At be the set of atomic formulas of a given language. Denote by $B^+(At)$ the closure of At under positive Boolean combinations (conjunction and disjunction), including all atomic formulas, their subformulas, and variable substitutions. Let $Q(B^+(At))$ be the set of formulas in prenex normal form obtained by applying quantifiers ($\forall$ and $\exists$) to $B^+(At)$.

A formula is called *positive* if it belongs to the set $Q(B^+(At)) = L^+$.

A theory is called *positively axiomatizable* if all of its axioms are positive. Let $B(L^+)$ denote an arbitrary Boolean combination of formulas from L^+ .

Definition 1 (Yeshkeyev A.R.). A theory T is called a Δ -Jonsson (Δ -PJ) theory if it satisfies the following conditions:

1. T has an infinite model;
2. T is positively $\forall\exists$ -axiomatizable;
3. T has the Δ -JEP (joint embedding property);
4. T has the Δ -AP (amalgamation property).

When $\Delta = B(At)$, we obtain an ordinary Jonsson theory, except that it has only positive $\forall\exists$ -axioms.

Definition 2 (Yeshkeyev A.R.). Two Δ -PJ theories T_1 and T_2 are called Δ -PJ-cosemantic ($T_1 \bowtie_{PJ}^\Delta T_2$) if they have a common semantic model in the case of Jonsson theories, or a common universal domain if they are not Jonsson theories.

Definition 3 (Yeshkeyev A.R.). Let T be a Δ -PJ theory and C_T be its universal domain. Let $X \subseteq C_T$. The set X is called a Δ -Jonsson set of T if:

1. X is $\exists^+$ -definable;
2. $cl(X) = M \in PEC_T$, where PEC_T is the class of positively closed models of T .

Definition 4 (Yeshkeyev A.R.). A subset $X \subseteq C_T$ is called *almost Δ -Jonsson* if:

1. X is $\exists^+$ -definable;
2. $cl(X) = M \in Mod(T)$;
3. $Th_{\forall\exists}^+(M)$ is a Δ -Jonsson theory, where $Th_{\forall\exists}^+(M)$ is the set of all universally existential formulas of L^+ true in the model M .

Definition 5 (Yeshkeyev A.R.). Let T be a Δ -Jonsson theory. The *Kaiser class* K_T of T is the following class of L^+ -structures:

$$K_T = \{A \mid A \in \text{Mod}(T) \text{ and } Th_{\forall\exists}^+(A) \text{ is a } \Delta\text{-Jonsson theory in } L^+\}.$$

Definition 6 (Yeshkeyev A.R.). Two Δ -Jonsson theories T_1 and T_2 of L^+ are called *Kaiser-equivalent* if

$$K_{T_1} = K_{T_2}.$$

Definition 7 (Yeshkeyev A.R.). A Δ -Jonsson theory T is called Δ - K_T -normal if for every $M \in K_T$, the universal domain $C_{Th_{\forall\exists}^+(M)}$ of the positive fragment of M is a positively closed submodel of C_T .

Definition 8 (Yeshkeyev A.R.). Let T_1 and T_2 be Δ -Jonsson theories. We say that T_1 and T_2 are Δ -Jonsson syntactically similar ($T_1 \bowtie^{+S} T_2$) if there exists a bijection between the lattices of existential L^+ -formulas

$$f : E_n^+(T_1) \rightarrow E_n^+(T_2)$$

such that:

1. The restriction of f to $E_n^+(T_1)$ is a lattice isomorphism between $E_n^+(T_1)$ and $E_n^+(T_2)$, $n < \omega$;
2. $f(\exists^+ v_{n+1} \varphi) = \exists^+ v_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}^+(T)$, $n < \omega$;
3. $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Theorem 9. Let T be a Δ -normal Jonsson theory, C_T its universal domain, and $X_1, X_2 \subseteq T$ almost Δ -Jonsson sets of T . Let $Fr^+(X_1)$ and $Fr^+(X_2)$ denote the positive fragments of the almost Δ -Jonsson sets X_1 and X_2 , respectively. Then the following conditions are equivalent:

1. $Fr^+(X_1)$ and $Fr^+(X_2)$ are Δ -Jonsson syntactically similar;
2. $Fr^+(X_1)$ and $Fr^+(X_2)$ are Kaiser-equivalent.

Any undefined terminology used in this work can be found in [1].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: Δ -Jonsson (Δ -PJ) theory, Δ -Jonsson set, Kaiser class, Kaiser-equivalent, positive fragment, Δ -normal Jonsson theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C50, 03C52

References

- [1] Yeshkeyev A.R. *Theories and their models*, Volume 1,2., Karaganda (2024). [in Russian]

The connection between a K_T -normal Jonsson theory and an arbitrary fragment of its almost Jonsson set

A.R. YESHKEYEV¹, G.E. ZHUMABEKOVA², A.B. NURALY³

^{1,2,3}Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

¹aibat.kz@gmail.com, ²zhumabekovag1990@mail.ru, ³aknur.nuraly.04@gmail.com

Let L be a countable first-order language of signature σ , T be a Jonsson L -theory, and C_T be the semantic model of the theory T .

In the works of T. G. Mustafin it was shown that the semantic model of a Jonsson theory represents a special semantic invariant of this theory. This fact underlies the semantic approach, which is one of the key methods for the analysis of Jonsson theories. In the present study, we rely on this method to investigate both syntactic and semantic aspects of the corresponding models. The semantic model is considered via the system of formula-definable subsets, including almost theoretical sets.

Definition 1 (Yeshkeyev A.R.). Let $X \subseteq C_T$. The set X is called a *Jonsson set* of the theory T if the following conditions hold:

1. X is an $\exists$ -definable set;
2. $cl(X) = M \in E_T$, where E_T is the class of existentially closed models of the theory T .

The analysis of syntactic properties of Jonsson sets is usually accompanied by the study of the characteristics of the corresponding fragments of these sets.

Lemma 2 (Yeshkeyev A.R.). *For any Jonsson set X , its fragment $Fr(X)$ is a Jonsson theory.*

Definition 3 (Yeshkeyev A.R.). Let X be a Jonsson set for a Jonsson theory T . The set X is called a *theoretical set* if the universal closure of the existential formula defining X (see item 1 of Definition 1) is a finitely axiomatizable Jonsson theory.

Definition 4 (Yeshkeyev A.R.). A subset $X \subseteq C_T$ is called an *almost Jonsson set* if:

1. X is an $\exists$ -definable set;
2. $cl(X) = M \in Mod(T)$;
3. $Th_{\forall\exists}(M)$ is a Jonsson theory, where $Th_{\forall\exists}(M)$ is the set of all universal-existential sentences of the language L true in the model M .

Definition 5 (Yeshkeyev A.R.). A subset $X \subseteq C_T$ is called *almost theoretical* if:

1. X is an $\exists$ -definable set;
2. $cl(X) = M \in Mod(T)$;
3. $Th_{\forall\exists}(M)$ is a Jonsson theory;
4. the universal closure of the existential formula defining X (in item 1 of this definition) is a finitely axiomatizable Jonsson theory.

Definition 6 (Yeshkeyev A.R.). Let T be a Jonsson theory. The *Kaiser class* K_T of the theory T is the following class of L -structures:

$$K_T = \{A \mid A \in Mod(T) \text{ and } Th_{\forall\exists}(A) \text{ is a Jonsson theory}\}.$$

Definition 7 (Yeshkeyev A.R.). Jonsson theories T_1 and T_2 are called K_T -equivalent if $K_{T_1} = K_{T_2}$.

Definition 8 (Yeshkeyev A.R.). A Jonsson theory T is called K_T -normal if for any model $M \in K_T$, the semantic model $C_{Th_{\forall\exists}}(M)$ of the fragment of the model M is an existentially closed submodel of C_T .

Within the above concepts, the following results were obtained.

Theorem 9. *Let T be a Jonsson theory, $X \subseteq C_T$ be an almost Jonsson set of the theory T , $Fr(X) = Th_{\forall\exists}(M)$ be the fragment of the Jonsson set X , where $cl(X) = M \in K_T$. Then $Fr(X)$ is a K_T -normal Jonsson theory.*

Theorem 10. *Let T be a K_T -normal Jonsson theory, $X \subseteq C_T$ be an almost Jonsson set of the theory T , and $Fr(X)$ be the fragment of the Jonsson set X . Then T and $Fr(X)$ are K_T -equivalent.*

The undefined notions can be found in [1].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: Jonsson theory, Jonsson set, almost Jonsson set, almost theoretical set, K_T -normal theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C50, 03C52

References

- [1] Yeshkeyev A.R. *Theories and their models*, Volume 1,2., Karaganda (2024). [in Russian]

FRACTAL MODELS AND FRACTAL THEORIES

A.R. YESHKEYEV¹, N.V. POPOVA², A.K. ISSAEVA³

^{1,2,3}NLC “Buketov Karaganda National Research University”, Karaganda, Kazakhstan

¹aibat.kz@gmail.com, ²popovanv092024@gmail.com, ³isaevaiga@gmail.com

We introduce a model-theoretic framework for fractality in first-order logic via elementary endomorphisms on models and elementary syntactic endomorphisms on theories. The central object is the fractal corridor. We establish fractal soundness, fractal completeness and fractal compactness under coordinated syntactic and semantic fractality.

Let L be a first-order language and T a theory in L .

Let Fm_L denote the set of all L -formulas.

Definition 1. (Elementary Endomorphism of a Model) Let $M \models T$. An endomorphism $f : M \rightarrow M$ is called *elementary* if $\forall \varphi(\bar{x}) \in \text{Fm}_L \forall \bar{a} \in M \left(M \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow M \models \varphi(f(\bar{a})) \right)$.

Definition 2. (Syntactic endomorphism).

Let L be a first-order language. A mapping $\sigma : L \rightarrow L$ is called a syntactic endomorphism if it induces a map on terms and on quantifier-free formulas such that:

1. For every function symbol f , $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$.
2. For every predicate symbol P , $\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) = P(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$.
3. Boolean structure is preserved: $\sigma(\neg \varphi) = \neg \sigma(\varphi)$, $\sigma(\varphi \wedge \psi) = \sigma(\varphi) \wedge \sigma(\psi)$, and similarly for other connectives.

Definition 3. (Elementary syntactic endomorphism).

A syntactic endomorphism σ is called elementary if it extends to all formulas of L by the rules

$$\sigma(\forall x \varphi) = \forall x \sigma(\varphi), \quad \sigma(\exists x \varphi) = \exists x \sigma(\varphi),$$

and therefore acts on the whole set of sentences of L .

Definition 4. (T -elementary syntactic endomorphism).

Let T be a theory in L . An elementary syntactic endomorphism σ is called T -elementary if for every sentence φ

$$T \vdash \varphi \iff T \vdash \sigma(\varphi).$$

Fix finite systems $\Psi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, $\Phi = \{f_1, \dots, f_n\}$.

Definition 5. Definition (Syntactically fractal theory relative to Ψ).

Let T be a theory in a first-order language L , and let

$$\Psi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$$

be a finite family of T -elementary syntactic endomorphisms.

Define recursively a sequence of theories:

$$T[0] = T,$$

$$T[k+1] = \text{Th} \left(\bigcup_{j=1}^m \sigma_j(T[k]) \right), \quad k \geq 0.$$

The theory T is called syntactically fractal with respect to Ψ if there exists $n \geq 1$ such that

$$T[n] = T.$$

Definition 6. (Fractal Model) A model $M \models T$ is fractal relative to Φ if

$$M = \bigcup_{i=1}^n f_i[M],$$

where each f_i is an elementary endomorphism of M , and $n = 1 \Rightarrow f_1$ is not an automorphism.

Define inductively: $T[0] = T$, $T[k+1] = \bigcup_{j=1}^m \sigma_j(T[k])$.

Definition 7. (Fractal Corridor) The sequence $(T[k])_{k \geq 0}$ is the fractal corridor generated by Ψ . A formula φ is fractally provable if $\exists k (\varphi \in T[k])$.

Let $\mathbf{M}(T) = \{M \models T\}$.

Define the quadruple $\mathcal{F} = (T, \mathbf{M}(T), \Psi, \Phi)$.

We say that syntactic and semantic fractality are coordinated if there exists a mapping

$$\theta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

such that for every $M \models T$, every formula φ , and every tuple $\bar{a} \in M$,

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow M \models \sigma_j(\varphi)(f_{\theta(j)}(\bar{a})).$$

Let $\mathcal{F}_{\Psi, \Phi}(T) = \{M \models T \mid M \text{ fractal relative to } \Phi\}$.

Theorem 8. (Fractal Soundness) If $\mathcal{F}$ is coordinated, then

$$T \vdash_{\Psi} \varphi \Rightarrow \forall M \in \mathcal{F}_{\Psi, \Phi}(T) (M \models \varphi).$$

Theorem 9. (Fractal Completeness) If $\mathcal{F}$ is coordinated, then

$$T \vdash_{\Psi} \varphi \iff \forall M \in \mathcal{F}_{\Psi, \Phi}(T) (M \models \varphi).$$

Theorem 10. (Fractal Compactness) Let $\Sigma \subseteq \text{Fm}_L$. If every finite $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ is realized in some model $M \in \mathcal{F}_{\Psi, \Phi}(T)$, then there exists $M \in \mathcal{F}_{\Psi, \Phi}(T)$ such that $M \models \Sigma$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: first-order logic, fractal model, elementary endomorphism, syntactic fractality, semantic fractality, fractal completeness, model theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C50, 03C35

REFERENCES

- [1] Mandelbrot B. B., Llosa J. M. *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company (1982).
 [2] Yeshkeyev A.R. *Theories and their models.*, izd. KarU, Karaganda (2024). Volume 1,2. [in Russian]

Very weak solutions to the Schrödinger equation for Sturm-Liouville operator with singular coefficients

A. YESKERMESSULY

Altynsarin University, Arkalyk, Kazakhstan

alibek.yeskermessuly@gmail.com

We consider the non-homogeneous Schrödinger equation with initial and boundary conditions

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + a(t)\mathcal{L}^s u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times (0, 1), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in (0, 1), \\ u(t, 0) = 0 = u(t, 1), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

where $a(t) \geq a_0 > 0$ for $t \in [0, T]$, $a \in L^\infty[0, T]$, and $s \in \mathbb{R}$. The operator $\mathcal{L}$ is defined by

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x), \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

with potential $q = \nu' \geq 0$, where $\nu \in L^2(0, 1)$.

Under the additional assumption $q \in L^\infty(0, 1)$, we establish well-posedness of problem (1) in Sobolev spaces associated with the operator $\mathcal{L}$ using spectral decomposition and energy estimates. The analysis relies on techniques developed in [2], adapted to the present Sturm–Liouville framework.

We further study problem (1) in the case $s = 1$, allowing the coefficients a , q , and the initial data u_0 to be distributions. Since the equation involves products of distributions, it is not, in general, well-defined in the classical distributional sense. To address this difficulty, we employ the notion of very weak solutions introduced in [1], combined with the spectral and energy methods from [2].

We prove existence, uniqueness, and consistency of very weak solutions. In particular, we show that whenever the coefficients and data are sufficiently regular to guarantee classical well-posedness, the corresponding very weak solutions converge to the unique classical solution. Hence, the very weak framework provides a consistent extension of the classical theory to the case of singular coefficients.

The complete results and proofs are presented in [3].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23486342).

Keywords: Schrödinger equation, Sturm-Liouville, singular coefficient, very weak solutions.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B24, 35K20

References

- [1] Garetto C., Ruzhansky M. Hyperbolic second order equations with non-regular time-dependent coefficients, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **217**: no. 1 (2015), pp. 113–154.
 [2] Ruzhansky M., Shaimardan S., Yeskermessuly A. Wave equation for Sturm-Liouville operator with singular potentials, *J. Math. Anal. Appl.*, **531**: 1, 2 (2024), 127783.
 [3] Ruzhansky M., Yeskermessuly A. Schrödinger equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential, *Z. Anal. Anwend.*, **44**: no. 1/2 (2025), pp. 97–120.

Stability of L^p -Poincaré and Heisenberg-Pauli-Weyl inequalities with applications to spectral gaps

N.A. YESSIRKEGENOV

KIMEP University, Almaty, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

nurgissa.yessirkegenov@gmail.com

In this talk, we present our recent results on sharp remainder terms for weighted Hardy–Poincaré type inequalities, covering general non-radial weights and explicit sharp constants. As applications, we derive sharp remainder formulae for the L^p -Poincaré inequality and the L^p -Heisenberg–Pauli–Weyl inequality. We conclude by discussing stability results and applications to spectral gaps and nonlinear parabolic partial differential equations. The talk is based on joint works with Y. Shaimerdenov and A. Zhangirbayev [1,2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490970).

Keywords: Poincaré inequality, Heisenberg-Pauli-Weyl inequality, stability results, spectral gaps, nonlinear parabolic partial differential equations.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D10, 35J60, 60E15

References

[1] Shaimerdenov Y., Yessirkegenov N., Zhangirbayev A. Sharp remainder terms and stability of weighted Hardy-Poincaré and Heisenberg-Pauli-Weyl inequalities related to the Baouendi-Grushin operator, *arXiv preprint arXiv:2508.16380*, (2025).

[2] Yessirkegenov N., Zhangirbayev A. Stability of the L^p -Poincaré inequality for the Lebesgue and Gaussian probability measures with explicit geometric dependence and applications to spectral gaps, *arXiv preprint arXiv:2602.05968*, (2026).

Optimal control problem in inverse boundary regime for a pseudoparabolic equation

T.K. YULDASHEV¹, Zh.Zh. SHERMAMATOV²

¹*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

²*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan*

¹tursun.k.yuldashev@gmail.com, ²jshermamatov@oshsu.kg

Many real-world problems reduce to finding an optimal control function along with the corresponding state and redefinition functions. A wide range of analytical and numerical methods has been developed to solve such problems effectively across disciplines in science and engineering (see, for example [1]–[8]).

In this study, we consider an inverse optimal control problem for a pseudoparabolic equation involving a nonlinear control function in a two-point boundary condition.

In the domain $\Omega \equiv (0, T) \times (0, 1)$ we consider the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^5}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) U(t, x) = b(t) g(x) + f(t, x) \quad (1)$$

with boundary value conditions

$$\alpha(t)U(0, x) + \omega\beta(t)U(T, x) = \delta(x - \eta(t)) \varphi(t, x, p(t)), \quad (2)$$

$$U(t, 1) = 0, \quad U_{xx}(t, 0) = 0, \quad (3)$$

$$U_x(t, 0) = U_x(t, 1), \quad U_{xxx}(t, 0) = U_{xxx}(t, 1), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

and additional condition

$$U(t_1, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t_1 < T,$$

where $\varphi(t, x, p(t))$ is nonlinear function depending from control function $p(t)$, $f(t, x)$ is given function, $g(x)$ is redefinition function, $\alpha(t) \neq 0$, $\beta(t) \neq 0$ are given real functions, ω is real nonzero parameter.

The function $\eta(t) \in C[0, T]$ describes the change in the position of a moving point source in the range from zero to 1 and is defined as the solution to the following Cauchy problem

$$\eta'(t) = \tau(t, \eta(t)), \quad \eta(0) = \eta_0 = \text{const},$$

where $\tau(t, \eta) \in C^{0,1}(\Omega)$.

We consider the control function $p(t) \in \{p : |p(t)| \leq M^*, t \in [0, T], 0 < M^* = \text{const}\}$ and following functional of quality

$$J[p] = \int_0^1 [U(T, y) - \xi(y)]^2 dy + \gamma_1 \int_0^T p^2(t) dt + \gamma_2 \int_0^T \eta^2(t) dt, \quad (5)$$

where $0 < \gamma_\kappa = \text{const}$, $\kappa = 1, 2$ and $\xi(x)$ is given continuous function.

Problem. We find a triple of functions $\{U(t, x), g(x), p(t)\}$, first of which satisfies the differential equation (1), the two-point boundary condition (2), the Samarskii–Ionkin type boundary conditions (3), (4), belongs to the class of functions

$$U \in C_{t,x}^{1,3}(\overline{\Omega}), \quad U_{txxxx} \in C(\Omega), \quad U_{xxxx} \in C(\Omega),$$

and the function $p(t) \in \{p : |p(t)| \leq M^*\}$ delivers a minimum to functional (5).

The optimal control problem for the differential equations has many applications in various fields of science, engineering and technology. As a possible application, we give one example. Consider the technological process of production in metallurgy (to be specific, consider the production of aluminum). The production process consists of four cycles. At the beginning of the first cycle, the initial data is unknown. Because the raw material undergoes the firing process and only after that enters the first technological cycle. Therefore, it will be correct to assume that the initial function is unknown. We will consider the boundary condition at the ends of the segment and call the function the redefinition function. The redefinition function contains a mobile control function. The fact is that after the first cycle, we determine the values of the state function from the sensor, i.e. the conformity of the product to the technical standard. If a deviation from the standard is detected in the quality of the manufactured products in the first intermediate stage, then we introduce control with the furnace temperature. After the second technological cycle, all this will be repeated. This approach will allow manufacturers to prepare high-quality products that meet technical standards. The producing aluminum are subjected to stamping and turning treatments in different factories. A small defect leads to a major disruption in the preparation of products.

By using Fourier series method, the scalar equation and countable system of nonlinear functional integral equations of complex form are derived with respect to control function. It is studied the properties of eigenfunctions and unique solvability of scalar and countable system of nonlinear functional integral equations with respect to state function. It is derived the necessary optimality conditions. The equations with product of two nonlinear functions are obtained for solving control function. The Picar iteration process is built. It is obtained the desire control function. The uniform convergence of Fourier series is proved. The results of this work will be make it possible to determine the solutions of huge specter of optimal control problems. Particularly, the results obtained in this work will allow us in the future to investigate direct and inverse optimal control problems for other kind of partial differential equations of mathematical physics with different quality functionals.

Keywords: optimal control problem, state function, functional of quality, redefinition function, control function.

2020 Mathematics Subject Classification: 35G30, 35S15, 49J20, 49K20

References

- [1] Abdullayev V.M. Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, **44**:2 (2018), 171–186.
- [2] Albeverio S., Alimov Sh.A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, **57**:1 (2008), 58–68.
- [3] Ashirbaev B.Y., Yuldashev T.K. Derivation of a controllability criteria for a linear singularly perturbed discrete system with small step, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:3 (2024) 938–948. <https://doi.org/10.1134/S1995080224600547>
- [4] Azamov A.A., Ibragimov G.I., Mamayusupov K., Ruzibaev M.B. On the stability and null controllability of an infinite system of linear differential equations, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2021; <https://doi.org/10.1007/s10883-021-09587-6>
- [5] Azamov A.A., Ruziboev M.B. The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **77**:2 (2013), 220–224.
- [6] Kerimbekov A.K., Abdylidaeva E.F. On the solvability of the tracking problem in nonlinear vector optimization of oscillatory processes, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki*, **30** :2 (2024), 103–115. [in Russian]
- [7] Mahmudov E.N. Infimal convolution and duality in convex optimal control problems with second order evolution differential inclusions, *Evolution Equations and Control Theory*, **10** :1 (2021), 37–59.
- [8] Ramazanov A.T., Abdullozhonova A.N., Yuldashev T.K. Optimal mobile control in inverse problem for Barenblatt–Zhel'tov–Kochina type fractional order equation, *Lobachevskii Journal of Mathematics* **46** :1 (2025), 488–501. <https://doi.org/10.1134/S1995080224608087>

Estimation for Discrete Hardy-Littlewood Maximal Operator on Discrete Weighted Morrey Spaces

Z. ZAHIR¹, T. DINASYL²

^{1,2}L.N Gumilyov Eurasian National university, Astana, Kazakhstan

¹zabihullahzahir116@Gmail.com, ²dinasyltalas03@gmail.com

Definition 1. For $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ and $N \in \mathbb{N}$, we define the set:

$S(m, N) = \{k \in \mathbb{Z}^n : \|k - m\|_\infty \leq N\}$, where $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \{\max |x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ for $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Let $|S|$ denote the cardinality of the set S . Then $|S(m, N)| = (2N + 1)^n$ for all $m \in \mathbb{Z}^n$ and $N \in \mathbb{N}$.

Definition 2. Let $x = \{x(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ be a sequence. The discrete Hardy-Littlewood Op maximal operator $\mathcal{M}$ is define by

$$\mathcal{M}x(m) := \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)|, \quad x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{Z})} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Given $1 \leq p \leq q < \infty$, we define the discrete weighted Morrey space $\ell^{p,q}(\mathbb{Z}^d)$ to be the space of all sequences $x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ for which the norm is finite:

$$\|x\|_{\ell_q^p(\omega)} := \sup_{m \in \mathbb{Z}^d, N \in \mathbb{N}} \left(\omega |S_{m,N}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)|^p \omega(k) \right)^{1/p} \right) < \infty,$$

where $\omega(S_{m,N}) := \sum_{k \in S_{m,N}} \omega(k)$.

Definition 3. For $1 < p < \infty$, a discrete weight ω is said to belong to the discrete Muckenhoupt class $A_p = A_p(\mathbb{Z}^d)$ if

$$[\omega]_{A_p(\mathbb{Z})} := \sup_{J \subset \mathbb{Z}^d} \left(\frac{1}{|J|} \sum_{n \in J} \omega(n) \right) \left(\frac{1}{|J|} \sum_{n \in J} \omega(n)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} < \infty, \quad (1)$$

Theorem 4. Let $1 < p < \infty$ and $\omega \in A_p$. If $x \in \ell_p^\infty(\omega)$, then $Mx \in \ell_\infty$ and there exists a positive constant C such that $\|Mx\|_{\ell_\infty} \leq C \|x\|_{\ell_p^\infty(\omega)}$.

Theorem 5. Let $1 < p \leq q < \infty$, $\omega \in A_p$, and $x \in \ell_p^q(\omega)$. Then there exists a positive constant C such that $\|Mx\|_{\ell_p^q(\omega)} \leq C \|x\|_{\ell_p^q(\omega)}$.

References

[1] Hao X., Yang S., Li B. Hardy- Littlewood Maximal Operator Discrete Weighted Morrey Spaces arXiv:2309.00804v1, 2 sep (2023), 1–19

On Besov's Problem

M.A. ZAIGHUM¹, E.D. NURSULTANOV², D. SURAGAN³

Heriot Watt International Campus, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

m.asad_zaighum@hw.ac.uk

This talk aims to offer a thorough introduction to grand Besov spaces, a natural and robust extension of the classical Besov scale that integrates the grand Lebesgue spaces framework. These generalized spaces excel at capturing subtle borderline phenomena in harmonic analysis, partial differential equations, and approximation theory.

The presentation focuses on the zero-smoothness case ($s = 0$). In this critical setting, we deliver a positive solution to Besov's problem, addressing embeddings and characterizations of zero-smoothness Besov spaces in connection with Lorentz spaces. Our method also enhances several classical embedding results.

2020 Mathematics Subject Classification: 42B15; 42B35

On the Stability of a Finite Difference Scheme for Time–Space Fractional Diffusion–Wave Equations

R.E. ZHAILYBAYEV

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

raiym.zhailybayev@nu.edu.kz

In recent years, fractional calculus and fractional analysis have received increasing attention from research communities and have been studied extensively.

We consider the following equation

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta} \quad (1)$$

where $0 < \alpha, \beta \leq 2$, $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.

There are several definitions of fractional derivatives; the best known are the definitions of Riemann-Liouville, Caputo, and Grunwald-Letnikov. For more details, we refer to [1]. In this work, we use the Grunwald-Letnikov definition of the fractional derivative.

Definition 1. The Grunwald-Letnikov fractional derivative of order α of a function $f(x)$ is defined as:

$$(D_t^\alpha f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (h)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} f(x-kh) \quad (2)$$

where $h = \frac{x-x_0}{N}$, and $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function.

Remark 2. $\Gamma(-\alpha)$ is not defined for $\alpha \in \mathbb{N}$ and requires the calculation of large numbers, so it is necessary to take

$$\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(-\alpha)}{k!} \quad (3)$$

The discrete analogue of the Grunwald-Letnikov fractional derivative Definition 1:

$$(D^\alpha f)(x) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} n^{n+1-k} u_{i,j}^{(\alpha_k)} \quad (4)$$

Using equation (4), we find the finite-difference scheme for equation (1):

$$\frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u_i^{n+1-k} = \frac{1}{\Delta x^\beta} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{\beta}{k} u_{i+1-k}^n \quad (5)$$

From equation (5) we can obtain the explicit scheme:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta t^\beta} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{\beta}{k} u_{i+1-k}^n - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u_i^{n+1-k} \quad (6)$$

Theorem 3. The stability condition for the finite difference scheme (5) in the homogeneous case is

$$\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^\beta} \leq \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta}{2}} \quad (7)$$

where $0 < \alpha, \beta \leq 2$.

Corollary 4. For $\alpha = 1, \beta = 1$, the stability condition for the finite difference scheme of the equation takes the form

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Corollary 5. For $\alpha = 1, \beta = 2$, the stability condition for the finite difference scheme of the equation takes the form

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Corollary 6. For $\alpha = 2, \beta = 2$, the stability condition for the finite difference scheme of the equation takes the form

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1$$

Therefore, we generalize a stability condition that was given in [2].

Keywords: subdiffusion, finite difference method, Grunwald-Letnikov fractional derivative, stability condition.

2020 Mathematics Subject Classification: 65N06, 65N12, 35R11

References

- [1] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego (1999).
- [2] Issakhov A.A., Abylkassymova A.B., Zhailybaev R.E., Yun S.L. Stability Condition Of Finite Difference Schemes For Parabolic And Hyperbolic Equations: A Comparison With Finite Volume Methods For Fractional-order Diffusion, *Herald of the Kazakh-British Technical University*, **22:1** (2025), 184–196.

Distributive lattices of varieties of assosymmetric algebras

B. ZHAKHAYEV

SDU University, Almaty, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

bekzat.zhakhayev@sdu.edu.kz

An algebra is called *assosymmetric* algebra if $(a, b, c) = (a, c, b) = (b, a, c)$, where $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ is the associator of elements x, y and z . Assosymmetric algebras were studied in [1-4]. In 1976 Bokut [5] formulated the following question: to describe, in terms of identities, the varieties of linear algebras whose lattices of subvarieties are distributive. In [6] Ananin and Kemer proved that the lattice of subvarieties of the variety $\mathfrak{A}$ of associative algebras over a field K of characteristic zero is distributive if and only if the T -ideal of identities of $\mathfrak{A}$ contains an identity of the form $\alpha[x, y]y + \beta y[x, y] = 0$, where $\alpha, \beta \in K$ and $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

In this work, we investigated Bokut's question for the varieties of assosymmetric algebras.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{V}$ be a variety of assosymmetric algebras over a field K of characteristic zero. The lattice of subvarieties of the variety $\mathfrak{V}$ is distributive if and only if all algebras in $\mathfrak{V}$ satisfy the identities*

$$\alpha(aa)a + \beta(a, a, a) = 0,$$

$$\gamma((ab)a - (ba)a) + \delta((ab)a - (aa)b) = 0,$$

for some $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26199089)

Keywords: variety of algebras, lattice of subvarieties, distributive lattice, assosymmetric algebra

2020 Mathematics Subject Classification: 17D99, 20C30

References

- [1] Kleinfeld E., Assosymmetric rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 983–986
- [2] Boers A.H., On assosymmetric rings. Indag. Math. (N.S.) 5 (1994) 9–27
- [3] Hentzel I.R., Jacobs D.P., Peresi L.A., A basis for Free Assosymmetric Algebras. J. Algebra 183 (1996) 306–318
- [4] Dzhumadil'daev A.S., Zhakhayev B.K., Abdykassymova S.A., Assosymmetric Operad, Communications in Mathematics 30 (2022), no. 1, 175–190
- [5] Dniester Notebook, Institute of Mathematics SB AS USSR, Novosibirsk, 1976 (in Russian)
- [6] Ananin A.Z., Kemer A.R., Varieties of associative algebras whose lattices of subvarieties are distributive, Sibirsk. Mat. Ž. 17.4 (1976), pp. 723–730 (in Russian)

On weighted estimates for certain quasilinear operators

N.S. ZHANGABERGENOVA¹, A.M. TEMIRKHANOVA²

^{1,2} L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

¹zhanabergenova.ns@gmail.com, ²ainura-t@yandex.kz

Let $0 < q, p, r < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$. Let $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ be weight sequences, i.e., positive sequences of real numbers. We denote by $l_{p,v}$ the space of sequences $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ of non-negative real numbers such that $\|vf\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

For any non-negative $f \in l_{p,v}$ we consider the following iterated discrete Hardy-type inequality with three weights

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q (K^{\pm} f)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} (v_i f_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

where C is a positive constant independent of f and K is a quasilinear operators defined as follows

$$(K^{-} f)_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (K^{+} f)_n = \left(\sum_{k=1}^n a_{n,k} \left(\sum_{i=1}^k f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

where $a_{k,n}$ is a non-negative matrix. We provide a characterization of the inequality (1) in the general case of the matrix when $0 < p \leq r < q < \infty$. These kinds of operators were considered for the first time in [1].

For the parameter ratio $0 < r < q < p < \infty$, we have been studied the inequality (1) under the following matrix assumption: there exist $d \geq 1$, a sequence of positive numbers $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ and a non-negative matrix $(b_{i,j})$, where $b_{i,j}$ is almost non-decreasing in i and almost non-increasing in j such that the inequalities

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i) \leq a_{i,j} \leq d(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i)$$

hold for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

Furthermore, we explore the significant impacts of our results on the analysis of bilinear inequalities, demonstrating their practical applications and importance in the field.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22684768).

Keywords: Hardy-type operator; quasilinear operator; weight sequence; weighted Lebesgue space.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D15, 26D20

References

[1] Zhangabergenova N., Temirkhanova A. Weighted inequalities for quasilinear matrix operators, *Journal of Mathematical Sciences*, **291**:1 (2025), 156–165.

On a solution of the periodic boundary value problem for a hyperbolic equation with a fractional derivative

B.B. ZHANTASSOVA¹, N.T. ORUMBAYEVA², A. AMANGELDI³, A. ZHAKSYLYK⁴

^{1,2,3,4}*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*

¹zh.botagoz.b@gmail.com, ²orumbayevanurgul@gmail.com, ³ai.amangeldy@mail.ru,

⁴aru.jan6@mail.ru

This work investigates a periodic boundary value problem for a hyperbolic equation with the Riemann–Liouville fractional derivative. Such equations are widely used in modeling complex physical processes with memory effects, including viscoelasticity, anomalous diffusion, and thermoviscoelasticity phenomena. The problem is formulated as follows:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial w}{\partial t} + B(t, x) D_t^{\mu} w + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = [0, T] \times [0, X], \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$w(0, x) = 0, \quad x \in [0, X], \quad w(t, 0) = w(t, X), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

where $A(t, x)$ and $B(t, x)$ are $n \times n$ matrices continuous on Ω with $\|A\| \leq \alpha$, $\|B\| \leq \beta$, $f(t, x)$ is continuous, $0 < \mu < 1$, and D_t^{μ} is the Riemann–Liouville fractional derivative.

To solve this problem, we introduce a new function $u(t, x) = \partial w / \partial t$, and partition the spatial domain $[0, X]$ into N parts with step $h = X/N$: $x_r = (r - 1)h$, $r = 1, \dots, N$. The restrictions $u_r(t, x) = u(t, x)$ for $x \in [(r - 1)h, rh)$ satisfy:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} = A(t, x)u_r + B(t, x)D_t^\mu \left(\int_0^t u_r d\tau \right) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega_r, \quad (3)$$

with boundary conditions ensuring continuity and periodicity.

We introduce the substitution $v_r(t, x) = u_r(t, x) - \lambda_r(t)$, where $\lambda_r(t) = u_r(t, (r - 1)h)$. This leads to a system of integro-differential equations. Passing to the limit at partition points yields a matrix equation for $\lambda(t) = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)'$:

$$Q(h)\lambda(t) = -\Lambda(t, h, \lambda) - V_1(t, h, v) - V_2(t, h, v) - F(t, h), \quad (4)$$

where $Q(h)$ is an $(nN \times nN)$ matrix. If $Q(h)$ is invertible with $\| [Q(h)]^{-1} \| < \gamma(h)$, we propose an iterative algorithm:

Step 0: Set $v_r^{(0)}(t, x) = 0$, find $\lambda_r^{(0)}(t)$ from (4), then find $v_r^{(0)}(t, x)$ from the integral equation.

Step k: For $k \geq 1$, find $\lambda_r^{(k)}(t)$ from (4) using $v_r^{(k-1)}$, then find $v_r^{(k)}(t, x)$ using $\lambda_r^{(k)}(t)$.

The convergence of the algorithm is established by the following theorem.

Theorem 1. *Let $Q(h)$ be invertible and let*

$$q(h) = h^2 \max\{1, h\} \left(\alpha + \frac{\beta T^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} \right)^2 E_{1-\mu}(h\gamma(h) \max\{1, h\} \cdot \beta \cdot T^{1-\mu}) e^{h(\alpha + \frac{\beta T^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)})} < 1,$$

where $E_{1-\mu}$ is the Mittag-Leffler function. Then the boundary value problem (1)–(2) has a unique solution $w^*(t, x)$, and the following estimate holds:

$$\begin{aligned} \|w^*(t, x) - w^{(k)}(t, x)\| &\leq T \left(1 + h \max\{1, h\} \left(\alpha + \frac{\beta T^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times E_{1-\mu}(h\gamma(h) \max\{1, h\} \cdot \beta \cdot T^{1-\mu}) \right) \frac{[q(h)]^k}{1 - q(h)} M(h) \|f(t, x)\|_1. \end{aligned}$$

The proof uses the generalized Gronwall-Bellman inequality for fractional equations. Estimates are derived for successive differences $\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|$ and $\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\|$, leading to contraction in v when $q(h) < 1$. Uniqueness follows similarly.

Conclusion. An iterative algorithm for solving the periodic boundary value problem of a hyperbolic equation with the Riemann–Liouville fractional derivative has been proposed. A theorem on the existence and uniqueness of the solution has been proved, and convergence rate estimates have been established. The results can be applied to modeling physical processes with memory and periodic boundary conditions.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488729, 2024-2026).

Keywords: hyperbolic equation, Riemann–Liouville fractional derivative, periodic boundary value problem, integro-differential equations, algorithm, Gronwall–Bellman inequality.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B05, 35A05, 35A20, 35A22.

References

- [1] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science (1993).
- [2] Dzhumabayev, D. S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29:1** (1989), 34–46.

[3] Ye, H., Gao, J., Ding, Y. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **328** (2007), 1075–1081.

[4] Orumbayeva, N. T., Assanova, A. T., Keldibekova, A. B. On an algorithm of finding an approximate solution of a periodic problem for a third-order differential equation, *Eurasian Mathematical Journal*, **13:1** (2022), 69–85.

Solution of the Dirichlet problem for the heat equation with a discontinuous coefficient and general conjugation conditions

S.D. ZHAPPAROVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

zhapparova.saule@gmail.com

An initial-boundary value problem for the heat equation with a discontinuous coefficient is considered

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

in the domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = \{(x, t) : l_0 < x < l_1, 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x, t) : l_1 < x < l_2, 0 < t < T\}$, ($i = 1, 2$), with initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad l_0 \leq x \leq l_2, \quad (2)$$

boundary conditions of the form

$$u(l_0, t) = u(l_2, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

and conjugation conditions

$$\begin{cases} k_1 u_x(l_1 - 0, t) + h_1 u(l_1 - 0, t) = k_2 u_x(l_1 + 0, t) + h_2 u(l_1 + 0, t), \\ \theta_1 u(l_1 - 0, t) = \theta_2 u(l_1 + 0, t), \end{cases} \quad (4)$$

where the coefficients $a_i^2 = \frac{k_i}{c_i \rho_i}$, $k_i > 0$, ($i = 1, 2$), $h_i > 0$, $\theta_i > 0$, k_i — thermal conductivity coefficient, c_i — specific heat capacity, ρ_i — density, a_i^2 — thermal diffusivity coefficient. Condition (4) follows from the general form condition

$$\begin{cases} a_{11} u_x(l_1 - 0, t) + a_{12} u_x(l_1 + 0, t) + a_{13} u(l_1 - 0, t) + a_{14} u(l_1 + 0, t) = 0, \\ a_{21} u_x(l_1 - 0, t) + a_{22} u_x(l_1 + 0, t) + a_{23} u(l_1 - 0, t) + a_{24} u(l_1 + 0, t) = 0, \end{cases}$$

in the case where $A_{12} = 0$, where $A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$, $1 \leq i < j \leq 4$, are the minors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

The theorem on the existence and uniqueness of a classical solution to the problem (1)-(4) is proved.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: heat equation, discontinuous coefficients, eigenvalues, eigenfunctions, method of separation of variables.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20, 35P10

Category of dynamic systems with special solutions (with dominance)

Zh.K. ZHEENTAeva¹, A.A. ZHAKYPOVA²

^{1,2}Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykov, Osh, Kyrgyzstan

¹zhzhk.kumu@gmail.com, ²aisalkyn1987@gmail.com

According to the concept being developed in Kyrgyzstan (see [1]), each direction of mathematical research is associated with some effect, and the results obtained, especially the phenomenon, are consequences of it. Also, along with the category *Set*, it was proposed to consider the category *Func*, which was previously used implicitly.

We have identified the dominance effect in the theory of dynamical systems and presented some results obtained by other authors and by us as consequences of this effect.

By the approach of category theory, objects of study can be represented in various equivalent forms, and equations are classified not according to recording methods, but according to the properties of solutions.

We proposed to consider delay-differential equations and equivalent operator-difference equations as forms of single objects with corresponding transformations.

The authors [2], [3], [4] proved that differential equations with small delay have "special" (slow-varying) solutions which approximate all solutions asymptotically. We [5] developed the method of splitting which identified the condition of dominance: one of coefficients of an equation is positive and "sufficiently" greater than others.

The purpose of the report is unifying and enlarging the class of initial value problems for linear dynamic equations with special solutions. The peculiarity of such class is that presence of such phenomena is provided not by signs of coefficients but by absolute constants and domains of coefficients. The notion of asymptotical equivalence and the phenomenon "the dimension of the quotient space is less than one of the initial space" are also considered. These results can be applied for improving results on solutions of initial value problems for linear differential equations with bounded delay.

The *Equa-Func-Volt* category of "initial problems for dynamic systems" is considered a subcategory of the known category *Equa-Func* of equations for functions, which, in turn, is a subcategory of the category *Equa* of equations. The category *Equa-Func-Volt-Dom* is proposed.

Acknowledgments: We thank the staff of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic for useful discussions.

Keywords: difference equation, delay-differential equation, special solution, initial value problem, asymptotic equivalence.

2020 Mathematics Subject Classification: 34E05

References

- [1] Borubaev A., Pankov P. *Computer presentation of kinematic topological spaces*. Qingdao University, Qingdao (2024).
- [2] Myshkis A.D. *Linear Differential Equations with Retarded Arguments (in Russian)*, Nauka, Moscow (1972).
- [3] Driver R.D. Linear differential systems with small delays, *Journal of Differential Equations*, **21(1)** (2025), 148–166.
- [4] Pankov P.S. Asymptotical finite-dimensionality of space of solutions of one class of systems with delay (in Russian), *Differential Equations, Minsk*, **13(4)** (1977), 455–462.
- [5] Zheentaeva Zh. K. *Study of asymptotic in solutions of equations with small delay (in Russian)*. Lap Lambert Academic Publishing, Saarbrücken (2017).

Category of topological spaces with movement of stretched objects

A.H. ZHORAIEV¹, D.B. ISAEV²

^{1,2}Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykov, Osh, Kyrgyzstan

¹adaham.kumu@gmail.com, ²daniyarisaev2023@gmail.com

The most general category presenting the idea of continuity is *Top* of topological spaces. Its subcategory is the category *Unif* of uniform spaces, in turn, its subcategory is *Met* of metrical spaces. The category *Cntl* of controlled processes was proposed in [1].

As a codifying the ancient idea of controlled movement with bounded velocity and measuring "distance" by "time", the notion of kinematical space was introduced [2] and declared as subcategory *Kin* of *Met* and of *Cntl* in [1]:

Definition 1 (non-formal). A computer program is said to be a presentation of a computer kinematic space if:

P1) there is an (infinite) metrical space X of points and a set X_1 of display-presentable points being sufficiently dense in X ; P2) the user can pass from any point $x_1 \in X_1$ to any other point $x_2 \in X_1$ by a sequence of adjacent points in X_1 by their will; P3) the minimal time to reach x_2 from x_1 is (approximately) equal of the minimal time to reach x_1 from x_2 . The minimal time to pass from x_1 to x_2 is the kinematic distance between these points.

We [3], [4] proposed

Definition 2. There is a family P of connected subsets of the set X (we will call them passes); each pass has the positive length (time) and a family Q of connected subsets of the set X (we will call them things). (It means that a thing moves along a pass).

The space X is said to be a solid kinematic space if:

(G1) For each $x \in p \in P$ there exists such $q \in Q$ that $x \in q$ [a thing can be in each place of a pass]. (G2) For each $x_1 \neq x_2 \in X$ there exists such pass $p \in P$ that $x_1, x_2 \in p$ and the set of lengths of such p is bounded with a positive number below; this infimum is said to be the solid-kinematical distance in X between these points within things. (G3) For each $q_1 \neq q_2 \in Q$ there exists such pass $p \in P$ that $q_1, q_2 \in p$ and the set of lengths of such p is bounded with a positive number below; this infimum is said to be the solid kinematical distance in X between things p_1 and p_2 . (G4) If $x_1, x_2 \in p_1$ and $x_2, x_3 \in p_2$ then there exists such pass $p_3 \in P$ that $x_1, x_2, x_3 \in p_3$ and $length(p_3) \leq length(p_1) + length(p_2)$.

We propose to call the category of such spaces *Kin-Solid*.

Acknowledgments: We thank the staff of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic for mutual developing of "real movement in virtual spaces".

Keywords: virtual space, topological space, kinematic space, metric space, controlled movement.

2020 Mathematics Subject Classification: 54D05

References

- [1] Borubaev A., Pankov P. *Computer presentation of kinematic topological spaces*. Qingdao University, Qingdao (2024).
- [2] Borubaev A., Pankov P. *Computer presentation of kinematic topological spaces (in Russian)*. Kyrgyz State National University, Bishkek (1999).
- [3] Zhoraev A.H. Axiomatization of kinematical spaces, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR*, **1** (2021), 16–21.
- [4] Zhoraev A.H. Algorithm of controlled motion of stretched object on topological torus, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR*, **1** (2023), 70–75.

Stability of control systems with differentiable nonlinearity in the vicinity of a program manifold

S.S. ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

sailau.math@mail.ru

We select in the space $\mathbb{R}^n$ a simply connected domain $G(\rho)$:

$$G(\rho) = \{(t, x) : t \in I \wedge \|\omega(t, x)\| \leq \rho < \infty\}. \quad (1)$$

In this domain, we consider the problem of constructing automatic control systems with differentiable nonlinearity for a given smooth $(n-s)$ -dimensional program manifold $\Omega(t) : \Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$, in the following form [1]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) - B_1 \xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (2)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the vector of the object's state, $f \in \mathbb{R}^n$ is a vector function satisfying the conditions for the existence of a solution $x(t) = 0$, and $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times r}$ are matrices, $\omega \in \mathbb{R}^s$ ($s \leq n$) is a vector, $\xi \in \mathbb{R}^r$ is a vector function differentiable by σ satisfying a local quadratic connection

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \wedge 0 < \sigma^T \varphi(\sigma) &\leq \sigma^T K \sigma, \quad \forall \sigma \neq 0, \\ K_1 &\leq \frac{\partial \varphi(\sigma)}{\partial \sigma} \leq K_2, \\ K &= K^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}, \\ K_i &= K_i^T > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

It should be noted that the program manifold $\Omega(t)$ defined by the vector equation

$$\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0, \quad (4)$$

where an s -dimensional vector ω ($s \leq n$) is continuous in the domain (1), including the manifold $\Omega(t)$, together with its partial derivatives, and the Jacobian rank $H = \frac{\partial \omega}{\partial x}$ is equal to s at all points of $\Omega(t)$, is basically integral for the system

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (5)$$

The relation

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + H f(t, x) = F(t, x, \omega), \quad (6)$$

is valid for this system, where

$$H = \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

is the Jacobi matrix and $F(t, x, \omega)$ is a certain s -dimensional Erugin vector function, satisfying conditions $F(t, x, 0) \equiv 0$ [2,3].

Vector function $\varphi(\sigma)$ is essentially a control function for deviation from the program, since on the program manifold $\omega(t, x) = 0$ the function $\xi = \varphi(\sigma)$ vanishes and equation (2) takes the form (5). Hence, the manifold $\Omega(t)$ is an integral also for (2).

Taking into account that $\Omega(t)$ is integral for (2), taking into account (6), we obtain

$$\dot{\omega} = -A\omega - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty). \quad (7)$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (3), and

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \quad A \in \mathbb{R}^{s \times s},$$

$$H = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad B = HB_1.$$

Statement of the Problem. To get the condition of absolute stability of the control systems with differentiable nonlinearity in the vicinity of a program manifold.

For system (7), we construct a Lyapunov function of the following form

$$V(\omega) = \omega^T L \omega + 2\omega^T L_1 \varphi + \varphi^T L_2 \varphi + \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) \beta d\sigma > 0, \quad (8)$$

if the next conditions are met:

$$\left\| \begin{array}{cc} L & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{array} \right\| > 0, \quad \beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r) > 0. \quad (9)$$

The derivative of function (8) with respect to time t by virtue of system (7) using the S -procedure has the form

$$-\dot{V} = \omega^T G \omega + 2\omega^T G_1 \varphi + 2\omega^T G_2 \dot{\varphi} + \varphi^T G_3 \varphi + 2\varphi^T G_4 \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^T G_5 \dot{\varphi} + S_1 + S_2.$$

Here, G, G_i ($i = 1, \dots, 5$) are expressed in terms of the coefficients of system (7).

In order to have $-\dot{V} > 0$, it is sufficient to satisfy Sylvester's conditions:

$$\left\| \begin{array}{ccc} G & G_1 & G_2 \\ G_1^T & G_3 & G_4 \\ G_2^T & G_4^T & G_5 \end{array} \right\| > 0. \quad (10)$$

Theorem 1. Let the nonlinear differentiable function $\varphi(\sigma)$ satisfy conditions (3), $-A$ is a Hurwitz matrix, and conditions (9) are valid. Then, for the absolute stability of a control system with differentiable nonlinearity in the vicinity of the program manifold, it is sufficient to satisfy the Sylvester inequalities (10).

Funding: This results are supported by grant of the Ministry of Science and Higher Education of Republic Kazakhstan No. BR 31714735 for 2026–2028 years.

Keywords: stability, program manifold, control systems, Lyapunov function, differentiable nonlinearity.

2020 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

- [1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata, 1981.
- [2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 10, no. 6, pp. 659–670, 1952.
- [3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*, Gylm, Almaty, 1999.
- [4] Yakubovich V.A. Methods of the Theory of Absolute Stability, in *Methods of Research of Nonlinear Automatic Control Systems*, Nauka, Moscow, pp. 120–180, 1975.
- [5] Voronov A.A. *Stability, Controllability, and Observability*, Nauka, Moscow, 1979.
- [6] Yakubovich V.A. The method of matrix inequalities in the theory of stability of nonlinear controlled systems. II. Absolute stability in the class of nonlinearities with a condition on the derivative, *Avtomatica i Telemekhanika*, vol. 26, no. 4, pp. 577–590, 1965.

On a boundary value problem for a mixed-type equation of the second kind in an unbounded domain

R.T. ZUNNUNOV¹, A.A. KHUDOYOROV²

¹V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

¹zunnunov@mail.ru , ²xudoyorovanvar123@gmail.com

The research conducted by M.A. Lavrentiev, I.N. Vekua, F.I. Frankl, and others opens a new stage in the development of the theory of boundary value problems for mixed-type equations. The importance of the problem, in particular the Tricomi problem, is indicated in connection with transonic gas dynamics, with magnetohydrodynamic flows with a transition through the speed of sound and the Alphen speed, with the theory of infinitesimal bending of surfaces, and many other issues of mechanics. It should be noted that the overwhelming majority of publications on mixed-type equations relate to the study of boundary value problems for mixed-type equations of the first kind, that is, equations for which the line of change of type $y = 0$ is not a characteristic of the equation. Fundamental results in this direction were obtained by F. Tricomi [1], A.V. Bitsadze [2], M.S. Salakhitdinov [3], T.D. Juraev [4], A.M. Nakhushev [5], M.M. Smirnov [6], T.Sh. Kalmenev [7-8], O.A. Repin [9]. Boundary value problems for mixed-type equations of the second kind, that is, equations for which the line of change of type $y = 0$ is also a characteristic, have been relatively little studied, especially in unbounded domains. Several simple typical problems of transonic aerodynamics lead to the Tricomi boundary value problem, for which the domain lying in the elliptical part of the plane is a vertical half-strip. This paper examines the Tricomi problem for a mixed-type equation of the second kind:

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y |y|^m u_{yy} + \alpha |y|^{m-1} u_y = 0, \quad 1 \leq m < 2, m-1 < \alpha < 2, \quad (1)$$

in a mixed domain, the elliptic part of which is a vertical half-strip, and the hyperbolic part is a characteristic triangle. The parabolic line of change of type $y = 0$ is the envelope of the families of characteristics for equation (1). The uniqueness of the solution to the problem is proved using the extremum principle, and the existence of the solution is proved by the Green's function method and integral equations. Boundary value problems for equation (1) in the case of a bounded domain are studied in reference [6].

Keywords: mixed-type equation, unbounded domain, extremum principle, Green's function, integral equations.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10; 35R11; 35R10; 33C10; 35A08

References

- [1] Tricomi F. *On linear partial mixed-type differential equations of the second order*, Gostekhizdat, Moscow (1947).
- [2] Bitsadze A.V. *Mixed-type equations*, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, Moscow (1959).
- [3] Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. *Boundary value problems for a mixed-type equation with a spectral parameter*, FAN, Tashkent (1997).
- [4] Juraev T.D. *Boundary value problems for equations of mixed and mixed composite types*, FAN, Tashkent (1979).
- [5] Nakhushev A.M. *Shift problems for partial differential equations*, Nauka, Moscow (2006).
- [6] Smirnov M.M. *Mixed-type equations*, Vysshaya Shkola, Moscow (1985).
- [7] Kalmenev T.Sh. On the spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation, *Differential Equations*, **13**:8 (1997), 1718–1725.
- [8] Kalmenev T.Sh., M.A. Sadybekov M.A., Erzhanov N.E. A Criterion for the strong solvability of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation. General Case, *Differential Equations*, **29**:5 (1993), 870–875.
- [9] Repin O.A. The Tricomi problem for an equation of mixed type in a domain whose elliptic part is a half-strip, *Differential Equations*, **32**:4 (1996), 37–43.

САЛМАҚТЫҚ СОБОЛЕВ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ КУБТЫҚ ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ ТЕГІСТІГІ

А.М. СЛЯМҚАНОВА¹, Л.К. ЖАПСАРБАЕВА², А.К. КАСТРО КАСТИЛЬЯ³

^{1,2}Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана

³Назарбаев университеті, Астана

¹maksatovnaaru2002@gmail.com, ²leylazhk67@gmail.com

$H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r} dx)$ салмақтық Соболев кеңістігінде сызықтық емес Шредингер теңдеуін зерттейміз:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2 u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Бұл жұмыста (1) теңдеу үшін Коши есебінің тегістік қасиеттері салмақтық Соболев кеңістігінде зерттеледі. Дюамель формуласын қолдана отырып, (1) теңдеуді келесі интегралдық түрде жазып алуға болады:

$$u(x, t) = e^{-i\partial_x^2 t} u_0(x) - i \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} (|u|^2 u)(x, t') dt' =: e^{-i\partial_x^2 t} u_0(x) - iI(x, t). \quad (2)$$

Бізді келесідей тұжырымдауға болатын бейсызық тегістік қасиеттері қызықтырады, яғни $u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r} dx)$ бастапқы шарттарымен берілген кейбір $s > \frac{1}{4}$ үшін (2) формуламен ұсынылған (1) сызықтық емес есеп пен бастапқы шарттары бірдей болатын сызықтық есеп арасындағы айырым келесі теңсіздікті қанағаттандыруы керек:

$$\|i \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} (|u|^2 u)(x, t') dt'\|_{H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2(r+\delta)} dx)} \leq C(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r} dx)}) \quad (3)$$

Бұл бағалаулар Бона Л., Коррея С. жұмыстарында классикалық Соболев кеңістіктері үшін көрсетілген, біз салмақтық Соболев кеңістігін қарастырамыз.

Теорема 1. *Кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін $\frac{1}{4} < s$, $0 < r \leq s$ болсын. (4) бастапқы шарты бар теңдеудің шешімін $u \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r} dx)$, ал $u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r} dx)$ деп алсақ. Онда:*

$$I \in C([0, T]; H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2(r+\delta)} dx)), \quad (4)$$

мұндағы

$$0 < \delta < \min \left\{ s - r + \varepsilon, r \right\}. \quad (5)$$

Бұл (2) формуладағы сызықты емес интегралды бөлігінің сызықтық бөлікке қарағанда ε мәнге тегістігі жоғары екенін білдіреді.

Дюамель формуласына негізделген интегралдық тәсіл арқылы кубтық Шредингер теңдеуінің шешімінің тегістігі салмақтық $H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2(r+\delta)})$ Соболев кеңістігінде зерттелді. Алынған нәтижелер жаңа болып табылады. Сонымен қатар бұл нәтижелер дисперсиялық теңдеулерге қойылған Коши есептерін зерттеуге үлес қосып отыр.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (AP23489433 «Математический анализ нелинейных k-обобщенных уравнений Кортевега-де Фриза в весовых дробных пространствах Соболева») қаржыландырады.

Кілтті сөздер: тегістік, Шредингер теңдеуі, сызықты емес теңдеу, Соболев кеңістігі.

2020 Mathematics Subject Classification: 35B65, 46E35, 35A02

ӘДЕБИЕТ

[1] S. Correia, J. Drumond *Nonlinear smoothing for dispersive PDE: A unified approach*, J. Differ. Equ., (2020).

[2] J. L. Bona, G. Ponce, J.-C. Saut, C. Sparbera *Dispersive blow-up for nonlinear Schrödinger equations revisited*, J. Math. Pures Appl., (2014), 782–811.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

Д.К. ЖАЙДАКБАЕВА¹, Б.Т. КАЛИМБЕТОВ², В.Ф. САФОНОВ³

^{1,2}Южно-Казахстанский университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

³Московский энергетический институт (НИУ «МЭИ»), Москва, Россия

¹zhaydakbaevad@mail.ru, ²bkalimbetov@mail.ru, ³Singsaf@mpei.ru

Рассматривается интегро-дифференциальная система

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \beta(t) \right], \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t \in [0,1], \quad (1)$$

где $\beta(t) = \int_0^t \mu(\theta) d\theta$ – некоторая скалярная функция, а $\mu(t)$ – так называемое спектральное значение неоднородности (см., например, [1]). Ранее рассматривался скалярный случай такой задачи [1]. Не умаляя общности, будем рассматривать двумерный случай, т. е. будем считать, что в (1) $y = \{y_1(t), y_2(t)\}$ – неизвестная вектор-функция, $h(t) = \{h_1(t), h_2(t)\}$ – известная вектор-функция, $A(t) = (A^1(t), A^2(t))$ – матрица размера 2×2 , состоящая из двух двумерных столбцов $A^1(t)$ и $A^2(t)$. Как было указано в [2], структура асимптотики решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) существенно зависит от поведения спектра $\{\lambda_j(t), j = 1, 2\}$, матрицы $A(t)$ и спектрального значения $\mu(t)$ неоднородности $h(t)e^{\frac{1}{\varepsilon}\beta(t)}$ на отрезке $[0,1]$ (здесь отрезок $[0,1]$ взят ради простоты; вместо него можно взять любой отрезок $[0,T]$). Это становится ясным, если от задачи (1) перейти к системе

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t)z, \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \mu(t)z, \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad z(0,\varepsilon) = 1.$$

Матрица $\begin{pmatrix} A(t) & h(t) \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix}$ дифференциальной части этой системы может иметь как стабильный спектр $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \mu(t)\}$, так и нестабильный (см. [2,3], стр. 39–40, 186–187). В каждом из этих случаев асимптотика имеет свою структуру. Особенно сложная структура возникает в случае нестабильности спектра, характеризующейся наличием так называемых точечных особенностей. Например, если $\mu(t)$ имеет нуль порядка r на отрезке $[0,1]$ ($\mu(t) = -l(t)t^r$, $l(t) > 0$), то в асимптотике решения соответствующей дифференциальной задачи

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + h(t)z,$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \mu(t)z, \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad z(0,\varepsilon) = 1.$$

возникают сингулярности, описываемые специальными функциями типа (см. [4])

$$\exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(\theta) d\theta \right] \int_0^t \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mu(\theta) d\theta \right] \frac{s^j}{j!} ds, \quad j = \overline{0, r-1},$$

отсутствующими в случае $\mu(t) \neq 0$. Описание сингулярностей при наличии интегрального члена в (2) и при $\mu(t) = -l(t)t^r$ становится весьма затруднительным. Сделать это напрямую нельзя, поэтому авторы избрали другой подход.

Как указано в [1], идея построения асимптотического решения задачи (1) при указанных предположениях основана на использовании регуляризованной (по Ломову) асимптотики фундаментальной матрицы решения $V(t, s, \varepsilon)$ соответствующей однородной интегро-дифференциальной системы и следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть $V(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальное решение однородной интегро-дифференциальной системы Вольтерра (s – параметр):

$$\varepsilon \frac{dV(t, s, \varepsilon)}{dt} = A(t)V(t, s, \varepsilon) + \int_s^t K_0(t, x)V(x, s, \varepsilon) dx, \quad (3)$$

$$V(s, s, \varepsilon) = 1, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

Тогда решение интегро-дифференциальной задачи

$$\varepsilon \frac{dp}{dt} = A(t)p + \int_0^t K_0(t, s)p(s, \varepsilon) ds + q(t), \quad p(0, \varepsilon) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \frac{dp}{dt} - A(t)p - \int_0^t K_0(t, s)p(s, \varepsilon) ds = q(t), \quad p(0, \varepsilon) = b$$

дается формулой

$$p(t, \varepsilon) = V(t, 0, \varepsilon)b + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t V(t, x, \varepsilon)q(x) dx. \quad (5)$$

Обоснование этого факта дано в [5] (стр. 268–269; см. также [1]). Как уже говорилось ранее, для построения асимптотического решения задачи (1) будет использована асимптотика первого порядка (по ε) фундаментального решения $V(t, s, \varepsilon)$. При этом будет получен главный член асимптотического решения исходной задачи (1). Для построения высших членов асимптотики понадобятся и высшие члены асимптотики фундаментального решения $V(t, s, \varepsilon)$.

Финансирование: Данное исследование частично финансируется Российским научным фондом (грант № 23-21-00496).

Ключевые слова: сингулярное возмущение, спектральное значение, нестабильный спектр, асимптотическое решение, фундаментальная матрица.

2020 Mathematics Subject Classification: 45D05, 45J05, 47G20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kalimbetov B.T., Safonov V.F., Zhaidakbayeva D.K. Asymptotic solution of a singularly perturbed integro-differential equation with exponential inhomogeneity, *Axioms*, **12**:241 (2023). <https://doi.org/10.3390/axioms12030241>.
- [2] Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, Наука, Москва (1981).
- [3] Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя*, Изд-во Московского университета, Москва (2011).
- [4] Eliseev A.G. On the regularized asymptotics of a solution to the Cauchy problem in the presence of a weak turning point of the limit operator, *Axioms*, **9**:86 (2020). <https://doi.org/10.3390/axioms9030086>.
- [5] Иманалиев М.И. *Колебания и устойчивость решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем*, Изд-во «Илим», Фрунзе (1974).

О МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УСИЛЕНИЕМ И С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Б.Т. КАЛИМБЕТОВ¹, В.Ф. САФОНОВ², Д.А. САПАКОВ³

¹Южно-Казахстанский университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

²Московский энергетический институт (НИУ «МЭИ»), Москва, Россия

³ЮКПУ им. О.Жанибекова, Шымкент, Казахстан

¹bkalimbetov@mail.ru, ²Singsaf@mpei.ru, ³sapakov1986@mail.ru

В работе рассматривается начальная задача для сингулярно возмущенной дифференциальной системы

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{dy}{dt} - A(t)y - \varepsilon g(t) \cos \frac{\beta(t)}{\varepsilon} B y = h(t) e^{\frac{i\delta(t)}{\varepsilon}}, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $y = \{y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon)\}$ — неизвестная вектор-функция, $h(t) = \{h_1(t), h_2(t)\}$, $\beta(t)$, $g(t)$, $\delta'(t) > 0$ ($\forall t \in [0, T]$) — скалярные функции, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\omega(t) > 0$, $\forall t \in [0, T]$, $y^0 = \{y_1^0, y_2^0\}$ — постоянные векторы из класса $\mathbb{C}^2$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $y^0 > 0$ — заданное число. Требуется построить регуляризованную асимптотику [1] решений задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Предельный оператор $A(t)$ имеет спектр $\lambda_1(t) = -i\omega(t)$, $\lambda_2(t) = +i\omega(t)$, $\beta(t)$ есть частота быстро осциллирующего коэффициента, $\delta'(t)$ частота быстро осциллирующей неоднородности. Введем обозначение $\lambda_3(t) = -i\beta'(t)$, $\lambda_4(t) = +i\beta'(t)$, $\lambda_5(t) = i\delta'(t)$. Задачу (1) будем рассматривать при выполнении следующих предположений:

- 1) $\omega(t)$, $\beta(t)$, $g(t)$, $\delta(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^2)$, $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^{2 \times 2})$;
- 2) для всех $t \in [0, T]$ и $n_3 \neq n_4$ неравенства

$$\begin{aligned} n_3 \lambda_3(t) + n_4 \lambda_4(t) &\neq \lambda_j(t), \\ \lambda_k(t) + n_3 \lambda_3(t) + n_4 \lambda_4(t) &\neq \lambda_j(t), \quad k \neq j, \quad k, j = 1, 2, 5. \end{aligned}$$

выполняется для мультииндекса $n = (n_3, n_4)$ с $|n| \equiv n_3 + n_4 \geq 1$ (n_3 и n_4 положительные целые числа). Обозначим через $\sigma_j = \sigma_j(\varepsilon)$ постоянные $\sigma_1 = e^{-\frac{i}{\varepsilon}\beta'(0)}$, $\sigma_2 = e^{+\frac{i}{\varepsilon}\beta'(0)}$, $\sigma_3 = e^{\frac{i}{\varepsilon}\delta'(0)}$, и запишем задачу (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y(t, \varepsilon) &\equiv \varepsilon \frac{dy}{dt} - A(t)y - \varepsilon \frac{g(t)}{2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \beta'(\theta) d\theta} & e^{+\frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \beta'(\theta) d\theta} \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} B y = \\ &= h(t) e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \delta'(\theta) d\theta} \sigma_3, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

Введем регуляризирующие независимые переменные (см. [1]):

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, 5},$$

и вместо задачи (2) рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u(t, \tau, \varepsilon) &\equiv \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^5 \lambda_j(t) \frac{\partial u}{\partial \tau_j} - A(t)u - \varepsilon \frac{g(t)}{2} (e^{\tau_3} \sigma_1 + e^{\tau_4} \sigma_2) B u = \\ &= h(t) e^{\tau_5} \sigma_3, \quad u(t, \tau, \varepsilon)|_{t=0, \tau=0} = y^0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

для функции $u(t, \tau, \varepsilon)$, где обозначено $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_5)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_5)$. Если $u = u(t, \tau, \varepsilon)$ есть решение задачи (3), то вектор-функция $y = u\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ будет решением задачи (2), поэтому задача (3) является расширенной задачей по отношению к задаче (2).

Решение задачи (3) ищем в виде классического ряда

$$u(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \tau), \quad u_k(t, \tau) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^2). \quad (4)$$

Подставляя (4) в задачу (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие итерационные задачи для определения коэффициентов ряда (4):

$$L_0 u_0(t, \tau) \equiv \sum_{j=1}^5 \lambda_j(t) \frac{\partial u_0}{\partial \tau_j} - A(t) = h(t) e^{\tau_5} \sigma_3, \quad u_0(0, 0) = y^0; \quad (5_0)$$

$$L_0 u_1(t, \tau) = -\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{g(t)}{2} (e^{\tau_3} \sigma_1 + e^{\tau_4} \sigma_2) B u_0, \quad u_1(0, 0) = 0; \quad (5_1)$$

.....

Решение итерационных задач определим в следующем пространстве функций:

$$U = u(t, \tau) : u = u_0(t) + \sum_{j=1}^5 u_j(t) e^{\tau_j} + \sum_{2 \leq |m| \leq N_u}^* u^{(m)}(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{1 \leq |m| \leq N_u}^* u^{e_i+m}(t) e^{(e_i+m, \tau)},$$

$$m = (0, 0, m_3, m_4, 0), u_j(t), u^m(t), u^{e_i+m}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^2), 1 \leq |m| \leq m_3 + m_4 \leq N_u, j = \overline{0, 5}.$$

Каждую итерационную задачу (5_k) напомним в виде

$$L u(t, \tau) \equiv \sum_{j=1}^5 \lambda_j(t) \frac{\partial u}{\partial \tau_j} - A(t) u = H(t, \tau), \quad u(0, 0) = y^*, \quad (6)$$

где $H(t, \tau) = H_0(t) + \sum_{j=1}^5 H_j(t) e^{\tau_j}$ — известная вектор функция пространства U , y^* — известный постоянный вектор комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) - 2) и правая часть $H(t, \tau) = H_0(t) + \sum_{j=1}^5 H_j(t) e^{\tau_j}$ системы (6) принадлежит пространству U . Тогда для разрешимости системы (6) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle H_k(t, \tau), d_k(t) e^{\tau_k} \rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad k = \overline{1, 5}.$$

где $d_k(t) e^{\tau_k}$ — базисные элементы ядра сопряженного оператора $A^*(t)$, $k = \overline{1, 2}$.

Финансирование: Данное исследование частично финансировано Российским научным фондом (грант № 23-21-00496).

Ключевые слова: сингулярное возмущение, дифференциальная система, регуляризация задачи, асимптотическое решение, итерационная задача.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34D15, 34E15

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений, Наука, Москва (1981).
- [2] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя, Изд-во Московского университета, Москва (2011).

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ: ЗАДАЧА СИНТЕЗА И УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА

А. КЕРИМБЕКОВ¹, Р.Е. БЕРИККАНОВ²

¹КРСКУ, Бишкек, Кыргызстан

²КГУ, Бишкек, Кыргызстан

¹akl7@rambler.ru, ²b.ray@mail.ru

В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза при нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых уравнениями в частных производных, в случае, когда искомое оптимальное управление определяется как функция (или функционал) от состояния управляемого процесса. Исследование проводилось по схеме Беллмана — Егорова и разработан алгоритм построения синтезирующего равномерно-распределенного (по объекту) и точечного оптимальных управлений.

Задача нелинейной оптимизации и уравнение типа Беллмана. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал:

$$J[u(t)] = \beta \int_0^T p^2[t, u(t)] dt + \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи:

$$\begin{cases} V_t(t, x) = V_{xx}(t, x) + g(x)f[t, u(t)], & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ V(0, x) = \psi(x), & 0 < x < 1, \\ V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь функция $V(t, x) \in H(Q_T)$ описывает состояние управляемого теплового процесса; $\xi(x) \in H(0, 1)$, $g(x) \in H(0, 1)$ и $\psi(x) \in H^1(0, 1)$ — заданные функции; $u(t) \in H(0, T)$ — функция управления; $p[t, u(t)] \in H(0, T)$ — заданная функция, и функционалом $J[u(t)]$ определяется качество управления процессом; $f[t, u(t)]$ описывает действие внешнего источника и является нелинейной монотонной функцией по функциональному аргументу $u(t)$, $t \in (0, T)$; $H(Y)$ — пространство Гильберта квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y ; $H^1(Y)$ — пространство Соболева первого порядка; $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ — область плоскости Oxt ; α — положительная постоянная; T — фиксированный момент времени.

В процессе исследования, согласно схеме Беллмана — Егорова, пользуясь интегральным тождеством обобщенного решения краевой задачи (1)–(2):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (V(t, x)\Phi(t, x)) \Big|_{t_1}^{t_2} dx \equiv \\ & \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^1 (V(t, x)\Phi_t(t, x) - V_x(t, x)\Phi_x(t, x) + g(x)f[t, U(t)]\Phi(t, x)) dx - \alpha V(t, 1)\Phi(t, 1) \right] dt, \end{aligned} \quad (1)$$

которое справедливо для любой функции $\Phi(t, x) \in H^1(Q_T)$ и для любых моментов времени t_1, t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$), и дифференциалом Фреше для функционала Беллмана

$$S[t, V(t, x)] = \min_{u(\tau) \in \Pi, t \leq \tau \leq T} \left\{ \beta \int_t^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau + \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx \right\}, \quad (3)$$

получено уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S[t, V(t, x)]}{\partial t} = \min_{u \in \Pi} & \left\{ \beta p^2[t, u(t)] + \int_0^1 g(x)m(t, x) dx f[t, u(t)] \right. \\ & \left. - \int_0^1 V_x(t, x)m_x(t, x) dx - \alpha V(t, 1)m(t, 1) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $m(t, x)$ — градиент функционала Беллмана, который определяется лишь после того, как будет известен явный вид функционала (3). Согласно (3) легко видеть, что уравнение (4) следует рассматривать вместе с дополнительным условием

$$S[T, V(T, x)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx. \quad (5)$$

Задача (4)–(5) называется задачей Коши–Беллмана. В каждом случае, когда Π — открытое или замкнутое множество, общий метод решения задачи Коши–Беллмана не разработан. Однако, в отдельных задачах удается решить задачу синтеза и разработать алгоритм построения синтезирующего оптимального управления. В статье в качестве примера подробно изложено решение задачи синтеза равномерно-распределенного (по объекту) оптимального управления в случае, когда Π — множество допустимых значений управления является открытым, и задачи синтеза точечного оптимального управления в случае, когда Π — множество допустимых значений управления является замкнутым множеством. В обеих задачах разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация, уравнение Беллмана, задача синтеза, тепловые процессы.

2020 Mathematics Subject Classification: 49K20, 35K05, 93C20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Егоров А.И. Оптимальная стабилизация систем с распределенными параметрами. Материалы Международной конференции IFIP по технической оптимизации. Препринт 8, Новосибирск, 1974.

[2] Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. Москва: Наука, 1978. 464 с.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

И.Е. ЕГОРОВ¹, С.В. САФОНОВ²

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

²ГБНОУ РС(Я) "Республиканский лицей-интернат Якутск, Россия

¹IvanEgorov51@mail.ru, ²rl_ssv@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей S и положим $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma = S \times (0, T)$, $T > 0$. В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с достаточно гладкими функциями в $\bar{Q}$. Введем множества $\Omega_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\}$, $\Omega_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}$. Будем считать, что $k(x, 0) < 0$, $x \in \bar{\Omega}$ и $N(t)$ — заданная непрерывная функция на $[0, T]$.

Вторая краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \quad u_t|_{t=0} = \int_0^T N(\tau)u(x, \tau)d\tau, \quad u_t|_{\Omega_T^-} = 0. \quad (2)$$

В данном докладе рассматривается нелокальная вторая краевая задача (1), (2) когда уравнение (1) является эллиптическим вблизи нижнего основания цилиндрической области Q . Для исследования второй краевой задачи (1), (2) используется метод работы [1] и результаты [2]. При определенных условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа доказано существование единственного решения нелокальной второй краевой задачи в весовом пространстве Соболева [2].

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания проект (№FSRG-2026-0009).

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, вторая краевая задача, метод Галеркина, неравенство, разрешимость, оценка, сходимость.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кожанов А.И. *Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений* Докл. РАН. 2014, Т. 457, N 2. С. 152-156.

[2] Егоров И.Е., Сафонов С.В. Разрешимость второй краевой задачи для уравнения смешанного типа в весовом пространстве Соболева, *Мат. заметки СВФУ*, 32:4(2025). С. 53-68.

Source identification in an integral-type nonlocal problem for a reverse parabolic equation

Charyyar ASHYRALYYEV

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

charyyar@gmail.com

The study of source identification for parabolic differential equations is essential for accurately modeling diffusion processes where the governing parameters are unknown. The well-posedness of boundary value problems for reverse parabolic equations, particularly those involving integral conditions, was established in [1]. Building upon this theoretical foundation, the stability of the Rothe difference scheme for such problems has been rigorously analyzed to ensure reliable numerical approximations [2]. Recent research has further explored the mathematical formulation of the reverse parabolic source identification problem [3]. Further in the paper [4], the authors proposed and analyzed stable difference scheme specifically designed for the numerical resolution of these source identification problems.

In this paper, we study a source identification problem. In the present work, we consider source identification problem to find $p \in H$ and $u : [0, 1] \rightarrow H$ for the parabolic equation

$$\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = p + g(t), 0 \leq t \leq 1, \quad u(1) = \int_0^1 \rho(s)u(s)ds + \xi, \quad u(0) = \zeta, \quad (1)$$

where $A : H \rightarrow H$ is a self adjoint positive definite operator in a Hilbert space H , the elements $\xi, \zeta \in H$ and the functions $g : [0, 1] \rightarrow H$, $\rho : [0, 1] \rightarrow R$ are given.

In this work, we obtain stability estimate for the solution of a source identification problem (1). Later we study application of abstract result to investigate stability of some boundary value problems with unknown source for a backward in time parabolic equation.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23487362).

Keywords: parabolic equation, source identification problem, stability estimate, nonlocal conditions, boundary value problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B10, 35K10, 49K40

References

[1] Ashyralyev C. Well-posedness of boundary value problems for reverse parabolic equation with integral condition, *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics*, 2018

[2] Ashyralyev C. Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition, *Math. Methods in the Applied Sciences*, 43:8 (2020), 5369-5379.

[3] Ashyralyev C., Sadybekov M.A., Reverse parabolic source identification problem, *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 16:2 (2025), 271-280.

[4] Ashyralyev C., Sadybekov M.A., On a stable difference scheme for numerically solving a reverse parabolic source identification problem, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 120:4 (2025), 85-94.

Ғылымдағы, техникадағы және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар (CITech-2026)

Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании (CITech-2026)

Computational and Information Technologies in Science, Engineering, and Education (CITech-2026)

Бағдарламалық комитеттің төрағасы: Б.Т. Жумагулов

Ұйымдастыру комитетінің төрағасы: Н.М. Темирбеков

Конференция хатшысы: Динара Тамабай

ИНФОРМАТИКА МҰҒАЛІМІНІҢ ҚҰЗЫРЕТТІЛІКТЕРІ: КӘСІБИ СТАНДАРТ КОНТЕКСТІНДЕГІ ЗАМАНАУИ ТАЛАПТАР

К.С. АБДИЕВ¹, А.А. АЛПЫСБАЕВА²

¹«Тұран» университеті, Алматы, Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹k.abdiyev@turan-edu.kz, ²kerasy1156@gmail.com

Орта мектеп педагогтеріне жұмыс берушілер тарапынан қойылатын барлық талаптар «Педагог» кәсіби стандартында айқындалған. Бұл құжаттың жаңа нұсқасы 2025 жылы бекітілген [1]. Кәсіби стандартта педагогтер құзыреттіліктері міндетті және қосымша еңбек функцияларының жиынтығы ретінде сипатталып, әрбір еңбек функциясы кәсіби дағдылар арқылы анықталған. Мысалы, еңбек өтілі жоқ педагогтың (педагогикалық ЖОО түлегінің) «Оқу процесін жүзеге асыру» деген міндет еңбек функциясында екі дағды көрсетілген: оқу процесін жоспарлау және оқу процесін ұйымдастыру. Сәйкесінше, екі дағдыны қалыптастыруға қажетті білімдер мен машықтар (ікемділіктер) тізімі берілген. Демек, бакалавриат түлегі осы берілген машықтар мен білімдерді меңгеруі қажет. Сонымен қатар, кәсіби меңгерген әрбір адамның жеке құзыреттіліктеріне қойылатын талаптар да бар. Олардың тізімі: жауапкершілік, жүйелілік, тұрақтылық, шыдамдылық, тәртіптілік, мейірімділік, педагог кәсібіне адалдық, азаматтық, проактивтілік, сандық сауаттылық. Құжаттағы тізімде көрсетілген жеке құзыреттіліктердің ешқайсысының анықтамасы берілмеген, оларды қалыптастыру жолдары мен әдістері анықталмаған. Осыған байланысты біздің зерттеуіміздің негізгі сұрағы төмендегідей тұжырымдалады:

- кәсіби стандартта көрсетілген болашақ информатика мұғалімдерінің жеке құзыреттіліктеріне қандай анықтама беруге болады, сапалы маман дайындауға мұндағы талаптар жеке құзыреттіліктерді қалай түсіндіреді;
- жеке құзыреттіліктерді педагогикалық ЖОО-ларда қандай әдістермен қалыптастыруға және қалай бағалауға болады?

Бұл сұрақтарда аталған мәселелер шешілген жағдайда педагогикалық ЖОО-ларда пән мұғалімдерін дайындаудың сапасы жақсарады деп болжауға болады. Біз осы күрделі сұрақтар арқылы беріліп тұрған өзекті мәселелерді шешу жолдарын қандай тұрғыдан түсінуімізді көрсетіп, оның негізгі қадамдарын тұжырымдадық. Зерттеудің теориялық негізі ретінде жоғары білім берудегі құзыреттілік тұғырын атап көрсетуге болады.

Біз өз зерттеуімізде құзыреттілік ұғымын оқытушылар мен білім алушылар оңай түсінетін қысқа тұжырым (формула) арқылы көрсетуге тырыстық. Бұл тұжырым құжаттарда және жоғары білім берудегі құзыреттілік тұрғысын негіздейтін мақалалардағы анықтама-ларға қарсы келмейді. Мұндағы негізгі мақсат — қысқа, тұжырым арқылы құзырет ұғымын оңай түсінетін, көрнекі жолмен сипаттау. Негізгі ескеретін мәселе — болашақ информатика мұғалімдерінің құзыреттілігін кәсіби стандарттағы талаптар негізінде тұжырымдау. «Педагог» кәсіби стандартында маманға қойылатын талаптар еңбек функцияларын сипаттау арқылы көрсетілетіні белгілі. Олай болса, қысқаша түрде төмендегідей тұжырымдауға болады:

$$\text{Құзыреттіліктер} = \{\text{Дағдылар; Машықтар мен Білімдер}\} + \text{ЖҚ}\}_{\text{КС ЕФ контекстінде}} \quad (1)$$

мұндағы КС ЕФ — кәсіби стандарттың еңбек функциялары, ЖҚ — жеке құзыреттіліктер. Бұл формуланың мағынасы — әрбір маман кәсіби құзыреттілікті меңгеру үшін КС-та сипатталған еңбек функцияларының бәрін орындай алуы керек. Ол үшін, өз кезегінде ЕФ-ның барлық дағдылары қалыптастырылуы тиіс. Дағдыларды қалыптастыру үшін сипаттамада көрсетілген машықтар мен білімдерді меңгеру қажет. Және әрбір маманда стандартта көрсетілген жеке қасиеттер де болуы тиіс.

«Педагог» кәсіби стандартында барлық қажетті дағдылар, машықтар мен білімдер және жеке құзыреттіліктер анықтап көрсетілген. Сондықтан, болашақ педагогтердің кәсіби құзыреттілігі деңгейін бағалау кезінде қажетті тапсырмалар мөлшерін дәл анықтауға болады. Негізгі қиындық — жеке құзыреттіліктер анықталмағандығы. Осының салдарынан ЖОО-да жеке құзыреттіліктерді қалыптастыру мен бағалау әдістері жеткілікті деңгейде дамымаған. Білім беру бағдарламалар тізілімінде көрсетілген құжаттарды талдау негізінде осындай қорытынды жасауға болады [2].

Болашақ маманның жеке құзыреттіліктерін қалыптастыру мен бағалау әдістерін әзірлеудің қиын болатын себебі — мұндай құзыреттіліктер көбіншілік жағдайда кәсіби ерекшеліктерді ескермей тұжырымдалады. Әдетте, олар кез келген адамның жеке қасиеттері ретінде тұжырымдалып, адамның жалпы сипаттамасы ретінде анықталады. Ал, кәсіби стандарттарда берілген жеке құзыреттіліктер кәсіби құзыреттіліктер сипаттамасының құрамдас бөлігі болып тұр. Бұл жағдайда, жеке құзыреттіліктерді қалыптастыру жолдары әр кәсіп үшін ерекше болуы мүмкін.

Осыған байланысты халықаралық құжаттар тәжірибесін қарастыруға болады. Мысалы, Competing Curricula 2020 құжатында «дисциплиналар» ұғымы енгізілген [3]. Бұл ұғым «дағды», «білім» ұғымдарымен қатар қолданылады және кәсіби құзыреттіліктерді қалыптастыру және бағалау әдістерінде міндетті түрде ескеріледі. Жалпы, «икемді дағдылар», «жеке құзыреттіліктер» және «дисциплиналар» ұғымдарын салыстырмалы талдау арқылы әртүрлі құжаттардағы анықтамалардың ортақ тұжырымдарын түсінуге болады. Әрине, аталған талдауды болашақ информатика мұғалімдерін дайындау сапасын жақсарту мақсатында тарату үшін пікірлермен толықтыру қажет.

Яғни, мүдделі тараптардың (білім беру ұйымдары басшылары мен педагогтері, ЖОО оқытушылары, бакалавриат деңгейінде білім алушылар) қатысуымен арнайы сауалнама өткізу қажет. Сауалнаманың негізгі сұрақтары кәсіби стандартта көрсетілген еңбек құзыреттіліктерінің анықтамасын кім, қалай түсінетіндігін айқындауға бағытталатын болады.

Жоғарыда сипатталған кезеңдер зерттеулер нәтижесінде болашақ информатика мұғалімдерінің кәсіби құзыреттілігін жоғары деңгейде қалыптастыруға болады. Ұсынылған кәсіби құзыреттіліктің жаңа формуласы бағалау әдістерін әзірлеу мүмкіндігін береді. Жаңа формуланы пайдаланып әзірленген тапсырмалар бағалау құралының негізі бола алады. Өз кезегінде, бағалау жүйесі бакалавриат түлектеріне өздерінің кәсіби құзыреттілігінің қандай деңгейде екенін білуге мүмкіндік береді.

Кілтті сөздер: кәсіби құзыреттілік, кәсіби стандарт, жеке құзыреттілік, информатика мұғалімі, құзыреттілікті бағалау.

ӘДЕБИЕТ

[1] Қазақстан Республикасы Оқу-ағарту министрлігі Білім беру ұйымдарының педагогтеріне арналған кәсіптік стандарттарды бекіту туралы. Қазақстан Республикасы Оқу-ағарту министрінің 2025 жылғы 24 ақпандағы №31 бұйрығы.
<https://www.adilet.zan.kz/kaz/docs/G25HP000031>.

[2] Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі «Жоғары білім берудің бірыңғай платформасы» ақпараттық жүйесі. Білім беру бағдарламаларының тізілімі.
https://epvo.kz/#/register/education_program.

[3] CC2020 Task Force *Computing Curricula 2020: Paradigms for Global Computing Education*, Association for Computing Machinery, New York (2020).
 DOI: <https://doi.org/10.1145/3467967>.

БІЛІМ АЛУШЫЛАРДЫҢ ЖЕКЕ ОҚЫТУ ТРАЕКТОРИЯЛАРЫН ҚҰРУҒА АРНАЛҒАН ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ НЕГІЗІНДЕГІ ИНТЕЛЛЕКТУАЛДЫ АҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕ ӘЗІРЛЕУ

Г.Б. АБИШОВА¹, Н.С. ЗАУРБЕКОВ²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

k.daniargulya@mail.ru

Қазіргі цифрлық трансформация дәуірінде білім беру жүйесі өзгерістерді бастан өткізуде. Басты мәселесі-біріңғай стандарттың барлық білім алушыларға бірдей тиімді болмауы. Әсіресе деректерге негізделген шешім қабылдау, білім алушының жеке ерекшеліктерін ескеру мен оқу үдерісін дербестендіру мәселелері өзекті. Дәстүрлі оқыту әдістері "орташа статистикалық білім алушыға"бағытталған. Білім алушының іс-әрекетін болжай алатын және оған сәйкес мазмұнды бейімдейтін Collaborative Filtering (CF) алгоритмдеріне енгізілген интеллектуалды жүйелерді енгізу қажет. Әр білім алушының қабылдау деңгейі, базалық білімі мен оқу қарқыны әртүрлі. Бұл тұрғыда UNESCO және OECD ұйымдары білім сапасын арттырудың басты бағыты ретінде жекелендірілген оқыту (personalized learning) моделін ұсынады. Осыған байланысты білім алушылардың жеке оқыту траекторияларын құруға арналған жасанды интеллект (ЖИ) негізінде интеллектуалды ақпараттық жүйе әзірлеу-ғылыми әрі практикалық маңызы зор міндет. ЖИ негізіндегі жүйелерді енгізу оқытуды жеке бейімдеуге сол арқылы білім сапасын арттырып, академиялық үлгерімді жақсартуға мүмкіндік береді [3-4].

Зерттеудің мақсаты-әрбір білім алушының қабілеті, оқу қарқыны, қызығушылығы, алдыңғы білім деңгейі мен оқу нәтижелері негізінде дербес оқу траекториясын автоматты түрде қалыптастыратын интеллектуалды жүйе құру мен психофизиологиялық ерекшеліктерін талдау арқылы ақпараттық жүйенің моделін әзірлеу. Жүйе үлкен деректерді талдау, машиналық оқыту (Machine Learning) алгоритмдер арқылы, атап айтқанда ұқсас оқу профильдерін топтастыру үшін Clustering (K-means) және келесі оқу қадамын болжау үшін Decision Trees немесе Neural Networks әдістері және бейімделмелі білім алушының үлгерім динамикасын болжайды, әлсіз тұстарын анықтайды және сәйкес оқу материалдарын ұсынады.

Білім беру деректерін кешенді талдау негізінде адаптивті модель құру және оны нақты оқу платформасына енгізу зерттеудің басты ғылыми жаңалығы болып табылады. Зерттеу барысында білім алушылардың жеке оқу траекторияларын қалыптастыру үшін *Collaborative Filtering* әдісінің екі моделі біріктірілді:

1. **User-based CF** – ұқсас оқу мінез-құлқы бар білім алушылардың деректеріне сүйене отырып, табысты оқу траекторияларын ұсыну.
2. **Item-based CF** – білім алушы бұрын меңгерген материалдардың қиындық деңгейі мен тақырыптық байланысына қарай келесі оқу модулін таңдау.

Жасанды интеллект алгоритмдері ретінде классификация, кластерлеу және нейрондық желілер қолданылады. Жүйе білім алушының профилін динамикалық түрде жаңартып, оқу контентін соған сәйкес бейімдейді. Нәтижесінде оқу уақыты оңтайландырылады, білім алушының мотивациясы артады және білім сапасы жақсарады.

Эксперименттік зерттеу

Зерттеу барысында университет кафедрасының 100-ден астам білім алушысының *LMS* (*Moodle/Canvas*) платформаларындағы оқу деректері талданды. Жүйе келесі параметрлерді ескерді:

- өзін-өзі тексеру тестілерінің алғашқы нәтижелері;
- бейне дәрістерді көру ұзақтығы;
- тапсырмаларды орындауға кеткен уақыт.

Аталған жүйе мектептерде, жоғары оқу орындарында (ЖОО) және онлайн білім беру платформаларында қолдануға жарамды әмбебап шешім-практикалық маңыздылығы болып табылады. Интеллектуалды жүйені қолдану нәтижесінде «төмен» және «орташа» деңгейдегі білім алушылардың академиялық үлгерімі (GPA) орта есеппен 15-18 пайызға өсті. Жүйе білім алушыларға олардың «әлсіз тұстарын» жабатын қосымша материалдарды (remediation content) автоматты түрде ұсыну арқылы білімдегі олқылықтардың алдын алды.

Нәтижесінде жасанды интеллект технологияларын енгізу арқылы білім беру үдерісінің тиімділігі артып [1-2], әр білім алушының жеке әлеуетін толық ашуға жағдай жасалады және тек теориялық модельмен шектелмей, нақты цифрлық өнім мен оның тиімділігін дәлелдейтін эмпирикалық көрсеткіштер арқылы айқындалады.

Жасанды интеллект негізіндегі интеллектуалды ақпараттық жүйе білім беруді жекешелендірудің жоғары тиімділігін көрсетті. Collaborative Filtering алгоритмі негізінде құрылған траекториялар білім алушының субъективті таңдауына емес, объективті деректерге сүйенетіндіктен, оқу процесінің сарпасын жаңа деңгейге көтереді. Жеке оқыту траекторияларын құру-болашақ білім беру моделінің негізгі өзегі болып табылады және бұл бағыттағы зерттеулер еліміздің цифрлық білім беру стратегиясын жүзеге асыруға елеулі үлес қосады.

Кілтті сөздер: жасанды интеллект, personalized learning, оқу траекториясы, интеллектуалды білім беру жүйесі, машиналық оқыту.

Пайдаланылған әдебиеттер

ӘДЕБИЕТ

- [1] Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Pearson, London (2020).
- [2] OECD AI and the Future of Skills. Volume 1: Capabilities and Assessments, OECD Publishing, Paris (2021).
- [3] World Economic Forum Shaping the Future of Learning: The Role of AI in Education, World Economic Forum, Geneva (2020).
- [4] Holmes W., Bialik M., Fadel C. *Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning*, Center for Curriculum Redesign, Boston (2019).

СТОКС ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН СПЕКТРЛІК ЕСЕПТЕРДІҢ САНДЫҚ ШЕШІМДЕРІ

К.С. АБУГАЛИЕВА¹, Е.А. МАЛГАЖДАРОВ², Н.М. ТЕМИРБЕКОВ³

¹Абай облысы ББ Семей қаласы ББ "№ 11 жалпы орта ББМ"КММ, Қазақстан

²С.Аманжолов атындағы ШҚУ, Өскемен, Қазақстан

³Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан

¹abugaliyeva.k@gmail.com, ²malgazhdarov_e@mail.ru, ³temirbekov@rambler.ru

Негізгі меншікті мәндер мәселесін сандық түрде шешуге арналған әдістердің ішінде Ланцош және Арнольди әдістері ең көп таралған. Алайда, бұл әдістерді тікелей қолдану есептің толық және толыққанды шешімін алуға мүмкіндік бермейді. Сондықтан олармен қатар оператор матрицасын айқын есептеу және оған QR-алгоритмді қолдану әдісі пайдаланылды. Бұл әдіс торлық спектралдық есепті толық шешуге кепілдік береді, өйткені алынған спектрден ең кіші меншікті мәндердің қажетті мөлшерін таңдап алу жеткілікті. Біздің жағдайда бұл әдіс Ланцош әдісінің ешбір минимал мәнді өткізіп алмауын бақылау және мәндердің краттылығын анықтау үшін қолданылды. Алайда, ұсақ торларда бұл әдісті қолдану тиімсіз, себебі итерациялар саны артқан сайын есептеу шығындары мен жадқа қойылатын талаптар шамадан тыс өседі.

Қарастырылып отырған есептердің бірнеше ерекшелігі бар. Біріншісі — шешімнің $divu = 0$ шартын қанағаттандыратын ішкі кеңістікпен шектелуі. Екіншісі — спектрі ізделетін оператор матрицасының белгісіз болуы; қолжетімді жалғыз операция — оператордың кері әрекетін векторға қолдану. Басқаша айтқанда, қолда бар жалғыз амал — Стокс теңдеулері үшін берілген оң

жақ бөлігімен шеттік есепті шешу. Сонымен қатар, екі өлшемді меншікті кеңістіктердің болуы да белгілі бір қиындық туғызды, олардың барлығын қамту үшін алгоритмдерді түрлендіруге тура келді.

Жұмыста екі спектралдық есеп қарастырылады: бірлік квадратта нөлдік шеттік шарттармен; бір бағыт бойынша периодтық шарттар қойылған тікбұрышта. Спектралдық есептердің дифференциалдық жағдайда шешілетін оператордың формалды анықтамасы, есептердің дискретизациясы, дискреттік спектралдық және қосалқы шеттік есептерді шешуге негіз болған сандық алгоритмдер, сандық шешім нәтижелері мен олардың талдауы ұсынылады. Сонымен қатар, барлық табылған меншікті функциялар – вектор өрістері және оларға сәйкес келетін қысым функциялары p үшін иллюстрациялар келтірілген.

ӘДЕБИЕТ

- [1] А.А. Иванчиков. *Исследование спектральной задачи, связанной с устойчивостью течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. // Материалы шестого Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения 2004, С. 102–106.*
- [2] E.V. Chizhonkov, A.A. Ivanchikov. *On numerical stabilization of solutions of Stokes and Navier - Stokes equations by the boundary conditions. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2004, Vol.19, No.6, P.477–494.*
- [3] A.V. Ozeritsky. *Efficient algorithms for stable manifolds. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V.20, N.2. P.209–224.*

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

А.С. АЛПЫСОВА¹, Е.А. МАЛГАЖДАРОВ², А.М. АКАЕВ³

^{1,2}ВКУ имени С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан

³ВКТУ имени Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан

¹no e-mail, ²malgazhdarov_e@mail.ru, ³aybek.akaev.vko_81@mail.ru

Попытки обобщения классического понятия числа неоднократно предпринимались в развитии математической науки. Первым успешным результатом в этом направлении стало введение комплексных чисел, представляемых в виде упорядоченных пар вещественных чисел. Множество комплексных чисел образует поле, аналогичное полю действительных чисел. Комплексные числа сыграли фундаментальную роль как в теоретических исследованиях, так и в прикладных областях: ряд задач, ранее считавшихся труднодоступными, получил естественное и прозрачное решение в рамках комплексного анализа. В качестве примера можно привести основную теорему алгебры, устанавливающую наличие хотя бы одного корня у любого неконстантного полинома с комплексными коэффициентами. Кроме того, аппарат комплексного анализа занимает ключевое место в изучении плоских задач математики и механики.

Следующий этап обобщения числовых структур связан с предложенными Уильямом Гамильтоном гиперкомплексными числами — кватернионами, представляющими собой четырехмерные алгебраические объекты. Они нашли существенные применения в ряде физических теорий. Однако отсутствие коммутативности операции умножения приводит к тому, что кватернионы не образуют поля, что существенно ограничивает возможности их использования. Неразрешимость задачи построения полноценного четырехмерного аналога математического анализа также объясняется именно некоммутативностью умножения.

Согласно теореме Фробениуса, дальнейшее расширение понятия числа неизбежно связано с необходимостью отказаться от некоторых фундаментальных арифметических свойств. В контексте исследований, направленных на моделирование трехмерных процессов, казахстанским математиком Максудом Абеновым была предложена новая разновидность четырехмерных чисел. В рамках предложенной им теории была изучена алгебра четырехмерных чисел, обладающая коммутативностью и ассоциативностью умножения при наличии делителей нуля.

Разработанная концепция оказалась чрезвычайно продуктивной: в 2019 году М. М. Абенов опубликовал монографию, в которой изложено построение соответствующей алгебры и математического анализа, получивших название «четырёхмерная математика». В последующих работах Абенов М. М. совместно с Габбасовым М. Б. провёл классификацию всех анизотропных четырёхмерных пространств, удовлетворяющих условиям коммутативности и ассоциативности и обладающих делителями нуля. Было установлено, что существует шесть таких пространств, которым присвоены обозначения M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 и M_7 . Каждое из них может рассматриваться как обобщение действительной и комплексной числовых систем.

В работах [1], [2] и [3] исследованы математические конструкции, определённые соответственно в пространствах четырёхмерных чисел M_2 , M_6 и M_5 . В указанных исследованиях введены операции сложения, вычитания и умножения, определены их фундаментальные свойства, включая коммутативность и ассоциативность, а также сформулированы и изучены основные понятия анализа функций четырёхмерного переменного: непрерывность, дифференцируемость и элементарные функции, определяемые посредством спектральных характеристик.

В настоящей работе построены графические представления этих элементарных функций в перечисленных пространствах и выполнен сравнительный анализ их свойств и поведения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абенов М.М. Четырёхмерная математика: методы и приложения. – Алматы: Издательство Қазақ университеті, 2019. – 176 с.
- [2] Абенов М.М., Габбасов М.Б. Анизотропные четырёхмерные пространства или новые кватернионы. – Нур-Султан, 2020. – 85 с.
- [3] Рахимова А.Т., Габбасов М.Б., Шапен К.М. Об одном пространстве четырёхмерных чисел // Вестник КазНУ имени аль-Фараби. Серия «Физика и математика». – 2020. – №4. – С. 199–225.

ТОПТЫҚ САТЫП АЛУЛАР МЕН БЮДЖЕТТІ ОҢТАЙЛЫ БОЛЖАУ ЖӘНЕ БАҚЫЛАУ МӘСЕЛЕЛЕРІН ШЕШУДІҢ МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ ӘДІСТЕРІ МЕН ДӘСТҮРЛІ ТӘСІЛДЕРІНІҢ ТАЛДАУЫ

Ж.Т. ӘБІЛДАЕВА¹, Р.К. УСКЕНБАЕВА², Ж.Б. КАЛЬПЕЕВА³,
А.О. ДӘУІТБАЕВА⁴, Н.А. ТУРЛУГУЛОВА⁵, А.У. ЕСІРКЕПОВА⁶

¹Қ.И. Сәтбаева атындағы Қазақ техникалық университеті, Алматы, 050013,
Қазақстан

²Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Қызылорда, Қазақстан

¹Zhansaya_A@mail.ru, ²r.kuskenbaeva@satbaev.university,

³z.kalpeyeva@satbayev.university, ⁴aicos@mail.ru

Бұл зерттеуде Smartbuy connect интеллектуалды жүйесі негізіндегі гибриді көп критерийлі оңтайландыру әдістерінің, машиналық оқыту әдістерінің және агроөнеркәсіптік кешендегі (АӨК) дәстүрлі басқару және жоспарлау тәсілдерінің тиімділігінің салыстырмалы талдауы ұсынылған. Өндіріс процестерін оңтайландыру, ресурстарды бөлу, егістік алқабын жоспарлау және өнімділікті болжау мәселелері қарастырылады. Талдау дәлдік, шешімнің тұрақтылығы, есептеу күрделілігі және практикалық қолданылуы критерийлеріне негізделіп жүргізіледі. NSGA-III негізіндегі гибриді әдістер машиналық оқыту модельдерімен біріктірілгенде классикалық және оқшауланған интеллектуалды әдістермен салыстырғанда жоғары сапалы компромисстік шешімдерді ұсынатыны көрсетілген.

Агроөнеркәсіптік кешен табиғи, климаттық, экономикалық және технологиялық факторлардың әсерінен жоғары күрделілікпен, көпфакторлылықпен және белгісіздікпен сипатталады [1]. Агроөнеркәсіптік кешендегі басқарушылық шешімдер әдетте көп критерийлі сипатта болады және өнімділікті, шығындарды, экологиялық тұрақтылықты және тәуекел көрсеткіштерін бір мезгілде оңтайландыруды талап етеді [2].

Детерминирленген модельдер мен сараптамалық бағалауларға негізделген дәстүрлі оңтайландыру әдістерінің икемділігі шектеулі. Соңғы жылдары машиналық оқыту (МО) әдістері кең таралуда, сондай-ақ көп критерийлі оңтайландырудың эволюциялық алгоритмдері, әсіресе NSGA-III [3] кең таралуда. Олардың тиімділігін салыстырмалы талдау және гибридті тәсілдерді қолданудың орындылығын негіздеу өзекті.

Анықтама 1. Машиналық оқыту – бұл деректер негізінде үлгілерді үйрену және болжам жасау мүмкіндігін беретін жасанды интеллект саласы.

ML артықшылықтары:

- үлкен деректер жиынтығы болған кезде болжамның жоғары дәлдігі;
- жасырын заңдылықтарды анықтау мүмкіндігі;
- өзгермелі жағдайларға бейімделу.

Кемшіліктері:

- күрделі модельдердің түсіндірілуінің нашарлығы;
- негізінен бір мақсатты міндеттерге назар аудару;
- ымыраға келу шешімдерін табудың кіріктірілген механизмдерінің болмауы.

Болжау үшін қолданылатын әртүрлі алгоритмдердің мүмкіндіктерін көрнекі түрде көрсету үшін [4].

Таблица 1: Тәсілдердің салыстырмалы сипаттамалары

Критерий	Дәстүрлі әдістер	Машиналық оқыту	Гибридті NSGA-III
Көп критерийлілік	Төмен	Орташа	Жоғары
Ерітінділердің тұрақтылығы	Орташа	Жоғары	Жоғары
Түсіндірмелілік	Жоғары	Төмен-орташа	Орташа
Есептеу күрделілігі	Төмен	Орташа	Жоғары
Бейімделушілік	Төмен	Жоғары	Жоғары

Талдау нәтижелері NSGA-III гибридті әдістері АӨК-ге тән күрделі көп критерийлі есептердің ең теңгерімді шешімдерін ұсынатынын көрсетеді.

Теорема 2 (Гибридті оңтайландыру тиімділігі). *NSGA-III негізіндегі гибридті әдістер машиналық оқыту модельдерімен біріктірілгенде классикалық әдістермен салыстырғанда жоғары сапалы компромисстік шешімдерді ұсынады.*

Доказательство. Көп критерийлі эволюциялық алгоритмдердің конвергенциялық қасиеттері мен машиналық оқыту модельдерінің болжамдық дәлдігінің комбинациясы арқылы дәлелденеді. $\square$

Ұсынылған тәсілдің өміршеңдігін тексеру үшін эксперимент ретінде Қазақстанның оңтүстік аймағындағы гипотетикалық ауыл шаруашылығы кәсіпорны үшін маркетингтік бюджетті бөлудің моделі жүргізілді.

Бастапқы деректер (модель):

- Бюджет: 100 миллион теңге;
- 5 байланыс арнасы (офлайн жарнама, мақсатты жарнама, SMM, нарықтар, PR);
- Аймақтық цифрлық қолжетімділік индексі: 0,62;
- Кәсіпорынның цифрлық дайындық индексі: 0,55.

Үш тәсіл салыстырылды:

- 1) Дәстүрлі «сату пайызы» әдісі
- 2) Сараптамалық бюджетті бөлу
- 3) NSGA-II

Таблица 2: Әдістердің салыстырмалы нәтижелері

Әдіс	ROI	Қамту	Стратегия оңтайлылығы
Саталым проценті	1.12	орташа	Төмен
Тәжірибелі	1.26	Жоғары	Орташа
NSGA-II	1.41	Жоғары	Төмен

Сондықтан көп мақсатты функцияны келесідей көрсетуге болады:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f_i(x) \rightarrow \min_{x \in D} \quad (1)$$

мұнда w_i – салмақтық коэффициенттер, $f_i(x)$ – жеке мақсатты функциялар, D – шешімдер облысы.

Ескерту 3. *Смартбай коннект жүйесі негізіндегі гибриді тәсіл АӨК-те топтық сатып алуларды жоспарлау және бюджетті басқару мәселелерін шешуде дәстүрлі және жаңа технологиялардың артықшылықтарын біріктіреді.*

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23489233 SmartBuy Connect: AI негізіндегі топтық сатып алу жүйесі) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: топтық сатып алу, бюджетті болжау, машиналық оқыту, NSGA-III, агроөнеркәсіптік кешен, оңтайландыру.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Deb K. Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. Wiley, 2001.
- [2] Coello Coello C.A. Evolutionary Multi-Objective Optimization: A Historical View of the Field. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2007, 1(1): 28–36.
- [3] Zhang Y., Wang S. Machine Learning in Agriculture: A Review. Computers and Electronics in Agriculture, 2020, 193: 106567.
- [4] Иванов И.В., Петров П.П. Ауыл шаруашылығы өндіріс жүйелерін оңтайландыру. М.: Агроғылым, 2019.

ҚАЛА АТМОСФЕРАСЫНДАҒЫ ЛАСТАУШЫ ҚОСПАЛАРДЫҢ ТАРАЛУЫН САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

А.С. ӘЛІМҒАЗЫ¹, Д.О. ТАМАБАЙ²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹alimgazinovaalua@gmail.com, ²dtamabay@gmail.com

Бұл жұмыста атмосферадағы ластаушы қоспалардың таралу процесін сипаттайтын үшөлшемді математикалық модель қарастырылады. Атмосферадағы ластаушы заттардың таралуы жел ағындарының әсерінен және турбуленттік диффузия нәтижесінде жүзеге асады. Ластаушы заттардың тасымалдану процесін сипаттау үшін адвекция–диффузия теңдеуі қолданылады. Атмосферадағы ластаушы заттардың таралуын математикалық модельдеу әдістері [1] еңбекте қарастырылған. Сонымен қатар атмосфералық ауадағы ластаушы заттардың таралуын сандық модельдеу мәселелері [2] жұмыста зерттелген. Осы жұмыстарға сүйене отырып, берілген жұмыста атмосферадағы ластаушы заттардың таралуын сипаттайтын үшөлшемді математикалық модель қарастырылады.

$$\omega = \{(x, y, z, t) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq H, 0 \leq t \leq T\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Delta \varphi + \alpha \varphi + \beta + f \quad (1)$$

$$\varphi(x, y, z, 0) = \varphi_0(x, y, z) \quad (2)$$

$$\varphi(x, y, 0, t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = H \quad (4)$$

$$f(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(r - r_i) \quad (5)$$

Мұнда $\varphi(x, y, z, t)$ — атмосферадағы ластанушы қоспаның концентрациясы, u, v, w — жел жылдамдығының координаталар бойынша компоненттері, Δ — турбуленттік диффузия операторы, α, β — химиялық реакция параметрлері, f — ластану көздерін сипаттайтын функция, Q_i — ластану көзінің қуаты, r_i — ластанушы көздердің координаталары, δ — Дирак функциясы.

Берілген математикалық модельді сандық түрде шешу үшін ақырлы элементтер әдісі (Finite Element Method) қолданылады. Есептеулер FEniCS бағдарламалық ортасында жүргізіледі. Ұсынылған тәсіл атмосферадағы ластанушы заттардың кеңістіктік және вертикаль бағыттар бойынша таралу заңдылықтарын сандық түрде зерттеуге мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: атмосфералық ластану, адвекция–диффузия теңдеуі, FEM, FEniCS.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 65N30, 76R50.

ӘДЕБИЕТ

[1] Марчук Г.И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. М.: Наука, 1982. – 320 с.

[2] Temirbekov N., Temirbekov A., Kasenov S., Tamabay D. Numerical modeling for enhanced pollutant transport prediction in industrial atmospheric air, *Journal of Sustainable Development and Environmental Engineering*, **19**:3 (2024), 917–926.

<https://doi.org/10.18280/ij dne.190321>

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОБРАЗОВАНИИ

А.А. ӘМІРБЕКОВ¹, А.Б. ИБАШОВА², А. ӘМІРБЕКҰЛЫ³

ЮКПУ имени О. Жанибекова, г. Шымкент, Казахстан

Предлагаемая работа посвящена описанию основных положений использования искусственного интеллекта в образовании.

Посредством краткого анализа современного состояния мира образования и на основе поставленного в Концепции развития дошкольного, среднего, технического и профессионального образования Республики Казахстан на 2023–2029 годы, целью работы выбрано описание основных положений технологии применения искусственного интеллекта в подготовке фасилитатора в педагогическом вузе.

В работе искусственный интеллект определен как устройство, обладающее общей способностью поиска, восприятия, анализа, систематизации и эффективного использования информации, которая включает способность делать заключения, планировать, решать проблемы, понимать сложные идеи. Также быстро обучаться и учиться на основании опыта, способствующей человеку в процессе достижения целей, таких как познание окружающего мира, понимание сути вещей, способность принимать решения в различных ситуациях. При этом он

функционирует в роли интерпретатора текста, умеющего связать знания и процедуры, переданные посредством текста задачи, с поставленной целью.

Указаны функции искусственного интеллекта при решении познавательных, коммуникативных и педагогических задач.

В заключении работы делается вывод о том, что компетентное использование искусственного интеллекта в образовании позволяет достигнуть большего разнообразия и расширить его развивающие возможности.

Ключевые слова: мир образования, развитие образования, фасилитатор, задача, взаимодействие, искусственный интеллект.

МЕКТЕП ИНФОРМАТИКАСЫНДАҒЫ «АҚПАРАТ ЖӘНЕ АҚПАРАТТЫҚ ҮДЕРІСТЕР» БӨЛІМІН ОҚИТУДА ИНФОГРАФИКАНЫ ҚОЛДАНУ

Ү.Қ. БАЗАРБАЕВА¹, Б.Б. ҚАЛДАНОВ²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹umit.kuan@bk.ru, ²b.kaldanov@abaiuniversity.edu.kz

Қазіргі кезеңде білім беру жүйесі цифрлық трансформация жағдайында дамуда. Білім беруді цифрландыру үдерісі ақпараттық технологияларды оқыту мазмұнына кеңінен енгізуді талап етеді. Қазақстан Республикасының білім беруді дамытудың 2023–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасында білім алушылардың цифрлық құзыреттілігін дамыту және оқыту процесін жаңғырту негізгі басымдықтардың бірі ретінде белгіленген. Осыған байланысты информатика пәнін оқытуда күрделі ақпараттық ұғымдарды түсіндірудің тиімді әдістерін қолдану маңызды болып табылады [1].

Информатика курсының негізгі бөлімдерінің бірі – «Ақпарат және ақпараттық үдерістер». Бұл тарауда ақпарат ұғымы, ақпаратты жинау, сақтау, өңдеу және беру сияқты базалық түсініктер қарастырылады. Аталған тақырыптардың ерекшелігі – олардың абстрактілі сипатта болуы. Сондықтан оқу материалын меңгертуде көрнекілік пен визуалды модельдер маңызды рөл атқарады. Осы тұрғыдан алғанда инфографика оқу ақпаратын жүйелеудің және оны түсінікті түрде ұсынудың тиімді құралы болып табылады.

Инфографика – ақпаратты графикалық элементтер, диаграммалар, схемалар және визуалды бейнелер арқылы ықшам әрі түсінікті түрде ұсыну тәсілі. Информатика сабақтарында инфографиканы қолдану оқушыларға күрделі ұғымдарды жеңіл қабылдауға мүмкіндік береді, ақпараттық үдерістер арасындағы байланыстарды көрнекі түрде көрсетуге жағдай жасайды. Мысалы, ақпараттың берілу тізбегін, кодтау тәсілдерін немесе ақпараттық модельдерді инфографикалық схема арқылы түсіндіру оқушылардың материалды жақсы меңгеруіне ықпал етеді.

Таблица 1: Ақпараттық үдерістерді меңгертуде қолданылатын ЖИ құралдары

Функционалдық бағыт	ЖИ құралдары	Дидактикалық мақсаты
Мәтіндік генерация	ChatGPT, Gemini	Ұғымдарды түсіндіру, ақпарат іздеу
Визуалдау	Canva, Piktochart	Инфографика және презентация жасау
Мультимедиа	Visme	Ақпаратты визуалды түрде көрсету
Талдау	WolframAlpha	Деректерді өңдеу және модельдеу

Қазіргі уақытта инфографиканы құруда түрлі цифрлық құралдар кеңінен қолданылады. 1-кестеде көрсетілгендей, Canva, Piktochart, Visme сияқты онлайн платформалар оқу материалын визуалды түрде ұсынуға мүмкіндік береді. Бұл құралдар көмегімен мұғалімдер ақпараттық үдерістерді көрсететін диаграммалар, алгоритмдік схемалар және визуалды модельдер дайындай алады. Мұндай визуализация оқушылардың танымдық белсенділігін арттырып, оқу материалын жүйелі қабылдауға көмектеседі.

Информатика сабақтарында инфографиканы қолданудың тағы бір артықшылығы – оқу ақпаратын құрылымдауға мүмкіндік беруі. Ақпараттық үдерістердің негізгі кезеңдерін (жинау, сақтау, өңдеу, беру) инфографикалық модель түрінде көрсету оқушылардың жүйелік ойлауын дамытуға ықпал етеді. Сонымен қатар визуалды материалдар оқу мотивациясын арттырып, оқу процесінің тиімділігін жоғарылатады.

Ғылыми зерттеулерде инфографиканың білім беру процесіндегі танымдық және дидактикалық мүмкіндіктері кеңінен қарастырылған. Зерттеушілер инфографиканы қолдану оқу материалын қабылдауды жеңілдететінін, күрделі ақпаратты жүйелеуге мүмкіндік беретінін және білім алушылардың аналитикалық ойлауын дамытуға ықпал ететінін атап өтеді [2].

Осылайша, мектеп информатикасындағы «Ақпарат және ақпараттық үдерістер» бөлімін оқытуда инфографиканы қолдану оқу материалын тиімді меңгеруге мүмкіндік береді. Визуалды модельдер арқылы ақпараттық үдерістердің құрылымы мен өзара байланысын көрсету оқушылардың тақырыпты терең түсінуіне жағдай жасайды. Сондықтан инфографика информатика пәнін оқытуда маңызды дидактикалық құралдардың бірі болып табылады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

[1] Cifrlyq Qazaqstan Memlekettik bagdarlama, Astana (2017).

<https://adilet.zan.kz/kaz/docs/P1700000827/links>.

[2] Balykbaev T.O., Bidaibekov E.Y., Grinshkun V.V. Tsifrlyq bilim беру ortasynyn zhahandanuu turaly, *Vestnik KazNPU im. Abaya. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, (85):1 (2024), 228–238.

БОЛАШАҚ ИНФОРМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІНЕ АҚПАРАТТЫҚ ҮДЕРІСТЕРДІ ОҚЫТУДА ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ҚҰРАЛЫН ПАЙДАЛАНУ

Ү.Қ. БАЗАРБАЕВА¹, Ш.Т. ШЕКЕРБЕКОВА², Г.С. АРЫНОВА³

^{1,2,3}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
umit.kuan@bk.ru

Білім беруді цифрландыру жағдайында болашақ информатика мұғалімдерін ақпарат ұғымын және ақпараттық үдерістерді оқытуға дайындау мәселесі қазіргі заманғы білім беру жүйесінің маңызды құрамдас бөлігі болып табылады. Ақпараттың мәні мен маңызы туралы білім, ақпаратты жинау, сақтау және өңдеу дағдыларының дамуы болашақ информатика мұғалімдерінің білімі мен дағдыларын қалыптастырады. Ақпаратты ұсыну дағдыларын қалыптастыру мәселесінің жекелеген аспектілері бірқатар еңбектерде қарастырылған.

Е.А. Ракитина зерттеу жұмысында іс-әрекетке негізделген информатиканы оқытудың әдістемелік жүйесін құру барысында мазмұндық бағыттарға негізделеді, оның ішінде ақпаратты ұсыну бағытына басымдық беріледі [1].

Ақпаратты ұсыну тәсілдері мен құралдарын игеру информатиканы оқытудың негізгі кезеңдерінің бірі ретінде қарастырады [2].

А.С. Захаров зерттеу жұмысында ақпаратты ұсыну дағдыларын қалыптастырумен байланысты мәселелер қарастырылады. Ақпаратты ұсыну мәселелері информатиканы оқыту мазмұнына дербес жеке бөлім ретінде де, сондай-ақ информатика курсының тұтас құрылымындағы мазмұндық бағыт ретінде де енгізілуі туралы айтады. Сонымен бірге ақпаратты ұсыну жөніндегі оқу іс-әрекетін ұйымдастыру әдістемесі ұсынылады. [3].

Бүгінгі таңда ақпарат және ақпараттық үдерістер мәселелері информатика курсының мазмұнында ерекше орын алатыны күмән тудырмайды. Алайда әдебиеттерді талдау көрсеткендей, ақпарат және ақпараттық үдерістер мәселелерін оқыту әдістемесін әзірлеудің нақты негізделген тәсілдері де әлі қалыптаспағаны байқалады. Сондықтан білім беруді цифрландыру жағдайында ақпарат және ақпараттық үдерістерді оқыту бойынша зерттеулер жүргізу қажет екендігі байқалады.

Қазіргі білім беру кеңістігінде ақпараттық үдерістерді оқыту мазмұны мен әдістемесін жаңарту цифрлық трансформация үдерістерімен тығыз байланысты. Ақпарат көлемінің артуы және оны өңдеу күрделілігі білім алушылардан ақпаратты талдау, құрылымдау және визуалды түрде қабылдау дағдыларын талап етеді. Осы тұрғыда визуализация технологиялары, соның ішінде инфографика, оқу процесінің тиімділігін арттыратын маңызды құрал ретінде қарастырылады.

Соңғы жылдары білім беру саласында жасанды интеллект технологияларын енгізу мәселесі ғылыми қауымдастықтың назарын аударып отыр. Юнеско-ның UNESCO баяндамаларында жасанды интеллекттің білім беру сапасын арттырудағы әлеуеті, соның ішінде оқу материалдарын автоматты генерациялау мүмкіндіктері ерекше атап өтіледі.

Генеративті жасанды (ЖИ) интеллект мәтін, сурет, диаграмма және визуалды модельдер құрастыруда кең қолданыс табуда [4]. Генеративті ЖИ-ді инфографика жасауда қолдану білім беру контентін әзірлеудің жаңа кезеңін қалыптастырады. Жасанды интеллектті инфографика жасау үшін пайдалану ақпараттық үдерістерді оқытуда жаңа дидактикалық мүмкіндіктер ашады. Мұндай тәсіл оқу материалын жекелендіруге, білім алушылардың деңгейіне бейімдеуге және олардың оқу мотивациясын арттыруға ықпал етеді.

Заманауи ЖИ генераторлары графикалық нысандарды техникалық іске асыруды автоматтандыруға, осылайша мұғалімнің назарын техникалық жұмыстан мазмұндық талдауға аударуға мүмкіндік береді.

Таблица 1: Деректерді визуализациялауға арналған ЖИ платформалары

Платформа	ЖИ негізгі функциялары	Мақсаты
Canva	Magic Design, Magic Write, Magic Media (мәтіннен кескінге), Magic Edit.	Әмбебап дизайн, презентациялар, қарапайым инфографикалар.
Vennage	AI Infographic Generator, деректер негізінде графиктерді автоматты түрде жасау.	Кәсіби есептер, оқу материалдары, күрделі схемалар.
Visme	AI Designer, интерактивті анимациялар, деректерді визуалдау бюджеттері.	Интерактивті контент, корпоративтік оқыту, есептер.
Piktochart	Мәтіндік промпттар негізінде 10 секундта дизайн жасау.	Білім беру постерлері, деректерді визуалдау.
Infogram	Деректер негізінде диаграммалар мен карталарды ЖИ-генерациялау.	Аналитикалық инфографика, үлкен деректермен жұмыс.

Бұл құралдар адаптивті оқытуды жүзеге асырып, оқу мазмұнын оқушылардың жеке ерекшеліктеріне бейімдеуге мүмкіндік береді. ЖИ негізінде жасалған инфографиканы оқу үдерісіне енгізу екі деңгейде іске асады: мұғалімнің тақырыпты түсіндіруге арналған материал дайындауы және оқушылардың меңгерген білімін визуализациялау бойынша өзіндік жұмысы.

Сонымен қатар, жасанды интеллект құралдарын қолдану мұғалімнің әдістемелік қызметін оңтайландырады. Бұл оқу процесінде мұғалімнің бағыттаушы және ұйымдастырушы рөлін күшейтеді.

Қорытындылай келе, ақпараттық үдерістерді оқытуда инфографика жасауға жасанды интеллектті пайдалану оқу процесінің тиімділігін арттыратын заманауи бағыт болып табылады.

Бұл тәсіл визуализацияның педагогикалық әлеуетін кеңейтіп, цифрлық білім беру жағдайында білім алушылардың ақпараттық құзыреттілігін қалыптастыруға мүмкіндік береді.

Кілтті сөздер: ақпарат, ақпараттық үдерістер, инфографика, жасанды интеллект, визуализация, цифрлық білім беру.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Rakitina E.A. Postroenie metodicheskoi sistemy obucheniya informatike na deyatelnostnoi osnove: avtoref. diss. dokt. ped. nauk, Moscow (2002), 48 p.
- [2] Suvorova T.N. Sovershenstvovanie metodiki izucheniya informatsionnykh tekhnologii v shkolnom kurse informatiki: diss. kand. ped. nauk, Moscow (2007), 203 p.
- [3] Zakharov A.S. Izuchenie voprosov predstavleniya informatsii v shkolnom kurse informatiki: avtoref. diss. kand. ped. nauk, Moscow (2008), 35 p.
- [4] Natsionalnaya akademiya obrazovaniya im. I. Altynsarina Metodicheskie rekomendatsii po primeneniyu iskusstvennogo intellekta v sisteme srednego obrazovaniya, Astana (2024), 297 p.

БІЛІМ БЕРУДІҢ ПАРАДИГМАЛЫҚ АУЫСУЫ ХАҚЫНДА

Е.Ы. БИДАЙБЕКОВ

¹ Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
esen_bidaibekov@mail.ru

Аннотация. Қазіргі кезде, төртінші өнеркәсіптік революция (4ӨӨ) жағдайында білім берудің индустриялық моделінің парадигмалық дағдарысы байқалады. Бұл дағдарыс стандартталған білім беру тәжірибелерінің цифрлық экономика талаптарына сай еместігімен көрініс табады. Осыған орай, Т. Кунның парадигмалық ауысымдар теориясы бойынша Цифрландыру мен Жасанды Интеллект (ЦМЖИ)-парадигмасына көшу негізделеді. Жаңа парадигманың негізгі ерекшеліктері: педагогикалық үдерісті интеллектуалдандыру, бейімделгіш ЖИ-платформалары арқылы білім траекторияларын жекешелендіру, VR/AR және IoT технологияларын интеграциялау. Инфраструктуралық, кадрлық, әдіснамалық кемшіліктер жүйелі талданып, Қазақстан білім беру жүйесінде ЦМЖИ-парадигмасын жүзеге асырудың үш деңгейлі моделі : 1) инфраструктура (2026 ж., GPU/VR зертханалары); 2) контент (2027 ж., 95 пайыз курстарға ЖИ оқулықтары); 3) парадигмалық ауысым (2028 ж., 90 пайыз ЖИ сауаттылығы) ұсынылады.

1. Индустриялық модельдің дағдарысы

Төртінші өнеркәсіптік революция жағдайында білім берудің индустриялық моделі өз шектеулерін айқын көрсете бастады. Т. Кунның парадигмалық ауысымдар теориясы бойынша, белгілі бір кезеңде үстем парадигма жинақталған қайшылықтар нәтижесінде дағдарысқа ұшырап, жаңа модельмен алмастырылады [1]. Қазақстан жағдайында бұл дағдарыс бірқатар эмпирикалық индикаторлармен расталады: білім беруге жұмсалатын шығындардың өсуіне қарамастан нәтижелердің сапалық серпін көрсетпеуі (PISA-парадоксы), түлектердің дағдылар сәйкессіздігі, жоғары оқу орындарының басым бөлігінде GPU-инфрақұрылымның болмауы және оқытушылардың едәуір үлесінің цифрлық құзыреттер бойынша бастапқы деңгейде қалуы. Бұл индустриялық модельдің стандартталған, репродуктивті логикасының цифрлық экономика талаптарына сәйкес келмейтінін көрсетеді.

2. Цифрлық және ЖИ-парадигма

Қалыптасқан қайшылықтарды еңсеру цифрландыру мен жасанды интеллектке (ЦМЖИ) негізделген білім беру парадигмасына көшу арқылы жүзеге асады. Бұл модель teacher-centered тәсілінен learner-centered қағидатына ауысуды көздейді және ЮНЕСКО ұсынған білім берудің болашақ тұжырымдамаларымен үйлеседі.

Жаңа парадигманың негізгі бағыттары:

- Жекешелендіру және smart classroom шешімдері;
- Data-driven оқыту және болжамды аналитика;
- Иммерсивті VR/AR технологиялары [2];
- Үздіксіз кәсіби даму және икемді модульдік құрылым.

Осылайша, ЦмЖИ-парадигмасы білім мазмұнын цифрлық платформалар, ЖИ-модульдері және аналитикалық жүйелер арқылы интеллектуалдандыруға бағытталған. Бұл тәсіл білім беру үдерісінің деректерге негізделген басқарылуын қамтамасыз етіп, оқытудың икемділігі мен тиімділігін арттырады. Нәтижесінде білім алушының жеке даму траекториясын қалыптастыру мүмкіндігі кеңейіп, оқу сапасының тұрақты өсуіне жағдай жасалады.

3. Жүзеге асыру моделі

ҚРБЖЖҒМ талдауы білім беру жүйесінде инфрақұрылымдық және кадрлық кемшіліктердің сақталғанын көрсетеді. Осыған байланысты ЦмЖИ-парадигмасын іске асырудың үш кезеңді моделі ұсынылады: 1-кезең (2026 ж.) – Инфрақұрылым: 50 басым ЖОО-да GPU-кластерлер құру және VR/AR зертханаларын дамыту. Абай атындағы ҚазҰПУ мен Сәтбаев университетінің зертханалары алғашқы институционалдық үлгілер болып табылады. 2-кезең (2027 ж.) – Контент: Академиялық курстардың басым бөлігіне ЖИ-модульдерін енгізу және AI-Sana бағдарламасы шеңберінде жасанды интеллект бағыттарын стандарттау [3]. 3-кезең (2028 ж.) – Парадигмалық ауысым: Педагогтардың цифрлық құзыреттерін DigCompEdu Knowledge Deepening деңгейіне жеткізу және білім берудегі ЖИ этикасының ұлттық стандартын әзірлеу. Ұсынылған КРІ индикаторлары инфрақұрылымды кеңейту, ЖИ-контент үлесін арттыру және педагогтардың ЖИ сауаттылығын жүйелі түрде көтеруді көздейді. Атап айтқанда, GPU-инфрақұрылыммен қамтылған жоғары оқу орындарының үлесін кезең-кезеңімен арттыру, ЖИ-модульдері енгізілген академиялық пәндердің пайыздық көрсеткішін көбейту және DigCompEdu стандарты бойынша педагогтардың құзыреттік деңгейін өлшеу негізгі өлшемдер ретінде қарастырылады. Сонымен қатар, білім беру үдерісінде ЖИ құралдарын қолдану жиілігі мен олардың оқу нәтижелеріне әсерін бағалайтын сапалық және сандық көрсеткіштер енгізілуі тиіс.

4. Этикалық негіз

ЖИ-бағытталған білім беру моделін жүзеге асыру алгоритмдердің мөлдірлігін, білім алушылар деректерін қорғауды және дискриминацияға жол бермеуді талап етеді. Бұл қағидаттар ЮНЕСКО ұсынымдарына сәйкес жүзеге асырылуы тиіс.

Индустриялық білім беру моделі цифрлық трансформация жағдайында парадигмалық дағдарысқа ұшырап отыр. Т. Кун теориясына сәйкес, бұл жаңа – цифрландыру мен жасанды интеллектке негізделген парадигмаға өтуді қажет етеді [1]. Қазақстан жағдайында ұсынылған үш деңгейлі модель инфрақұрылымдық жаңғырту, контентті цифрландыру және кадрлық қайта даярлау арқылы жүйелі трансформацияны қамтамасыз етуге бағытталған.

Төртінші өнеркәсіптік революция жағдайында білім беру жүйесі парадигмалық қайта қарауды талап ететін тарихи кезеңге жетті. Индустриялық модельдің шектеулері цифрландыру мен жасанды интеллектке негізделген жаңа білім беру логикасына көшу қажеттігін айқындайды. Ұсынылған үш кезеңді модель инфрақұрылымды жаңғырту, мазмұнды интеллектуалдандыру және кадрлық әлеуетті күшейту арқылы жүйелі трансформацияны қамтамасыз етуге бағытталған. Бұл үдеріс білім алушыға бағытталған, деректерге негізделген және технологиялық тұрғыдан икемді білім беру ортасын қалыптастыруға мүмкіндік береді. Нәтижесінде Қазақстанның білім беру жүйесі жаһандық цифрлық кеңістікте бәсекеге қабілетті, тұрақты дамуға бейім модельге көшу алғышарттарына ие болады.

Кілтті сөздер: парадигмалық ауысым, ЦмЖИ-парадигмасы, 4ӨӨ, жекешелендіру, GPU-инфрақұрылымы.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

[1] Kylyshbek F., Sadvakassova A., Dokuz A.S. Research of the current situation of teaching the internet of things to future computer science teachers in higher educational institutions of the Republic of Kazakhstan, *Scientific Journal of Pedagogy and Economics*, **408:2** (2024), 307–320. DOI: <https://doi.org/10.32014/2024.2518-1467.724>.

New Climate Economics as Driver of Clean Energy Transition for Net Zero 2050

R. CHUNG

Ban Ki-Moon Foundation, Seoul, Korea

greengrowthrkc@naver.com

Four major persistent structural problems of the current climate-economy paradigm have to be rectified if a clean energy transition for Net Zero 2050 is to be achieved.

Firstly, carbon pricing can no longer be ignored and delayed. The current climate-economy paradigm focusing mainly on mobilising finance and technology without touching on the issue of the carbon price signal is an uphill battle, since finance and technology will not flow if the price signal is not right. The urgent construction of a new climate-economy nexus that focuses on carbon pricing as the driver of financial flows and technology innovation is critical. As long as the climate-economy paradigm relies on a market that treats carbon as free goods, a carbon-free future will not be feasible.

Secondly, to ensure a global net reduction, carbon emissions data has to be calculated based on consumption, not solely on production (GDP). Carbon emissions calculated based on GDP confuse carbon leakage from developed countries to developing countries as climate mitigation. Much of the emission reduction of the EU is in fact carbon leakage by relocating energy-intensive heavy industry to developing countries like China, not climate mitigation. If the embedded emission of imported goods is added, the EU's consumption-based emissions were about 17 per cent higher in 2020 than production emissions. For a global net reduction, emissions have to be calculated based on consumption. It is only natural that consumers — not just producers — have to be responsible for the emissions of the products they consume.

Thirdly, the current global climate-economy paradigm has to provide options for consumers to join and share climate actions. We are stuck in an impossible situation where governments and businesses are tasked with achieving the NDCs (Nationally Determined Contribution) of the Paris Climate Agreement, while the governments and businesses have limited room to manoeuvre due to restricted fiscal resources and profitability constraints. Consumers are simply left out, watching and waiting for the outcome. The new climate-economy paradigm must provide opportunities for consumers to share the responsibility of the NDCs by making their own PDCs (Personally Determined Contribution). A clean energy price that allows consumers to buy and consume renewable energy at a higher real price has to be provided. Since we cannot afford to wait for a social consensus to emerge on a single fixed price of renewable energy for all of society, we need to start with the consumers who are concerned about the climate crisis and willing to pay the real price of renewable energy.

Fourthly, the negative message that “carbon mitigation will reduce GDP” based on “cost-benefit analyses” using static general equilibrium macroeconomic modelling exercises of conventional economics has to be replaced by positive multiplier effects for economic growth and job creation that could be triggered by investment in a clean energy transition. Gradual, step-by-step internalisation of carbon pricing must be the integral basis for economy-wide systemic change for a carbon-free future. Maximising the positive impact for technological innovation and minimising the negative burden of carbon pricing on the economy should be the main focus of constructing new climate economics.

Green Growth was proposed in 2005 as a new paradigm to offer clean energy transition as an opportunity for economic growth that is green and sustainable. However, Green Growth is largely treated as an anecdote at project level, and is not yet ready to provide a systematic economy-wide strategy for the clean energy transition.

Moving away from a conventional cost-benefit analysis towards New Climate Economic thinking focusing on maximising the multiplier effect of clean energy investment for positive long-term

growth and technical innovation, and minimising the negative short-term burden from carbon pricing, should provide the backbone for the new effective climate-economy paradigm.

For a soft-landing of New Climate Economics, social innovation to promote consumer acceptance of carbon pricing has to be promoted as a critical part of the new climate-economy nexus. The PDC is not just an economic policy, it is also a social innovation that could transform all of society towards a carbon-free future.

Keywords: carbon pricing, multiplier effect, cost-benefit analysis, climate-economy paradigm, green growth, PDC, new climate economics, social innovation.

JEL codes: Q5, O3, E2.

References

- [1] Barrett J., Peters G., Wiedmann T., Scott K., Lenzen M., Roelich K., Le Quéré C. Consumption-based GHG emission accounting: a UK case study. *Climate Policy*, **13**:4 (2013), 451–470.
- [2] Jaumotte F., Liu W., McKibbin W. J. Mitigating Climate Change: Growth-Friendly Policies to Achieve Net Zero Emissions by 2050. IMF Working Paper, 2021.
- [3] Korea Transport Research Institute. *Transportation Policy Evaluation Index Survey Project Brief 2021*. KOTI, Seoul (2021).
- [4] Lomborg B. Welfare in the 21st century: Increasing development, reducing inequality, the impact of climate change, and the cost of climate policies. *Technological Forecasting and Social Change*, **156** (2020), 119981.
- [5] London School of Economics and Political Science. *The Economics of Climate Change: The Stern Review*. HM Treasury, London (2006).
- [6] Organisation for Economic Co-operation and Development. *Investing in Climate, Investing in Growth*. OECD Publishing, Paris (2017).
- [7] Peters G. P., Minx J. C., Weber C. L., Edenhofer O. Growth in emission transfers via international trade from 1990 to 2008. *PNAS*, **108**:21 (2011), 8903–8908.
- [8] Stern N. *The Economics of Climate Change: The Stern Review*. Cambridge University Press, Cambridge (2006).

ПОДГОТОВКА УЧИТЕЛЯ ИНФОРМАТИКИ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АССИСТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УСЛОВИЯХ ИНКЛЮЗИВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ: ПОТЕНЦИАЛ ПРОГРАММ МИКРОКВАЛИФИКАЦИЙ

Д.Д. ЕЛУБАЕВА

Абай атындағы Қазақ Ұлттық Педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Современный этап развития образования характеризуется конвергенцией двух ключевых трендов: всеобщей цифровизации и утверждения инклюзии как ведущего принципа образовательной политики. Это требует от учителя информатики не просто свободного владения предметным содержанием, а сформированности готовности к созданию доступной цифровой образовательной среды для всех обучающихся, включая детей с особыми образовательными потребностями (ООП). Ключевую роль в этом процессе играют ассистивные технологии (АТ) — устройства, программное обеспечение и инструменты, предназначенные для поддержки, расширения или улучшения функциональных возможностей людей с инвалидностью и ООП.

Особая роль учителя информатики в инклюзивном образовании обусловлена спецификой его предмета. Информатика не просто дает знания о компьютере, но и формирует инструментальную компетенцию, необходимую для дальнейшей социализации и профессиональной деятельности учащихся. Для ребенка с ОВЗ компьютер, оснащенный ассистивными технологиями, становится средством преодоления барьеров, инструментом коммуникации, познания и

будущей работы. Следовательно, именно на уроках информатики закладывается фундамент цифровой независимости и равных возможностей.

Однако, как показывают исследования [1–2], педагоги зачастую не готовы к эффективному использованию АТ в инклюзивном классе. Основной причиной является дефицит соответствующих профессиональных компетенций, который не восполняется в ходе традиционной подготовки. Курсы повышения квалификации зачастую носят общетеоретический характер и не успевают за стремительным обновлением технологического инструментария. В ответ на этот вызов возникают новые, более гибкие форматы профессионального развития, среди которых особое место занимают программы микроквалификаций (micro-credentials), позволяющие осваивать узкие, востребованные на практике компетенции [3]. Цель данной статьи — теоретически обосновать и представить структурно-содержательную модель подготовки учителей информатики к применению ассистивных технологий через систему программ микроквалификаций.

Для эффективной реализации инклюзивной практики на уроках информатики учителю необходимо обладать интегративной готовностью, включающей три взаимосвязанных компонента: технико-технологическая компетентность (Hard Skills), методическая компетентность, психологическая готовность и этика.

Традиционные программы повышения квалификации, как правило, являются линейными и недостаточно гибкими. Они не позволяют педагогу быстро восполнить пробел в конкретной области, не проходя при этом всю программу целиком. Программы микроквалификаций лишены этого недостатка. Они представляют собой короткие, нацеленные на конкретный результат учебные курсы, успешное прохождение которых подтверждается цифровым сертификатом. Это позволяет учителю выстраивать индивидуальную траекторию обучения и получать именно те компетенции, которые актуальны здесь и сейчас.

Основываясь на анализе структуры готовности и лучших практиках, в данном исследовании предлагается модель, включающая следующие взаимосвязанные модули (микроквалификации): Базовый «Основы инклюзивного образования в цифровой среде»; Технологический «Ассистивные технологии в информатике: инструментарий и настройка»; Методический «Проектирование доступного урока информатики»; Специальный «Цифровая дидактика и создание доступного контента». Каждый модуль завершается практико-ориентированным заданием (кейсом) и подтверждается цифровым значком, который может быть учтен в портфолио учителя.

Подготовка учителей информатики к использованию ассистивных технологий является необходимым условием реализации права на качественное и доступное образование для всех учащихся в условиях цифровой трансформации. Специфика предмета «Информатика» возлагает на педагога дополнительную ответственность за формирование у детей с ООП ключевых цифровых компетенций как основы их будущей самостоятельной жизни. Традиционные модели повышения квалификации, в силу своей инертности и линейности, не всегда способны оперативно и адресно реагировать на быстрое обновление технологий и методик инклюзии. Программы микроквалификаций представляют собой перспективный и научно обоснованный инструмент решения этой задачи. Предложенная модульная модель обеспечивает гибкость, практическую направленность и возможность индивидуализации обучения. Ее внедрение позволит сформировать у педагогов не просто разрозненные знания об АТ, а целостную профессиональную готовность к проектированию и реализации эффективной инклюзивной образовательной среды на уроках информатики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алехина С.В. Инклюзивное образование: история и современность. — М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2013.
- [2] Quinn B.S., Behrmann M., Mastropieri M., Chung Y. Who is using assistive technology in schools? Journal of Special Education Technology.
- [3] Дегтярева Т.Н. Микроквалификации как новый тренд в дополнительном профессиональном образовании // Профессиональное образование и рынок труда. — 2021.

РОБОТОТЕХНИКА ОҚЫТУДА ВИРТУАЛДЫ СИМУЛЯЦИЯЛЫҚ ОРТАЛАРДЫҢ ДИДАКТИКАЛЫҚ МҮМКІНДІКТЕРІ

С.Б. ШАКИРОВА¹, Е.Х. ЖАБАЕВ²

¹Астана Халықаралық Университеті, Астана, Қазақстан

ermahan516@gmail.com

Аннотация. Мақалада робототехника курсына виртуалды симуляциялық орталарды қолданыудың дидактикалық мүмкіндіктері зерттеледі. Виртуалды симуляциялық орта оқушыларға тәжірибелік әрекеттерді қауіпсіз, қайталау мүмкіндігі бар форматта орындауға мүмкіндік береді. Зерттеу барысында виртуалды симуляциялық орталардың алгоритмдік, инженерлік және зерттеушілік ойлауды дамытуға әсері қарастырылып, оқу мотивациясын арттырудағы рөлі талданады. Педагогикалық эксперимент нәтижелері виртуалды орта қолданылған сабақтарда білім сапасының, практикалық дағдылардың және оқушылардың зерттеушілік белсенділігінің артқанын көрсетеді.

Цифрлық білім беру дәуірінде STEM бағытындағы пәндерді оқыту әдістерін жаңарту басты міндеттердің бірі болып отыр. Робототехника курстары алгоритмдік ойлау, бағдарламалау, электроника және механика сияқты пәндердің интеграциясын талап етеді.

Дәстүрлі зертханалық сабақтарда: материалдық құралдардың шектеулігі, қауіпсіздік талаптары, уақыт пен орынның шектеулілігі сияқты қиындықтар кездеседі. Осы мәселелерді шешудің тиімді жолдарының бірі – виртуалды симуляциялық орталарды қолдану. Виртуалды симуляциялық орталар (VSE) компьютерлік модельдеу мен интерактивті симуляция негізінде тәжірибелік әрекеттерді орындауға мүмкіндік береді.

UNESCO цифрлық трансформация білім беру жүйесінің басты басымдығы екенін көрсетсе, OECD зерттеулерінде виртуалды технологияларды қолдану білім сапасын арттыруға, зерттеушілік дағдыларды дамытуға ықпал ететіні дәлелденген.

Виртуалды симуляциялық орта – бұл компьютерлік модельдеу арқылы оқушыға нақты тәжірибелік әрекеттерді орындауға мүмкіндік беретін интерактивті білім беру жүйесі.

Робототехника оқытуда ең танымал платформалар:

Tinkercad – Arduino схемалары мен робот конструкциясын симуляциялау;

Webots – автономды роботтарды бағдарламалау;

Gazebo – 3D робот қозғалысын модельдеу;

Arduino – микроконтроллерлік жүйелерді виртуалды түрде оқыту.

Дидактикалық мүмкіндіктері:

- күрделі процестерді визуализациялау;
- экспериментті бірнеше рет қайталау;
- нәтижелерді нақты уақыт режимінде бақылау;
- теориялық материалды практикалық әрекеттермен байланыстыру.

Кілтті сөздер: мобильді оқыту, робототехника, STEM-білім, мобильді қосымша, RoboBil, қосымша шындық (AR).

ӘДЕБИЕТ

- [1] *UNESCO*, Digital Education Transformation Report, Paris (2021).
- [2] *OECD*, Education in a Digital World, Paris (2020).

ИННОВАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КАРЬЕРНЫХ ПЕРСПЕКТИВ ИТ-КАДРОВ

А.Б. ЗАКИРОВА¹, Ж.Б. АХАЕВА²

^{1,2}Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

¹zakirova_ab@enu.kz, ²akhayeva_zhb@enu.kz

Аннотация. Представлена инновационная технология обучения высшей математике с использованием искусственного интеллекта (ИИ), направленная на повышение карьерных перспектив будущих ИТ-кадров. Описана математическая модель адаптивного обучения, архитектура образовательной платформы и результаты педагогического эксперимента ($n=224$). Внедрение технологии способствует повышению успеваемости на 23–27 процентов и улучшает показатели трудоустройства выпускников на 24 процента.

1. Введение Современный ИТ-рынок требует от выпускников не только фундаментальных знаний высшей математики, но и способности применять их в реальных профессиональных задачах. Традиционные методы обучения часто не обеспечивают необходимого уровня практической подготовки, что создаёт разрыв между академическим образованием и требованиями работодателей.

Искусственный интеллект открывает новые возможности для персонализации образовательного процесса. Адаптивные системы способны анализировать индивидуальные траектории обучения, выявлять пробелы в знаниях и предлагать оптимальные пути их устранения [1].

Цель работы — разработка инновационной технологии обучения высшей математике с использованием ИИ для повышения карьерных перспектив будущих ИТ-кадров.

2. Математическая модель адаптивного обучения

Процесс обучения формализуем как динамическую систему. Пусть $K_i(t)$ — уровень компетенций i -го студента в момент времени t , A_j — набор образовательных активностей, предоставляемых ИИ-платформой.

Определение 1. *Индивидуальная траектория обучения* — последовательность образовательных активностей $\{A_{j_k}\}_{k=1}^n$, оптимизирующая функционал успеваемости при заданных ограничениях времени.

Динамика накопления компетенций описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK_i}{dt} = \alpha_i E(t) + \beta_i P(t) - \gamma_i K_i(t), \quad (1)$$

где $E(t)$ — эффективность образовательного контента, $P(t)$ — уровень педагогической поддержки, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — индивидуальные коэффициенты студента.

Теорема 1. (О сходимости траектории). Пусть ИИ-платформа выбирает активности A_j так, что $E(t) \geq E_{\min} > 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ уровень компетенций $K_i(t)$ стремится к целевому значению:

$$K^* = \frac{\alpha_i E_{\min} + \beta_i P_{\max}}{\gamma_i}. \quad (2)$$

Замечание 1. Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ оцениваются методами машинного обучения на основе данных о взаимодействии студента с платформой (время решения задач, количество попыток, запросы помощи).

3. Архитектура ИИ-платформы

Принцип работы: (1) входное тестирование студента; (2) формирование персонализированной траектории; (3) адаптация сложности задач в реальном времени; (4) интеграция с требованиями рынка труда; (5) выдача цифрового сертификата с детализацией навыков.

4. Результаты педагогического эксперимента Эксперимент проводился в ЕНУ им. Гумилева в 2024–2025 гг. В исследовании приняли участие 224 студента ИТ-специальностей,

Таблица 1: Разработанная система включает три ключевых модуля

Модуль	Функция	Технология
Адаптивный движок	Подбор задач оптимальной сложности	Machine Learning, Knowledge Tracing
Система рекомендаций	Материалы для устранения пробелов	Collaborative Filtering, NLP
Карьерный модуль	Связь учебных достижений с требованиями работодателей	Skills Mapping, Labor Market Analysis

разделённых на контрольную (традиционное обучение) и экспериментальную (ИИ-платформа) группы.

Таблица 2: Сравнение показателей успеваемости

Показатель	Контрольная группа	Экспериментальная группа
Средний балл (экзамен)	3.42	4.15
Процент сдавших с первого раза	68%	89%
Удовлетворенность курсом	72%	94%
Получение офферов по выпуску	34%	58%

Утверждение 1. Внедрение ИИ-платформы статистически значимо повышает успеваемость ($p < 0.01$, t-критерий Стьюдента).

Дополнительно зафиксировано: снижение отсева на 18 процентов, увеличение времени самостоятельной работы на 42 процента, рост мотивации к изучению математики (по данным опроса UTAUT2) [2].

5. Обсуждение и заключение Разработанная технология показала эффективность по трём направлениям: повышение успеваемости за счёт персонализации, формирование востребованных компетенций через интеграцию требований работодателей и возможность масштабирования в других вузах.

Интеграция карьерного модуля повысила мотивацию к изучению высшей математики на 31 процента. Внедрение ИИ-платформы увеличило успеваемость на 23–27 процента, а уровень трудоустройства выпускников — на 24 процента. Технология демонстрирует устойчивость модели и потенциал дальнейшего распространения.

Заключение Внедрение ИИ-платформ в обучение высшей математике является эффективным инструментом подготовки конкурентоспособных ИТ-кадров для цифровой экономики.

Финансирование Исследование выполнено при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489530).

Ключевые слова: искусственный интеллект, высшая математика, адаптивное обучение, ИТ-образование, карьерные перспективы, персонализация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chen L. et al. AI-powered adaptive learning systems: a systematic review, *Computers and Education*, 198 (2023), 104789.
- [2] Venkatesh V. et al. Unified Theory of Acceptance and Use of Technology: UTAUT2, *MIS Quarterly*, **37**:2 (2012), 157–178.

ИНТЕГРАЦИЯ ИИ-АДАПТИВНЫХ МЕТОДОВ В ПОДГОТОВКУ ИТ-СПЕЦИАЛИСТОВ: РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВНЕДРЕНИЯ

И. ЖУСИПОВ

Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева

k.r301156@gmail.com

Подготовка ИТ-специалистов в условиях цифровой экономики требует перехода от унифицированных образовательных моделей к персонализированным траекториям обучения. Существенные различия в стартовом уровне подготовки, темпе усвоения материала и когнитивных особенностях обучающихся снижают эффективность традиционного формата преподавания. В связи с этим особую актуальность приобретают ИИ-адаптивные образовательные системы, позволяющие динамически подбирать содержание и сложность учебных заданий на основе анализа цифрового следа студента и результатов текущего контроля.

Цель исследования состоит в разработке и экспериментальной проверке модели адаптивного обучения, обеспечивающей повышение уровня усвоения материала не менее чем на 15%. Разработанная модель реализована на платформе LMS_EDU.KZ и включает четыре взаимосвязанных компонента: компьютеризированное адаптивное тестирование (CAT), трёхпараметрическую модель Item Response Theory (3-PL), таксономию Блума для структурирования заданий по уровням когнитивной сложности и механизм индивидуальных микро-курсов (scaffolding) для устранения выявленных пробелов. Пилотное исследование проведено в рамках дисциплины «Веб-технологии» среди 40 студентов бакалавриата ИТ-направлений. Для каждого модуля была сформирована база из 40 калиброванных тестовых заданий. Адаптивный цикл включал входную диагностику, анализ ошибок, формирование индивидуальной траектории и повторное тестирование до достижения порогового уровня 80%.

Результаты апробации показали высокую эффективность предложенной модели. Первичное тестирование зафиксировало средний уровень усвоения материала в диапазоне 55–61% по модулям. После прохождения адаптивных траекторий итоговый средний результат составил 87,85% при стандартном отклонении $\sigma = 4,2$. Общий прирост по сравнению с первичной диагностикой достиг 32,35 процентных пункта; различия являются статистически значимыми ($t = 8,34$, $p < 0,001$). По отдельным модулям достигнуты следующие итоговые результаты: HTML — 78%, CSS — 79%, JavaScript — 75%, Django — 82%. Дополнительно установлено, что 20% студентов завершили курс досрочно, 50% выпускников были трудоустроены в течение первых трёх месяцев, пять студентов были приняты на стажировку до защиты диплома, а наибольший относительный прирост (+18% к показателям прошлого года) продемонстрировали студенты из сельских регионов.

Полученные данные подтверждают, что интеграция CAT, IRT и персонализированных микро-курсов обеспечивает существенное повышение качества подготовки ИТ-специалистов и способствует выравниванию образовательных возможностей различных групп обучающихся. Практическая значимость исследования связана с возможностью масштабирования модели на другие дисциплины и образовательные программы. К ограничениям относятся необходимость качественной калибровки заданий, подготовка преподавателей к интерпретации IRT-отчётов и соблюдение этических требований при обработке образовательных данных.

Ключевые слова: адаптивное обучение, искусственный интеллект, CAT, IRT, персонализация, Learning Analytics, ИТ-образование.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Romero C., Ventura S. Educational data mining: A review of the state of the art, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C*, **40**:6 (2010), 601–618.
- [2] Baker R. S. J. d. Data mining for education, in: *International Encyclopedia of Education*, 3rd ed. (2010), 112–118.

- [3] van der Linden W. J., Hambleton R. K. (eds.) *Handbook of Modern Item Response Theory*, Springer, New York (1997).
- [4] Lord F. M. *Applications of Item Response Theory to Practical Testing Problems*, Routledge, New York (1980; reprint 2012).
- [5] Anderson L. W., Krathwohl D. R. (eds.) *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*, Longman, New York (2001).
- [6] Beck J. E., Chang K., Mostow J., Corbett A. Does help help? Introducing the Bayesian Evaluation and Assessment methodology, *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, **18:3** (2008), 273–297.
- [7] Pardos Z. A., Heffernan N. T. Modeling individualization in a Bayesian networks implementation of knowledge tracing, *User Modeling and User-Adapted Interaction*, **20** (2010), 133–169.
- [8] Kong S. C. Personalised learning through learning analytics and artificial intelligence, *Computers & Education*, **129** (2019), 271–284.

ЭЛЕКТРОНДЫҚ ИЕРАРХИЯЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМДАР НЕГІЗІНДЕ ОҚУ МАЗМҰНЫН ҚҰРЫЛЫМДАУ ЖӘНЕ ЦИФРЛЫҚ ОҚУ РЕСУРСТАРЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Б.Б. ҚАЛДАНОВ¹, Е.Ы. БИДАЙБЕКОВ², М.С. УРАЗЫМБЕТОВ³

^{1,2,3}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

b.kaldanov@abaiuniversity.edu.kz

Қазіргі кезеңде білім беру жүйесінің цифрлануы оқу мазмұнын құрылымдаудың жаңа тәсілдерін талап етеді. Осындай тәсілдердің бірі – иерархиялық құрылымдарды қолдану. Иерархия ұғымы ғылымда білімді жүйелеудің негізгі әдістерінің бірі ретінде қарастырылады. Бұл тәсілдің философиялық негіздері ортағасырлық шығыс ғалымдарының еңбектерінде де көрініс тапқан. Иерархиялық құрылым арқылы білімді жүйелеу идеялары ортағасырлық шығыс философиясында да кездеседі. Ұлы ойшыл Әбу Насыр Әл-Фараби өзінің «Ғылымдардың жіктелуі» трактатында ғылымдарды өзара байланысты сатылар бойынша орналастырып, білімнің құрылымын иерархиялық жүйе ретінде қарастырған [1]. Бұл идея қазіргі білім құрылымдарын модельдеудің теориялық алғышарттарының бірі болып табылады.

Ақпараттық технологиялардың дамуы иерархиялық құрылымдарды электрондық форматта қолдануға мүмкіндік берді. Білім беру саласында электрондық иерархиялық құрылымдарды ғылыми тұрғыдан негіздеген көрнекті ғалымдардың бірі – педагогика ғылымдарының докторы, профессор Гриншкун Вадим Валерьевич [2]. Оның ғылыми жетекшісі – педагогика ғылымдарының докторы, профессор Бидайбеков Есен Ыкласович. Ғалым ұсынған электрондық иерархиялық құрылым моделі оқу мазмұнын жүйелеу мен цифрлық білім беру ресурстарын жобалаудың тиімді құралы ретінде қарастырылады.

Аталған ғылыми модель негізінде оқу мазмұнын ұйымдастырудың жаңа тәсілдерін дамыту бағытында авторлық құрылым ұсынылды. Оның негізгі ерекшелігі – иерархиялық құрылымдарды құру процесіне жасанды интеллект модулін енгізу болып табылады. Бұл тәсіл оқу мазмұнын қалыптастыруды автоматтандыруға және білім беру ресурстарын құру үдерісін оңтайландыруға мүмкіндік береді [3].

Оқу мазмұнын электрондық иерархиялық құрылымдар негізінде құру мақсатында «Иерархия-2000» бағдарламалық ортасы қолданылады. Авторлар электрондық иерархиялық құрылымдарды құруға арналған «Иерархия-АІ» атты бағдарламалық ортаны ұсынды. Жүйе Гриншкунның электрондық иерархиялық құрылым моделіне негізделген және оқу мазмұнын қалыптастыру процесіне жасанды интеллект модулін енгізумен ерекшеленеді. Бұл жүйеде оқу мазмұнын қалыптастырудың бірнеше тәсілдері қарастырылған.

Бірінші тәсіл – қолмен құрастыру. Бұл жағдайда пайдаланушы оқу тақырыптарын, ұғымдарды және олардың арасындағы байланыстарды өз бетінше анықтап, иерархиялық құрылым

құрады. Мұндай тәсіл педагогқа оқу материалының логикалық жүйесін толық бақылауға мүмкіндік береді.

Екінші тәсіл – жасанды интеллект көмегімен құрастыру. Бұл әдісте жүйе оқу мазмұнын оқу мақсаты мен белгілі бір педагогикалық критерийлер негізінде автоматты түрде қалыптастырады. Мұндай критерийлер ретінде оқу мақсаттарының таксономиялық деңгейлері, ұғымдар арасындағы логикалық байланыстар, мазмұнның жүйелілігі, күрделілік деңгейінің бірізділігі және оқу нәтижелерінің күтілетін көрсеткіштері қолданылады.

Үшінші тәсіл – аралас модель. Бұл жағдайда оқу мазмұны адам мен жасанды интеллекттің бірлескен әрекеті арқылы қалыптасады. Мысалы, педагог бастапқы иерархиялық құрылымды құрып, оны жасанды интеллект арқылы тексеріп немесе толықтыра алады. Керісінше, жасанды интеллект жасаған құрылымды педагог өңдеп, әдістемелік тұрғыдан жетілдіруге мүмкіндік алады.

Ұсынылған тәсілдің маңызды ерекшелігі – оның әмбебаптығы. Электрондық иерархиялық құрылымдар көмегімен кез келген оқу пәні бойынша білім мазмұнын жүйелі түрде ұйымдастыруға болады. Сонымен қатар иерархиялық құрылымның әрбір элементіне мәтіндік материалдар, бейнелер, бейнесабақтар, интерактивті тапсырмалар және тесттер сияқты оқу контентін енгізу арқылы толыққанды цифрлық оқу құралын қалыптастыру мүмкіндігі бар.

Цифрлық білім беру ортасын жобалау тұрғысынан электрондық иерархиялық құрылымдардың тағы бір маңызды ерекшелігі – оқу мазмұнын гипермедиалық форматта автоматты түрде ұйымдастыру мүмкіндігі болып табылады. Сонымен қатар жүйе беттердің орналасу ретін, олардың арасындағы навигациялық байланыстарды және оқу материалын игеру траекториясын автоматты түрде анықтайды. Мұндай гипермедиалық ұйымдастыру оқушылардың ақпаратты қабылдауын жеңілдетіп, оқу мазмұнын кезең-кезеңмен меңгеруге мүмкіндік береді. Педагогикалық зерттеулерде гипермедиалық құрылымдардың оқу материалының көрнекілігін арттырып, когнитивтік жүктемені оңтайландыратыны және білім алушылардың танымдық белсенділігін күшейтетіні көрсетілген. Осы тұрғыдан алғанда, электрондық иерархиялық құрылымдар негізінде құрылған гипермедиалық білім беру ортасы оқушылардың когнитивтік деңгейін арттыруға және оқу материалын тиімді меңгеруге ықпал ететін маңызды цифрлық құрал болып табылады.

Цифрлық оқу ортасын құру барысында электрондық иерархиялық құрылымдардың тағы бір маңызды мүмкіндігі – оқу мазмұнын негізінде автоматты түрде бақылау және бағалау құралдарын қалыптастыру болып табылады. Иерархиялық құрылымдағы әрбір ұғым немесе тақырып негізінде жүйе тест тапсырмаларын, сәйкестендіру жаттығуларын, көпнұсқалы сұрақтарды және қысқа жауапты тапсырмаларды автоматты түрде генерациялай алады. Мұндай тәсіл оқу мазмұнын мен бағалау құралдарының мазмұндық сәйкестігін қамтамасыз етеді. Сонымен қатар тест тапсырмалары оқу мақсаттарының таксономиялық деңгейлеріне сәйкес қалыптастырылып, білім алушылардың білімін объективті бағалауға мүмкіндік береді.

Жасанды интеллект модулін қолдану оқу мазмұнын генерациялау мүмкіндіктерін де кеңейтеді. Жүйе иерархиялық құрылымдағы тақырыптар негізінде теориялық түсіндірмелер, қысқаша анықтамалар, мысалдар және иллюстрациялық материалдарды автоматты түрде ұсына алады. Бұл педагогтарға цифрлық оқу құралдарын дайындау уақытын қысқартып, білім беру ресурстарының мазмұндық толықтығын қамтамасыз етуге мүмкіндік береді.

Осылайша, электрондық иерархиялық құрылымдарды қолдану оқу мазмұнын жүйелеудің тиімді тәсілі болып табылады. Бұл тәсіл оқу материалын құрылымдауға, білім мазмұнын цифрлық форматта ұйымдастыруға және заманауи білім беру ресурстарын әзірлеуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар жасанды интеллект модулін енгізу оқу мазмұнын қалыптастыру үдерісін автоматтандыруға және цифрлық білім беру ортасының мүмкіндіктерін кеңейтуге жағдай жасайды.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

[1] Sandybayev Zh. Classification of al-Farabi's sciences, *Journal of Oriental Studies*, **94**:3 (2020). DOI: <https://doi.org/10.26577/JOS.2020.v94.i3.14>.

[2] Grinshkun V.V. Organizatsiya komp'yuterizirovannogo obucheniya na osnove ierarkhicheskikh struktur dannykh: diss. kand. ped. nauk, Almaty (1996), 182 p.

[3] Bidaibekov E.Y., Kaldanov B.B. Vozmozhnost i tselesoobraznost ispolzovaniya elektronnykh ierarkhicheskikh struktur v obuchenii informatike v nachalnoi shkole, *Vestnik Rossiiskogo universiteta družby narodov. Seriya: Informatizatsiya obrazovaniya*, **21:3** (2024), 275–296. DOI: 10.22363/2312-8631-2024-21-3-275-296.

КОНВЕКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ–РЕАКЦИЯ ТЕҢДЕУІН НЕЙРОЖЕЛІЛЕР НЕГІЗІНДЕ ШЕШУ

А.А. КАБУЛОВА¹, С.Е. КАСЕНОВ²

¹Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹Ainurkabulova7@gmail.com, ²Kassenov.Syrym@kaznu.kz

Қалалық аумақтарда атмосфералық ластағыштардың таралуын зерттеу экологиялық қауіпсіздік пен халық денсаулығын бағалауда маңызды мәселе болып табылады. Аэрозольдік бөлшектердің концентрациясы қоршаған ортаның сапасына және тұрғындардың тыныс алу жүйесіне тікелей әсер етеді. Ластағыштардың кеңістіктік-уақыттық динамикасын сипаттау үшін конвекция–диффузия–реакция теңдеуі қарастырылады.

Бұл жұмыста аталған теңдеудің шешімі физикалық заңдылықтарды ескеретін нейрожелілік аппроксимация түрінде анықталады. Есепті шешу үшін Physics-Informed Neural Networks (PINN) әдісі қолданылып, модель параметрлері дифференциалдық теңдеу мен бастапқы-шекаралық шарттарды қанағаттандыру арқылы анықталады.

Есеп қойылымы.

Аэрозольдік ластағыштардың кеңістіктік-уақыттық таралуы екіөлшемді аймақта қарастырылады. Зерттелетін аймақ келесі түрде анықталады:

$$\omega = \{(x, y, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Ластағыш концентрациясы $\varphi_q(x, y, t)$ функциясымен сипатталады және ол конвекция–диффузия–реакция типті теңдеумен өрнектеледі:

$$\frac{\partial \varphi_q}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_q}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} = \Delta \varphi_q + \alpha_q \varphi_q + \beta_q + f_q \quad (1)$$

мұнда u, v — ағын жылдамдықтарының компоненттері, α_q — реакция коэффициенті, β_q — сыртқы әсер параметрі, f_q — ластаушы көздің функциясы.

Бастапқы уақыт мезетінде концентрацияның таралуы

$$\varphi_q(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (2)$$

шартымен беріледі.

Шекарада нөлдік Дирихле шарты қабылданады:

$$\varphi_q(0, y, t) = 0, \quad \varphi_q(1, y, t) = 0 \quad (3)$$

$$\varphi_q(x, 0, t) = 0, \quad \varphi_q(x, 1, t) = 0 \quad (4)$$

Ластаушы көз нүктелік сипатта болып, дельта-функция арқылы модельденеді:

$$f_q = \sum_{j=1}^m Q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$$

мұнда Q_j — j -ші көздің қарқындылығы, $r_j = (x_j, y_j)$ — оның орналасу координаттары. Бастапқы таралу гаусстық типті функциямен беріледі:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{\bar{Q}_j}{2\sqrt{\mu\sigma}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}((x-x_j)^2 + (y-y_j)^2)\right)$$

PINN әдісі арқылы сандық шешу. Қарастырылып отырған теңдеудің шешімі $\varphi_\theta(x, y, t)$ нейрондық желі арқылы аппроксимацияланады, мұндағы θ — желінің оқытылатын параметрлері. Нейрожелілік модель дифференциалдық теңдеуді және оған сәйкес бастапқы-шекаралық шарттарды қанағаттандыратындай етіп құрылады. Бұл мақсатта шығын функционалы (loss function) бірнеше құрамдас бөліктен тұрады. Ең алдымен, теңдеудің орындалуын сипаттайтын физикалық қалдық (physics loss) енгізіледі:

$$L_{PDE} = \left\| \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial y} - \Delta \varphi_\theta - \alpha_q \varphi_\theta - \beta_q - f_q \right\|^2 \quad (5)$$

Бұл функционал нейрожелілік аппроксимацияның негізгі дифференциалдық теңдеуді қаншалықты дәл орындайтынын өлшейді. Бастапқы шарттың орындалуын қамтамасыз ету үшін келесі құрамдас енгізіледі:

$$L_{IC} = \|\varphi_\theta(x, y, 0) - \varphi_0(x, y)\|^2 \quad (6)$$

Шекаралық шарттарды сақтау үшін:

$$L_{BC} = \|\varphi_\theta|_{\partial\Omega}\|^2 \quad (7)$$

Егер тәжірибелік немесе бақылау деректері қолжетімді болса, оларды ескеру үшін қосымша деректер функционалы енгізіледі:

$$L_{data} = \|\varphi_\theta - \varphi^{abs}\|^2$$

Осы құрамдас бөліктерді біріктіре отырып, жалпы минимизацияланатын функционал келесі түрде анықталады:

$$L = \alpha_{PDE} L_{PDE} + \alpha_{data} L_{data} + \alpha_{BC} L_{BC} + \alpha_{IC} L_{IC}$$

мұндағы $\alpha_{PDE}, \alpha_{data}, \alpha_{BC}, \alpha_{IC}$ — сәйкес салмақ коэффициенттері. Осы функционалды минимизациялау арқылы нейрондық желінің параметрлері анықталып, нәтижесінде теңдеудің физикалық тұрғыдан үйлесімді шешімі алынады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP25796443) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: конвекция–диффузия–реакция теңдеуі, атмосфералық ластағыштар, бастапқы-шекаралық шарттар, сандық әдістер, Physics-Informed Neural Networks.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35K05, 68T07.

ӘДЕБИЕТ

[1] Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*, Учебник для студентов высших учебных заведений. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, (2009).

[2] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсейтова А.Т. *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*, Алматы – Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», (2006).

[3] Bektemesov, M. A., Kabanikhin, S. I., Nurseitov, D. B., and Kasenov, S. Y. Numerical solution of initial-boundary value problem for the Helmholtz equation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11**:1 (2014), 4–21.

[4] Nurseitov, D. B., Kasenov, S. E. Numerical solution of initial-boundary problem for the Helmholtz equation on "discretization-optimization" *Bulletin of the Karaganda university-mathematics.*, **75**:3 (2014), 114–120.

МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ ӘДІСТЕРІН ПАЙДАЛАНА ОТЫРЫП БҰРҒЫЛАУ БАҒАНАСЫНЫҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫН ТАЛДАУ

А.Ә. ҚАЛИЛА¹, А.К. КУДАЙБЕРГЕНОВ²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан

¹aruzhan.2002.aru@mail.ru, ²askat.kudaibergenov@kaznu.edu.kz

Қазіргі мұнай-газ саласында бұрғылау бағанасының динамикалық тұрақтылығы маңызды мәселелердің бірі болып табылады. Ұңғымаларды бұрғылау кезінде бағананың тербелістері апаттық жағдайларға, жабдықтардың істен шығуына және экономикалық шығындарға әкелуі мүмкін. Сондықтан бұрғылау бағанасының бейсызық динамикасын зерттеу және оның тұрақтылығын талдау өзекті ғылыми және қолданбалы міндет болып табылады.

Бұрғылау бағанасының толық динамикалық моделі келесі түрде жазылады:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N(t) \frac{\partial(v + v_0)}{\partial z} \right) - \frac{1}{1 - \nu} EA \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 \right) - \rho A \omega^2 v = 0. \quad (1)$$

мұнда $v(z, t)$ – көлденең ауытқу, ρ – тығыздық, A – қима ауданы, EI – иілу қаттылығы, $N(t)$ – уақытқа тәуелді осьтік күш, E – серпімділік модулі, ν – Пуассон коэффициенті.

Бағана екі ұшынан шарнирмен бекітілген: $v(0, t) = 0$, $v(L, t) = 0$.

Галеркин әдісі бойынша:

$$v(z, t) = f(t) \sin \left(\frac{\pi z}{L} \right). \quad (2)$$

Бұл функция шекаралық шарттарды қанағаттандырады.

Нәтижесінде:

$$\ddot{f} + (a_1 + a_2 \cos \Omega t) f + a_3 f^3 = d_1 + d_2 \cos \Omega t. \quad (3)$$

мұндағы a_1, a_2, a_3, d_1, d_2 – жүйе параметрлеріне тәуелді коэффициенттер.

Өлшемсіз уақыт:

$$\tau = \Omega_0 t, \quad \Omega_0 = \sqrt{a_1}. \quad (4)$$

Сонда:

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + (1 + \beta \cos \Omega \tau) f + \alpha f^3 = F_0 + F_1 \cos \Omega \tau. \quad (5)$$

мұнда

$$\beta = \frac{a_2}{a_1}, \quad \alpha = \frac{a_3}{a_1}, \quad F_0 = \frac{d_1}{a_1}, \quad F_1 = \frac{d_2}{a_1}. \quad (6)$$

Бұл Mathieu–Duffing теңдеуі.

Гармоникалық баланс әдісі:

$$f(\tau) = r_0 + r_1 \cos(\Omega \tau - \varphi). \quad (7)$$

Кубтық мүшені жіктейміз: $f^3 \approx r_0^3 + \frac{3}{2} r_0 r_1^2 + (3r_0^2 r_1 + \frac{3}{4} r_1^3) \cos(\Omega \tau - \varphi)$.

Алгебралық жүйе:

$$r_1(1 - \Omega^2) + 3\alpha r_0^2 r_1 + \frac{3}{4} \alpha r_1^3 = F_1 - \beta r_0, \quad (8)$$

$$r_0 + \alpha r_0^3 + \frac{3}{2} \alpha r_0 r_1^2 = F_0. \quad (9)$$

Функция:

$$\lambda(r_0, r_1) = 1 + 3\alpha \left(r_0^2 + \frac{r_1^2}{2} \right). \quad (10)$$

Амплитуда теңдеуі: $r_1^2(\lambda - \Omega^2)^2 = (F_1 - \beta r_0)^2$.

Сызықтық жуықтау: $f'' + (1 + \beta \cos \Omega \tau)f = 0$.

Параметрлік резонанс: $\Omega \approx 2$, $\Omega = 2 + \varepsilon \sigma$.

Тұрақсыздық аймағы:

$$2 - \frac{\beta}{2} < \Omega < 2 + \frac{\beta}{2}. \quad (11)$$

Алынған нәтиже бұрғылау бағанасының параметрлік резонанс аймағын анықтауға мүмкіндік береді. Көрсетілген интервалда жүйе тұрақсыз күйге өтеді және тербеліс амплитудасы қарқынды өседі. Бұл нәтиже бағананың жұмыс режимдерін таңдауда және апаттық жағдайлардың алдын алуда маңызды рөл атқарады.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Szemplińska-Stupnicka W. Higher Harmonic Oscillations in Heteronomous Non-Linear Systems with One Degree of Freedom, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **3** (1968), 17–30.
- [2] Kudaibergenov A.K., Kudaibergenov A.K., Khajiyeva L.A. Modelling of Resonance and Stability of Drill String Nonlinear Dynamics, *International Journal of Mechanics*, **11** (2017), 92–100.

ЖАНАРМАЙДЫ САҚТАУ ЖӘНЕ ТАРАТУ ПРОЦЕСТЕРІН БАҚЫЛАУ ЖӘНЕ ОҢТАЙЛАНДЫРУ ҮШІН МҰНАЙ БАЗАСЫНЫҢ ЦИФРЛЫҚ ЕГІЗІН ӘЗІРЛЕУ.

А.К. КЕНЕС¹, М.А. АХМЕТЖАНОВ²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

ayzhanar.kenes@gmail.com

Қазіргі уақытта мұнай-газ саласы энергетикалық ресурстарды сақтау және тарату жүйелерінің тиімділігіне тікелей тәуелді стратегиялық маңызды сала. Мұнай базаларында жанармайды сақтау және тарату процестері күрделі технологиялық жүйелер арқылы жүзеге асырылады. Бұл процестердің қауіпсіздігін, сенімділігін және тиімділігін қамтамасыз ету үшін оларды тұрақты түрде бақылау және басқару қажет. Сондықтан заманауи цифрлық технологияларды пайдалану арқылы өндірістік процестерді жетілдіру өзекті мәселелердің бірі [1].

Бұл зерттеу жанармайды сақтау және тарату процестерін бақылау мен басқарудың тиімділігін арттыру қажеттілігіне байланысты жүргізіледі. Дәстүрлі бақылау жүйелері кей жағдайда нақты уақыттағы толық ақпаратты қамтамасыз ете алмайды, нәтижесінде жанармай шығындары, жабдықтардың ақаулары немесе өндірістік процестердің тиімсіздігі туындауы мүмкін [2]. Осы мәселелерді шешудің тиімді жолдарының бірі – нақты объектінің виртуалды моделін құратын цифрлық егіз (Digital Twin) технологиясын қолдану. Жалпы Digital twin дегеніміз белгілі бір нақты физикалық нысанның немесе жүйенің виртуалды көшірмесі. Мұнай базасында жанармайды сақтау және тарату кезінде жүйелерден алынған нақты уақыттағы деректерді пайдаланып жұмыс істейді және объектінің күйін бақылауға, талдауға, алдын ала қауіп-қатерлерді болжауға мүмкіндік береді. Егер нақты уақыттағы деректерді талдау сәтті түрде жүзеге асырылатын болса, онда техникалық жабдықтардың жағдайын үздіксіз бақылау назарда болады. Демек, бұл дегеніміз өз кезегінде жабдықтардың қызмет ету сапасын арттырып, олардың жарамдылық мерзімдерін ұзартуға және ұзақ уақыт бойы тиімді жұмыс істеу қабілеттерін қамтамасыз етеді [3,4].

Бұл мәселені зерттеу маңыздылығы - цифрлық егіз технологиясы өндірістік жүйелердің жұмысын нақты уақыт режимінде бақылауға, процестерді модельдеуге және түрлі сценарийлерді алдын ала талдауға мүмкіндік береді. Нәтижесінде жабдықтардың жұмысын оңтайландыруға, өндірістік қауіпсіздікті арттыруға және операциялық шығындарды азайтуға болады.

Соңғы жылдары цифрлық егіз технологиясы өнеркәсіптің әртүрлі салаларында, соның ішінде өндіріс, энергетика және көлік жүйелерінде кеңінен зерттеліп келеді. Көптеген ғылыми жұмыстарда цифрлық модельдер арқылы өндірістік жүйелердің жұмысын бақылау, деректерді талдау және болжау әдістері қарастырылған. Дегенмен мұнай базаларындағы жанармайды сақтау және тарату процестерін цифрлық егіз негізінде басқару мәселелері әлі де толық зерттелмеген.

Осы зерттеуде мұнай базасының цифрлық егізін әзірлеу арқылы жанармайды сақтау және тарату процестерін бақылау және оңтайландыру тәсілдері қарастырылады. Зерттеу барысында мұнай базасының технологиялық процестері талданылып, олардың цифрлық моделі құрылады және алынған деректер негізінде жүйенің жұмысын тиімді басқару мүмкіндіктері зерттеледі.

Кілтті сөздер: Цифрлық егіз, мұнай базасы, автоматтандыру, оңтайландыру, істен шығуды болжау, деректерді жинау, IoT.

2020 Mathematics Subject Classification: 39B42, 39B52

ӘДЕБИЕТ

- [1] Бизнестегі инновациялық технологиялар институты *Ғылыми білім үшін цифрлық егіздерді пайдалану*, <https://iitb.ru/blog/ispolzovanie-cifrovyyh-dvojn timers-dlya-obrazovaniya-v-izuchenii-tehnicheskikh-nauk/>
- [2] Властелина А.К., Назаров А.Ю., Мухаммет А.Р. Цифровые двойники и информационные технологии в промышленности. *Научные труды КубГТУ* 4 (2023), 88–98.
- [3] Г.И. Жолдангарова, М.Н. Калимолдаев, К.Т. Исаков, Т.Л. Тен, М.М. Есмагамбетова. Разработка алгоритма прогнозирования остаточного ресурса насосного оборудования в ирригационных системах на основе свёрточной нейронной сети. *Вестник Академии гражданской авиации (АГА)* 2(37) (2025), 204–215.
- [4] Gulnar Zholdangarova, Waldemar Wójcik Development of fault detection system in irrigation pumping systems using machine learning methods with consideration of energy and water consumption. *International Journal of Electronics and Telecommunications* 71(No 3) (2025), 1–6.

БІЛІМ БЕРУДЕ ГЕНЕРАТИВТІ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІ (GENAI) ҚОЛДАНУ: АРТЫҚШЫЛЫҚТАРЫ, ТӘУЕКЕЛДЕРІ ЖӘНЕ ЗАМАНАУИ ТЕХНОЛОГИЯЛАР

Ж.Б. КОПЖАСАРОВА¹, Ж.С. КЕМЕЛЬБЕКОВА²

^{1,2}М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан

¹jadik-7@mail.ru, ²kemel_zhan@mail.ru

Генеративті жасанды интеллект – мәтін, сурет, код және басқа да контент түрлерін автоматты түрде жасай алатын интеллектуалды жүйелер тобы. Әсіресе үлкен тілдік модельдер (LLM) білім беру саласында кеңінен қолданылып, оқыту процесін жаңа деңгейге көтеруде. Зерттеулер GenAI технологияларының оқу процесін трансформациялап, оқыту әдістерін жетілдіруге ықпал ететінін көрсетеді [1]:

Кесте 1. GenAI қолдану артықшылықтары

GenAI технологияларын білім беруде тиімді қолдану кезеңдік алгоритмге негізделеді. Алдымен оқу мақсаттары анықталып, сәйкес құралдар таңдалады. Одан кейін деректер мен

Кесте 1: GenAI қолдану артықшылықтары

№	Артықшылықтар	Сипаттамасы	Білім берудегі әсері
1	Дербестендірілген оқыту	Оқу мазмұнын студентке бейімдеу	Оқу сапасы артады
2	Автоматтандыру	Тесттер мен тапсырмалар генерациясы	Уақыт үнемделеді
3	Қолжетімділік	24/7 AI ассистенттер	Білімге тең қолжетімділік
4	Контент генерациясы	Лекция, материал жасау	Оқытушы жүктемесі азаяды
5	Креативтілік	Идеялар мен жобалар генерациясы	Сыни ойлау дамиды
6	Интерактивтілік	Диалогтық оқыту	Қызығушылық артады

сұраныстар (prompt) дайындалып, оқу контенті генерацияланады. Генерацияланған материалдар міндетті түрде оқытушы тарапынан тексеріліп, оқу процесіне енгізіледі. Соңында білім нәтижелері бағаланып, кері байланыс негізінде жүйе жетілдіріледі [2,3]. GenAI технологияларын білім беру процесінде тиімді қолдану үш негізгі кезеңге негізделеді: дайындық, жүзеге асыру және бағалау-оңтайландыру.



Сурет 1: *
GenAI қолдану алгоритмі

Зерттеу нәтижелері генеративті жасанды интеллектті білім беру процесіне кезеңдік және құрылымдалған түрде енгізудің жоғары тиімділігін көрсетті. Ұсынылған үш кезеңнен тұратын алгоритм (дайындық, жүзеге асыру және бағалау-оңтайландыру) оқу процесін жүйелеуге, оқыту мазмұнын дербестендіруге және білім алушылардың академиялық нәтижелерін жақсартуға мүмкіндік береді. Әсіресе, контент генерациясы мен валидация кезеңдерінің үйлесімділігі оқу материалдарының сапасын арттырып, қателіктерді азайтуға ықпал ететіні анықталды. Сонымен қатар, бағалау және кері байланыс механизмдері GenAI қолданудың тиімділігін үздіксіз жетілдіруге жағдай жасайды. Жалпы алғанда, GenAI-ды педагогикалық тұрғыдан негізделген алгоритм арқылы қолдану оны оқыту процесінің толық алмастырушысы емес, тиімді қолдаушы құрал ретінде пайдалануға мүмкіндік береді.

Генеративті жасанды интеллект білім беру жүйесінде жаңа мүмкіндіктер ашып, оқытуды дербестендіру мен автоматтандыруға ықпал етеді. Алайда оны тиімді қолдану үшін педагогикалық, этикалық және технологиялық аспектілерді ескеру қажет. Болашақта білім беру жүйесі адам мен жасанды интеллекттің өзара әрекеттесуіне негізделген гибриді модельге айналады.

Кілтті сөздер: Генеративті жасанды интеллект, білім беру жүйесі, оқыту технологиялары.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ӘДЕБИЕТ

- [1] Monib W.K., Qazi A., Apong R.A., Azizan M.T., De Silva L, Yassin H. Generative AI and future education: a review, theoretical validation, and authors' perspective on challenges and solutions. *PeerJ Comput Sci* . **3**;10:e2105. (2024). doi: 10.7717/peerj-cs.2105. PMID: 39650462; PMCID: PMC11622955
- [2] Giannakos M., Azevedo R., Brusilovsky P., Cukurova M., Dimitriadis Y., Hernandez-Leo D., Rienties B. The promise and challenges of generative AI in education. *Behaviour & Information Technology*, **44**(11), (2025). 2518–2544.
https://doi.org/10.1080/0144929X.2024.2394886
- [3] Cordero J., Torres-Zambrano J., Cordero-Castillo A. Integration of Generative Artificial Intelligence in Higher Education: Best Practices. *Education Sciences*, **15**(1), (2025). 32.
https://doi.org/10.3390/educsci15010032
- [4] Bittle K., El-Gayar O. Generative AI and Academic Integrity in Higher Education: A Systematic Review and Research Agenda. *Information*, **16**(4), (2025). 296.
https://doi.org/10.3390/info16040296
- [5] Temirgalieva A. Development of Critical Thinking through the Use of AI. *Eurasian Science Review An International Peer-Reviewed Multidisciplinary Journal*, **2** (Special Issue), (2025). 2439–2450. https://doi.org/10.63034/esr- 300.

БОЛЬЦМАН ТОРЛЫ ӘДІСІ АРҚЫЛЫ КУЭТТА АҒЫНЫНДАҒЫ ДИФФУЗИЯЛЫҚ ҮРДІСТІ САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

А.Ж. ҚҰЛДАНБАЕВА¹, К.К. КАРЖАУБАЕВ²

^{1,2}әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

²Халықаралық инженерлік-технологиялық университет, Алматы, Қазақстан

¹akuldanbaeva2004@gmail.com, ²kairzhan.k@gmail.com

Бұл жұмыста Куэтта ағынындағы диффузиялық процесс торлы Больцман әдісі (Lattice Boltzmann Method) арқылы сандық түрде зерттеледі. Куэтта ағыны екі параллель пластина арасындағы тұтқыр сұйық қозғалысын сипаттайды: төменгі пластина тыныштықта, ал жоғарғы пластина тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Мұндай ағындар атмосфера мен мұхиттағы қабаттық қозғалыстарда, майлау жүйелерінде және әртүрлі инженерлік-технологиялық процестерде кеңінен кездеседі. Сандық модельдеу мұндай жүйелерде болып жатқан процестерді тереңірек түсінуге мүмкіндік береді.

Сығылмайтын сұйықтық қозғалысы масса және импульс сақталу теңдеулерімен (1)–(2), ал концентрацияның таралуы скаляр өрістің тасымалдау теңдеуімен (3) сипатталады [1]:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

бұл теңдеулерде u_i – жылдамдық компонентері, p – қысым, C – концентрация өрісі, Re – Рейнольдс саны, Pe – Пекле саны.

Зерттеуде ағынды модельдеу үшін торлы Больцман әдісінің D3Q27 моделі [2], ал концентрация өрісін есептеу үшін пассивті скаляр моделі қолданылды. Қабырғаларда bounce-back типті шекаралық шарттары беріледі [3]. Есептеу процесі сұйықтық бөлшектердің соқтығысуы (collision) және тасымалдану (streaming) кезеңдері арқылы жүзеге асырылды.

Сандық модель Fortran бағдарламалау тілінде үш өлшемді есеп үшін жүзеге асырылды. Куэтта ағыны жағдайында жылдамдық өрісі аналитикалық түрде сызықтық заң бойынша өзгереді, сондықтан алынған сандық нәтижелер осы теориялық шешіммен салыстырылып, модельдің дұрыстығы тексерілді. Диффузиялық процесс концентрация теңдеуі арқылы сипатталып, оның уақыт бойынша таралу динамикасының заңдылықтары Рейнольдс және Пекле сандарының мәндеріне байланысты талданды.

Кілтті сөздер: торлы Больцман әдісі, Куэтта ағыны, диффузия, D3Q27, сандық модельдеу.

2020 Mathematics Subject Classification: 65N06, 76D06, 76M28

ӘДЕБИЕТ

- [1] Batchelor G.K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti*, Mir, Moscow (1973).
- [2] Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E.M. *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*, Springer, Cham (2017).
- [3] Chen Y., Wang X., Zhu H. A General Single-Node Second-Order Dirichlet Boundary Condition for the Convection–Diffusion Equation Based on the Lattice Boltzmann Method, *Symmetry*, **15:2** (2023), 265.

МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ АЛГОРИТМДЕРІ НЕГІЗІНДЕ СУ ТАСҚЫНЫНА БАЙЛАНЫСТЫ ТӨТЕНШЕ ЖАҒДАЙЛАРДЫ БОЛЖАУДЫ МОДЕЛЬДЕУ

А.Қ. ҚҰДАЙБЕРГЕНОВА¹, Д.К. ДАРКЕНБАЕВ²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

²Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹aiiidknt@gmail.com , ²dauren.kadyrovich@gmail.com

Қазіргі кезеңде климаттық өзгерістер мен экстремалды гидрометеорологиялық құбылыстардың жиілеуі су тасқынын алдын ала болжау мәселесінің ғылыми және практикалық маңызын арттырып отыр. Су тасқыны адам өміріне, инфрақұрылымға және экономикаға елеулі қауіп төндіретін табиғи апаттардың бірі болғандықтан, оны ерте кезеңде анықтау және болжау өзекті ғылыми міндет болып табылады.[1]

Осы зерттеу жұмысында гидрометеорологиялық деректер негізінде және жер қыртысы бедерін зерттеу арқылы су тасқынын болжау үшін машиналық оқыту алгоритмдері қолданылады. Атап айтқанда, Linear Regression, Random Forest, Decision Tree, Gradient Boost алгоритмдері пайдаланылып, олардың болжау мүмкіндіктері өзара салыстырылады.[3] Зерттеуде қолданылған деректер ашық ғылыми, спутниктік, сонымен қатар аймақтық станция дереккөздерінен және Kaggle платформасынан алынды.

Деректерді алдын ала өңдеу және талдау жұмыстары Visual Studio Code ортасында Python бағдарламалау тілі арқылы жүргізілді. Бұл кезеңде деректерді тазалау, жетіспейтін мәндерді өңдеу, аномальды мәндерді анықтау және модельдеуге жарамды форматқа келтіру жұмыстары орындалды.[2] Кейін аталған алгоритмдер негізінде болжау модельдері құрылып, олардың тиімділігі арнайы бағалау үшін RMSE(Root Mean Square Error), MAE(Mean Absolute Error), R^2 (Coefficient of determination) метрикалары қолданылады.

Зерттеу нәтижелері су тасқынын ерте кезеңде болжауға мүмкіндік беретін неғұрлым тиімді алгоритмді анықтауға бағытталады. Алынған нәтижелер болашақта табиғи апаттардың алдын алу жүйелерін жетілдіруде, тәуекелдерді басқаруда және төтенше жағдайлар қызметінің шешім қабылдау үдерісінде практикалық тұрғыдан қолданылуы мүмкін.

Ұсыныс 1. Болашақта ұсынылған машиналық оқыту модельдерін нақты уақыттағы гидрометеорологиялық деректермен біріктіру арқылы су тасқынын ерте ескерту жүйелерінде қолдану және әртүрлі аймақтардың гидрологиялық ерекшеліктерін ескеретін кеңейтілген болжау модельдерін дамыту ұсынылады.

Кілтті сөздер: су тасқынын болжау, машиналық оқыту, гидрометеорология, деректерді алдын ала өңдеу, Linear Regression, Random Forest, Decision Tree, Python, RMSE, MAE, R.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 62H30, 86A05.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Flood forecasting based on machine learning pattern recognition and dynamic migration of parameters, *Journal of Hydrology: Regional Studies*, China (2023), 3–11.
- [2] Flood Prediction Using Machine Learning Models: Literature Review, *Journal of Water*, Норвегия, (2018), 3–25.
- [3] Application of machine learning algorithms for flood susceptibility assessment and risk management, *Journal of Water and Climate Change*, India (2021), 4–14.

ОРТА МЕКТЕПТЕ РОБОТОТЕХНИКАНЫ ОҚЫТУДА RoboBil МОБИЛЬДІ ҚОСЫМШАСЫНЫҢ МҮМКІНДІКТЕРІ

А. ҚУАНОВА¹, Е.Ы. БИДАЙБЕКОВ², М.И. РЕВШЕНОВА³

¹ Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
jgerimkuanova@gmail.com

Аннотация. Мақалада орта мектеп оқушыларына арналған RoboBil мобильді қосымшасының педагогикалық мүмкіндіктері қарастырылған. Қосымша STEM пәндерін оқытудағы заманауи әдістемелерді іске асыруға бағытталған және модульдік құрылымды қамтиды: теориялық материал, алгоритмдік практикалық тапсырмалар, интерактивті видео сабақтар, білімді тексеру жүйесі, сонымен қатар ойын элементтері мен қосымша шындық (AR) арқылы мотивация құралдары енгізілген. Қосымшаның дидактикалық мүмкіндіктеріне ерекше назар аударылған: оқушылардың алгоритмдік және инженерлік ойлау қабілеттерін қалыптастыру, бағдарламау дағдыларын дамыту, сыни ойлау және шығармашылық қабілеттерін жетілдіру. Мобильді технологияларды қолдану оқытудың қолжетімділігі мен тиімділігін арттырып, оқушылардың STEM пәндеріне қызығушылығын ынталандырады және олардың цифрлық сауаттылығын дамытады.

STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) бағытында оқыту қазіргі білім беру жүйесінде ерекше маңызды болып табылады. Робототехника пәні оқушылардың алгоритмдік, инженерлік және шығармашылық ойлау қабілеттерін дамытуға мүмкіндік береді. Дәстүрлі сабақтарда оқушылар көбіне мұғалімнің нұсқауына сүйенеді, бұл өз бетінше зерттеу жасау және практикалық тәжірибе жинау мүмкіндігін шектейді. Мобильді қосымшалар осы проблемаларды шешуге мүмкіндік береді: олар дербестендірілген оқу, интерактивті тапсырмалар және ойын элементтері арқылы оқушылардың белсенділігін арттырады. RoboBil мобильді қосымшасы осы мақсаттарға арналған арнайы құрал болып табылады. Қосымша қазақ мектептері үшін жасалған және оқушыларға робототехника негіздерін үйретуге бағытталған [1].

Кілтті сөздер: мобильді оқыту, робототехника, STEM-білім, мобильді қосымша, RoboBil, қосымша шындық (AR).

ӘДЕБИЕТ

- [1] Жабаев Е.Х., Ревшенкова М.И. Виртуальные среды и симуляторы в обучении робототехнике, *Вестник КазНПУ имени Абая. Серия «Физико-математические науки»*, **2:82** (2023), 220–227.

О РАЗНЫХ ПОДХОДАХ К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КОНЦАМИ

Г.А. КУРИНА

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

kurina@math.vsu.ru

1. Метод Калинина - Лавриновича. В [1] изучалось асимптотическое поведение при стремлении малого положительного параметра ε к нулю решения задачи минимизации критерия качества

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} u^T R(t) u dt \quad (1)$$

на траекториях системы с закреплёнными концами

$$E(\varepsilon) \frac{dz}{dt} = A(t)z + B(t)u, z(t_0) = z^0, z(t_1) = 0, \quad (2)$$

где t_0, t_1 — заданные моменты времени, $z = (x^T, y^T)^T$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $E(\varepsilon) = \text{diag}(I, \varepsilon I)$, I — единичная матрица,

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

все коэффициенты достаточно гладкие функции, $R(t)$ — симметрическая положительно определённая матрица.

Предположим, что выполняются условия из [1]. В частности,

Условие 1. Матрица $A_4(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, устойчивая.

Тогда из (2) получаем вырожденную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A_0(t)\bar{x} + B_0(t)u, \bar{x}(t_0) = x^0, \bar{x}(t_1) = 0, \quad (3)$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4(t)^{-1}A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4(t)^{-1}B_2(t)$.

Задача минимизации функционала (1) на траекториях системы (3) называется в [1] первой базовой задачей.

Второй базовой задачей в [1] называется задача минимизации $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T R(t_1) u ds$ на траекториях системы

$$\frac{dy}{ds} = A_4(t_1)y + B_2(t_1)u, y(0) = A_4(t_1)^{-1}B_2(t_1)\bar{u}_0(t_1), y(-\infty) = 0, \quad (4)$$

где $\bar{u}_0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — оптимальное управление в первой базовой задаче.

Чтобы обеспечить однозначную разрешимость базовых задач, в [1] предполагается

Условие 2. Динамические системы в (3) и (4) полностью управляемы.

2. Асимптотика решения двухточечной краевой задачи. В силу условия 2 и условия оптимальности управления при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение задачи (1), (2) может быть найдено путём решения двухточечной краевой задачи

$$E(\varepsilon) \frac{dz}{dt} = A(t)z + B(t)u, E(\varepsilon)^T \frac{d\psi}{dt} = -A(t)^T \psi, z(t_0) = z^0, z(t_1) = 0. \quad (5)$$

При этом оптимальное управление имеет вид $u(t, \varepsilon) = R(t)^{-1}B(t)^T \psi(t, \varepsilon)$.

Следуя методу пограничных функций Вишика - Люстерника - Васильевой (см., например, [2]), асимптотику решения задачи (5) ищем в виде

$$v(t, \varepsilon) = \bar{v}(t, \varepsilon) + Pv(\tau, \varepsilon) + Qv(\sigma, \varepsilon), \quad (6)$$

где $v(t, \varepsilon) = (z^T, \psi^T, u^T)^T$, $\psi = (\xi^T, \eta^T)^T$, $\bar{v}(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{v}_j(t)$, $Pv(\tau, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j P_j v(\tau)$, $Qv(\sigma, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_j v(\sigma)$, $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$, $\sigma = (t - t_1)/\varepsilon$, $P_j v(\tau)$ и $Q_j v(\sigma)$ являются пограничными функциями экспоненциального типа соответственно в окрестностях точек $t = t_0$ и $t = t_1$.

Подставляя разложения (6) в систему (5), а затем приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , отдельно зависящие от t, τ, σ , находим соотношения для определения членов асимптотики (6). Из анализа уравнений для пограничных функций с учетом Условия 1 следует, что $P_0 x(\tau) = P_0 \xi(\tau) \equiv 0$, $Q_0 x(\sigma) = Q_0 \xi(\sigma) \equiv 0$, $P_0 \eta(\tau) \equiv 0$, $P_0 u(\tau) \equiv 0$.

Из соотношений для членов асимптотики (6) нулевого порядка получаем следующее

Предложение 1. Пара $\bar{x}_0, \bar{u}_0 = R(t)^{-1} B_0(t)^T \bar{\xi}_0(t), t \in [t_0, t_1]$, является решением первой базовой задачи в [1]. Вторая базовая задача в [1] это задача для отыскания $Q_0 u(\sigma)$, $Q_0 u(\sigma) = R(t_1)^{-1} B_2(t_1) Q_0 \eta(\sigma), \sigma \in (-\infty, 0]$. Приближение нулевого порядка для оптимального управления возмущённой задачи имеет вид $\bar{u}_0(t) + Q_0 u((t - t_1)/\varepsilon), t \in [t_0, t_1]$.

Отсюда следует обоснование вида второй базовой задачи и формулы (44) из [1].

3. Прямая схема построения асимптотики. Теперь для построения асимптотики решения задачи (1),(2) воспользуемся так называемой прямой схемой (см., например, [3]), заключающейся в подстановке постулируемого асимптотического решения вида (6) непосредственно в условия задачи и получении серии задач для нахождения членов разложения (6).

Для определения $\bar{u}_0(t)$ рассматривается задача $\bar{P}_0$ минимизации

$$\bar{J}_0 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \bar{u}_0(t)^T R(t) \bar{u}_0(t) dt$$

на траекториях $\bar{z}_0(t)$. Используя условия оптимальности управления в этой задаче, получаем

Предложение 2. Асимптотика функционала (1) имеет вид $\bar{J}_0 + \varepsilon P_0 J + \varepsilon Q_0 J + \varepsilon (\bar{\eta}_0(t_0)^T (y^0 - \bar{y}_0(t_0)) - \bar{\eta}_0(t_1)^T \bar{y}_0(t_1)) + \varepsilon^2 \dots$, где $P_0 J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} P_0 u^T R(t_0) P_0 u d\tau$, $Q_0 J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 Q_0 u^T R(t_1) Q_0 u d\sigma$.

Итак, для определения асимптотики нулевого порядка решения задачи (1), (2) нужно решить задачи $\bar{P}_0, P_0 P$ минимизации $P_0 J$ на траекториях $P_0 z(\tau)$ и $Q_0 P$ минимизации $Q_0 J$ на траекториях $Q_0 z(\sigma)$. При этом $P_0 x(\tau) \equiv 0$, $Q_0 x(\sigma) \equiv 0$, $P_0 u(\tau) \equiv 0$ и определение приближения нулевого порядка сводится к решению двух базовых задач из [1].

4. Декомпозиция движений. В [4] рассматривается аналогичная (1), (2) задача с постоянными коэффициентами и $R(t) = I$. При этом (2) заменяется на эквивалентную систему, в которой разделены медленные и быстрые составляющие вектора состояния.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача управления, закреплённые концы, сингулярно возмущённое уравнение состояния, асимптотическое решение.

2020 Mathematics Subject Classification: 49N10, 34E15, 41A60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Калинин А.И., Лавринович Л.И. Применение метода малого параметра к сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления, *Автоматика и телемеханика*, 5 (2016), 3 – 18.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений*, Наука, Москва (1973).

[3] Дмитриев М.Г., Курина Г.А. О некоторых сингулярно возмущённых задачах оптимального управления, *Проблемы устойчивости и управления: сб науч. ст., посвящённый 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова*, Физматлит, Москва (2013), 148 — 160.

[4] Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Асимптотическое решение сингулярно возмущённой задачи оптимального управления с минимальной энергией, *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 3 (2020), 89 — 97.

ДИФфуЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С БАНКОВСКИМ СЕКТОРОМ

О.И. КРИВОРОТЬКО¹, А.С. МАРТЫНЕНКО²

^{1,2}Федеральная территория «Сириус», Научно-технологический университет, Россия

¹krivorotko.oi@talantiuspeh.ru, ²s.martynenko@bk.ru

Рассматривается агент-ориентированная модель экономики, включающая домохозяйства, фирмы и банковский сектор со связным балансом. Модель описывает последовательность стадий в каждом шаге симуляции: начисление процентов, рынок труда, производство и выплату заработной платы, рынок потребления, дефолты домохозяйств и фирм, а также обновление баланса банка.

Правила поведения домохозяйств задаются функцией потребления как долей от текущих сбережений и ожидаемого дохода, с возможностью кредитования при ограничении по долгу и пороговом дефолте. Поведение фирм включает ценообразование по правилу наценки, адаптацию занятости к ожидаемому спросу, использование кредита для финансирования производства и технический дефолт при превышении долга над порогом, связанным с выручкой. Банковский сектор ограничивает объём кредитования величиной капитала, а при отрицательном капитале применяет механизмы bail-in и bailout.

Результатом работы модели являются агрегированные временные ряды занятости, выпуска, цен, долгов, дефолтов и банковских режимов. Для анализа вводятся эмпирические распределения состояний домохозяйств и фирм; макроэкономические показатели трактуются как функционалы от этих распределений и состояния банка. Взаимодействие агентов происходит через агрегаты, что позволяет интерпретировать модель как систему большого числа марковских частиц со средним полем. В пределе большого числа агентов такая система приводит к уравнению эволюции распределений и допускает нелинейную диффузионную аппроксимацию.

Предлагаемая формулировка позволяет рассматривать агент-ориентированную модель как источник данных для обучения моделей динамики распределений, а также устанавливает интерпретируемую связь между микро-правилами поведения и макро-динамикой. Сравнение нелинейной диффузионной аппроксимации с исходной симуляцией позволяет выделить режимы, в которых среднее поле адекватно описывает динамику, и режимы, где существенны дискретные пороги и редкие кризисные события, такие как каскады дефолтов или банковская несостоятельность.

Финансирование: Результаты получены при финансовой поддержке проекта, реализуемого в рамках государственной программы федеральной территории «Сириус» «Научно-технологическое развитие федеральной территории «Сириус» (Соглашение №26-03 от 07.07.2025 г.).

Ключевые слова: нелинейные диффузионные модели, диффузионная аппроксимация, теория среднего поля, mean-field games, динамика распределений, агент-ориентированная экономика.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q91, 91B55, 60H30

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В ОБРАЗОВАНИИ: СТРАТЕГИИ ВНЕДРЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ

Н.К. ЛАТИПОВ¹, Т.А. МАХАРОВ²

¹*Sarboon University, Ташкент, Узбекистан*

²*Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент,
Узбекистан*

nusratulla.latipov@gmail.com

Искусственный интеллект (ИИ) перестал быть технологией будущего и стал повседневным инструментом в академической среде. Интеграция искусственного интеллекта в образовательный процесс переходит от теоретических обсуждений к практическим внедрениям. По текущим данным, до 87% студентов ведущих вузов уже активно используют ИИ в обучении, при этом 82% из них занимаются фактчекингом сгенерированного контента. Основная ценность нейросетей — автоматизация рутины: от подготовки планов лекций до первичной проверки работ. Однако бесконтрольное использование технологий создает риски „цифрового мошенничества” и снижения качества критического мышления. Основная ценность ИИ для преподавателей заключается в автоматизации рутинных задач, таких как подготовка планов, проверка работ и составление отчетности, что помогает избежать профессионального выгорания. Для студентов ИИ становится инструментом персонализации и ускоренного поиска информации. Однако ключевым вызовом остается явление, известное как „GPT-непорядочность”, и риск снижения когнитивных способностей при бесконтрольном использовании готовых решений. Для успешной адаптации образовательной системы в Узбекистане необходимо сместить фокус с оценки конечного результата на процесс выполнения работы, то есть процесса обучения, и развивать цифровую грамотность преподавателей — развитие навыков критического анализа ошибок нейросетей.

Новая образовательная реальность Современные образовательные системы сталкиваются с неизбежной трансформацией. Преподаватели перегружены отчетами и проверкой работ, а студенты ищут способы ускорить выполнение задач. ИИ становится инструментом, который может либо заменить усилия человека, либо усилить его возможности, трансформирует деятельность всех участников образовательного процесса в трех ключевых направлениях.

ИИ активно используется для создания учебных материалов, таких как черновики уроков, упражнения и домашние задания. С помощью генеративных моделей преподаватели могут быстро разрабатывать разнообразные задания, что значительно экономит время и усилия. Это позволяет им сосредоточиться на более важных аспектах обучения, таких как взаимодействие со студентами и индивидуальный подход к каждому. Около 80% педагогов уже воспринимают ИИ как реальный способ снизить нагрузку.

Нейросети помогают адаптировать образовательный процесс под потребности каждого студента. Системы, использующие машинное обучение, могут анализировать успехи и трудности учащихся, предлагая им персонализированные рекомендации и дополнительные ресурсы для изучения. Это не только повышает эффективность обучения, но и способствует развитию самостоятельности и ответственности у студентов.

С помощью ИИ можно автоматизировать процесс оценки работ студентов, что позволяет не только сократить время на проверку, но и улучшить объективность оценивания. Алгоритмы могут выявлять типичные ошибки и предоставлять обратную связь как студентам, так и преподавателям, что способствует более глубокому пониманию учебного материала.

Инструментарий современного преподавателя Для эффективной работы методистам и учителям не нужно знать код. Достаточно освоить несколько базовых сервисов, каждый из которых решает конкретную задачу.

Риски и вызовы Несмотря на множество преимуществ, внедрение ИИ в образование не лишено рисков. Одним из наиболее серьезных является „GPT-непорядочность”, когда студенты

Инструмент	Основная функция	Особенности
ChatGPT	Цифровой ассистент	Планы лекций, адаптация сложных тем под возраст аудитории
Perplexity	Умный поиск	Сбор источников с активными ссылками на публикации
NotebookLM	Работа с документами	Анализирует только загруженные файлы, создаёт тесты и карточки
Socratic	Презентации	Генерирует структуру слайдов и визуализирует данные

Таблица 1: Сравнение сервисов с искусственным интеллектом

могут полагаться на готовые решения, не развивая при этом свои критические и аналитические навыки, и в 85% случаев преподаватель не видит подмены текста. Это может привести к снижению когнитивных способностей и к формированию зависимости от технологий — если студент делегирует ИИ анализ и сравнение, мозг теряет необходимую нагрузку и теряет навык самостоятельного мышления. Ко всему этому добавляются технические ошибки, так называемые „галлюцинации” — модели часто выдумывают цитаты и факты. Без ручного фактчекинга качество исследования падает, даже если текст выглядит логичным.

Чтобы минимизировать эти риски, важно фокусироваться не только на конечных результатах, но и на процессе выполнения заданий. Преподаватели должны обучать студентов критически оценивать информацию, генерируемую ИИ, и развивать навыки самостоятельного мышления, к тому же, бороться запретами с ИИ — путь в никуда, нужно менять методику проверки знаний.

Заключение Искусственный интеллект открывает новые горизонты для образования, предлагая множество возможностей для улучшения качества обучения и повышения эффективности преподавания. Он вытесняет рутину так же, как когда-то калькуляторы заменили счета, а электронные журналы — бумажные ведомости. Однако успешная интеграция новых технологий требует внимательного подхода и осознания возможных рисков. Те, кто научится управлять этими инструментами сегодня, получают преимущество в эффективности и качестве преподавания завтра. Важно, чтобы образовательные учреждения не только использовали ИИ как инструмент, но и развивали у студентов навыки критического анализа и самостоятельного мышления, что станет залогом успешного и устойчивого будущего образования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рахматуллаев М.А. Искусственный интеллект в высшем образовании. проблемы и решения, *10.34920/phe.2024.16.06*
- [2] Хузяхметов Р.Р., Ромашкина Г.Ф., Лукьяненко А.Е., Костомаров В.М., Кичикова Д.В. Применение искусственного интеллекта в высшем образовании: возможности и проблемы, *МИР (Модернизация. Инновации. Развитие). ISSN 2411-796X (Online)*, <https://doi.org/10.18184/2079-4665.2025.16.4.642-659>
- [3] Гасанова Р.Р., Романова Е.А. Искусственный интеллект в высшей школе: проблемы, возможности, риски *Журнал Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования, ISSN 2312-864X (Online), 2024. Vol. 21, №4, с.501–515*, <https://doi.org/10.22363/2312-8631-2024-21-4-501-515>

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕННОГО ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Е.А. МАЛГАЖДАРОВ¹, Ж.Р. ЖАКСЫЛЫКОВА², Н.М. ТЕМИРБЕКОВ³

^{1,2}ВКУ имени С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан

³КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

¹malgazhdarov_e@mail.ru, ²zhaksylykova0507@mail.ru, ³temirbekov@rambler.ru

При решении задач в геометрически сложных областях существенные трудности связаны с построением согласованных расчетных сеток и корректным учетом граничных условий. Одним из наиболее эффективных подходов к преодолению этих трудностей является метод фиктивных областей (МФО), основанный на расширении физической области до регулярной вспомогательной области с последующим продолжением коэффициентов уравнения в фиктивную подобласть. Такой подход позволяет использовать однородные разностные и конечно-элементные схемы на регулярных сетках, существенно упрощая вычислительную реализацию и повышая эффективность алгоритмов.

Применению МФО к уравнениям Навье - Стокса посвящен ряд работ, в которых исследовались вопросы корректности постановки вспомогательной задачи, обоснования существования решения и построения вычислительных алгоритмов.

Для объективной оценки точности численных методов в вычислительной гидродинамике широко используется подход, основанный на построении тестовых задач с заранее известным точным решением. Наличие аналитического решения позволяет исследовать погрешности численного метода, порядок аппроксимации и сходимость по параметрам дискретизации.

В данной работе выполняется численная верификация метода фиктивных областей для уравнений Навье - Стокса на основе построенного точного решения, для которого уравнения Навье - Стокса выполняются тождественно при соответствующим образом заданной правой части. Для выбранных аналитических выражений для компонент скорости и давления строго проверяется выполнение уравнения неразрывности и уравнений Навье - Стокса, после чего в явном виде формируется соответствующая правая часть уравнений. Это позволяет построить тестовую задачу с заранее известным точным решением и использовать её для оценки точности МФО.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Данаев Н.Т. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задач гидродинамики с помощью метода фиктивных областей // Доклады Академии Наук России. – 2000. – Т.374, №3. – С. 333–335.
- [2] Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К.С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – Т.3, №1. – С. 57–71.
- [3] Temirbekov A.N., Zhaksylykova Zh.R., Malgazhdarov Y.F., Kasenov S. Application of the Fictitious Domain Method for Navier–Stokes Equations. Computers, Materials and Continua, 2022. DOI:10.32604/cmc.2022.027830.
- [4] Темирбеков Н.М., Жаксылыкова Ж.Р. Применение метода фиктивных областей для решения уравнений Навье - Стокса с учетом удвоенной средней кривизны Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2025;22(1):259-270. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-259-270>.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ КАК ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ

Т.А. МАХАРОВ¹, Н.К. ЛАТИПОВ²

^{1,2}Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

^{1,2}Университет Сарбон, Ташкент, Узбекистан

¹t.makharov@nuu.uz, ²n.latipov@nuu.uz

Использование цифровых образовательных технологий в высшем образовании является одним из приоритетных направлений модернизации современной образовательной системы. В условиях цифровизации общества и развития цифровой экономики высшая школа сталкивается с необходимостью трансформации традиционных форм организации учебного процесса. Внедрение цифровых образовательных технологий способствует повышению качества подготовки специалистов, расширению возможностей индивидуализации обучения и формированию профессиональных компетенций студентов. Актуальность рассматриваемой проблемы подтверждается современными исследованиями отечественных и зарубежных авторов, подчёркивающих необходимость педагогически обоснованного и системного применения цифровых инструментов в образовательной практике.

Целью исследования является выявление и теоретическое обоснование влияния цифровых образовательных технологий на организацию учебного процесса, познавательную активность и результаты обучения студентов. В соответствии с поставленной целью были определены следующие задачи: анализ педагогических возможностей цифровых технологий в высшем образовании; оценка педагогической эффективности применения цифровых платформ и интерактивных образовательных материалов; сравнительное исследование результатов учебной деятельности студентов при традиционной и цифровой формах обучения; определение педагогических условий эффективного внедрения цифровых технологий в образовательный процесс.

Методологическую основу исследования составили системный, компетентностный и деятельностный подходы, позволяющие рассматривать цифровые технологии как интегративный элемент образовательной среды. В работе использованы методы анализа научной литературы, педагогического наблюдения, анкетирования студентов и сравнительного анализа результатов учебной деятельности. В исследовании приняли участие студенты бакалавриата, разделённые на экспериментальную группу, в которой обучение осуществлялось с применением цифровых образовательных технологий, и контрольную группу, обучавшуюся в традиционном формате.

Таблица 1: Сравнение форм обучения

Показатель	Традиционное обучение	Обучение с цифровыми технологиями
Форма подачи материала	Лекции и семинары	Комбинированная (текст, мультимедиа, интерактив)
Уровень самостоятельности	Низкий	Высокий
Обратная связь	Отсроченная	Оперативная
Индивидуализация	Низкая	Высокая
Учебная мотивация	Средняя	Высокая

Результаты исследования показали, что систематическое использование цифровых образовательных технологий способствует повышению учебной мотивации и познавательной активности студентов, а также положительно влияет на академические показатели. В экспериментальной группе наблюдалось увеличение уровня самостоятельности обучающихся, более оперативная обратная связь и расширение возможностей индивидуализации обучения. Применение мультимедийных и интерактивных материалов обеспечило более высокую вовлечённость

студентов в учебный процесс по сравнению с традиционной лекционно-семинарской моделью. Сравнительная характеристика форм организации учебного процесса представлена в таблице 1.

Анализ полученных данных позволил установить, что эффективность внедрения цифровых технологий определяется рядом педагогических условий: методической целесообразностью использования цифровых инструментов в соответствии с целями дисциплины; достаточным уровнем цифровых и педагогических компетенций преподавателя; активной позицией студента в самостоятельной работе; системностью применения технологий и организацией оперативной обратной связи. Комплексная реализация указанных условий обеспечивает устойчивое повышение качества обучения. Перечень и содержание данных условий представлены в таблице 2.

Таблица 2: Педагогические условия эффективного использования ЦОТ

Педагогическое условие	Содержание	Ожидаемый педагогический эффект
Методическая целесообразность	Соответствие технологий целям дисциплины	Повышение осмысленности учебной деятельности
Подготовленность преподавателя	Наличие цифровых и педагогических компетенций	Рост эффективности использования технологий
Активная позиция студента	Включённость в самостоятельную работу	Развитие навыков самообразования
Системность применения	Регулярное использование технологий	Устойчивое повышение качества обучения
Обратная связь	Оперативный контроль и коррекция результатов	Повышение учебной мотивации

Таким образом, цифровые образовательные технологии выступают значимым педагогическим фактором повышения качества подготовки студентов в системе высшего образования. Их целенаправленное и методически обоснованное применение способствует развитию профессиональных компетенций, формированию навыков самостоятельной работы и повышению эффективности образовательного процесса в целом.

Ключевые слова: высшее образование, педагогика, цифровые образовательные технологии, качество обучения, цифровая образовательная среда.

2020 Mathematics Subject Classification: 97U10, 97U99

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Беспалько В. П. *Слагаемые педагогической технологии*, Педагогика, Москва (1989).
- [2] Хуторской А. В. *Компетентностный подход в образовании*, Эйдос, Москва (2013).
- [3] Абдуқодиров А. А. *Ахборот технологиялари ва таълим сифати*, Ўқитувчи, Тошкент (2018).
- [4] Жўраев Р. Х. *Педагогик технологиялар ва таълим самарадорлиги*, Фан, Тошкент (2017).
- [5] Юлдашев Ж. Г., Усмонов С. А. *Педагогик технологиялар асослари*, Ўқитувчи, Тошкент (2019).

ПЕДАГОГТЕРДІҢ ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР САЛАСЫНДА ҮЗДІКСІЗ КӘСІБИ ДАМУЫНА АРНАЛҒАН АДАПТИВТІ МИКРОБІЛІКТІЛІК ПЛАТФОРМАСЫН ӘЗІРЛЕУДІҢ ТҰЖЫРЫМДАМАЛЫҚ АЛҒЫШАРТТАРЫ

Е. МҰСИРАТ¹, Н.Т. ОШАНОВА², Г.Б. КАМАЛОВА³, И.Т. СӘЛҒОЖА⁴

^{1,2,3,4}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы,

Қазақстан

umit.kuan@bk.ru

Білім беру саласындағы цифрландыру үдерісі педагогтың кәсіби қызметін сапалық жағынан түбегейлі өзгертті. Жылдам өзгеретін технологиялық ортада кәсіби цифрлық құзыреттілік статикалық сипаттан динамикалық сипатқа ауысады. Қазіргі педагог үнемі жеке бағдарламаларды ғана емес, сонымен қатар нейрожелілік модельдер мен бұлттық қызметтерден бастап білім беру аналитикасының күрделі жүйелеріне дейін үнемі жаңарып отыратын технологиялар стегін игеруге мәжбүр. Мұндай жағдайларда мерзімді оқытуға негізделген дәстүрлі біліктілікті арттыру үлгілері шектеулі тиімділікті көрсетеді. Олар білімді эпизодтық жаңартуға бағытталған және цифрлық технологиялардың даму қарқынына толық сәйкес келмейді, бұл білім беру ортасының талаптары мен педагогтардың нақты дайындық деңгейі арасындағы сәйкессіздікке әкеледі. Ересектерге білім беру саласындағы халықаралық зерттеулер практикалық қызметпен расталатын нақты дағдыларды қалыптастыруға бағытталған кәсіби оқытудың икемді форматы ретінде микробіліктіліктердің рөлінің өсіп келе жатқанын көрсетеді [1]. Микробіліктіліктер Lifelong Learning жаһандық тұжырымдамасы аясында жекелендірілген білім беру траекторияларының "кірпішіне" айналады.

Кәсіби дамудың жаңа модельдеріне көшудің негізгі алғышарттарының бірі – технологиялық өзгерістер мен білім беру бағдарламаларының жаңару жылдамдығы арасындағы алшақтықтың артуы. Цифрлық құралдар мен IT тәжірибелері педагогтерді даярлаудың ресми жүйелеріне қарағанда тезірек жаңартылады. Ғылыми зерттеулер көптеген елдерде білім беруде цифрлық реформаларды енгізу педагогтердің цифрлық дайындығының жеткіліксіздігіне байланысты баяулайтынын көрсетті. Осылайша, жүйелік қайшылық қалыптасады: технологияның дамуы үздіксіз, ал педагогтардың кәсіби дамуы дискретті түрде ұйымдастырылған. Сонымен қатар, дәстүрлі ұзақ курстар көбінесе тәжірибелі педагогтерде когнитивті шамадан тыс жүктеме мен уақыт тапшылығын тудырады. Бұл қайшылықты шешу біліктілікті арттырудың курстық моделінен кәсіби дамудың модульдік және үздіксіз моделіне көшуді талап етеді, бұл кәсіби тапшылықтарды тез жабуға мүмкіндік береді.

Ғылыми зерттеулерде атап өтілгендей, микробіліктіліктер оқытудың құзыреттілікке бағытталған форматы болып табылады, бағалаудың негізгі нысаны оқу ұзақтығы емес, кәсіби тапсырмаларды орындау қабілеті болып саналады [2]. Эмпирикалық зерттеулер көрсеткендей, педагогтардың микробіліктілік бағдарламаларға қатысуы кәсіби құзыреттіліктің өсуіне, педагогикалық тәжірибенің өзгеруіне, әрі қарай оқуға дайындығын арттыруға ықпал етеді. Бұл ретте педагогтер ұзақ мерзімді бағдарламалардан өтпей-ақ нақты кәсіби тапшылықтарды жоюға мүмкіндік беретін қысқа, икемді білім беру форматтарына тұрақты қызығушылық танытады. Бұл мотивацияны арттырып қана қоймай, сонымен қатар кәсіби күйзеліс тәуекелін азайтып, оқыту үдерісінің стресс деңгейін төмендетеді.

Тағы бір маңызды алғышарт – педагогтардың кәсіби профильдерінің әртүрлілігі. Педагогтер цифрлық дайындық деңгейімен, іс-әрекеттің білім беру контекстімен ерекшеленеді. Зерттеулер тиімді кәсіби даму жеке білім беру қажеттіліктерін ескере отырып ғана мүмкін болады, бұл адаптивті EdTech платформаларын енгізуді талап етеді. Мұндай платформаларда жасанды интеллект алгоритмдерін қолдану пайдаланушының бастапқы деңгейін талдауға және нақты олқылықтарды жою үшін қажет микро-модульдерді ұсына отырып, жеке білім беру маршрутын құруға мүмкіндік береді. Бұл пассивті тыңдаудан белсенді субъективті дамуға көшуді қамтамасыз етеді. Оқытудың адаптивті модельдері қатысуды арттырып, тұрақты кәсіби

өсуге ықпал етеді, перифериялық қатысудан белсенді кәсіби дамуға көшуді жүзеге асырады. Микробіліктіліктер табиғаты бойынша модульділікке, икемділікке, жекелендіру мүмкіндігіне ие. Бұл оларды адаптивті EdTech платформаларын құруға табиғи негіз етеді.

Талдау негізінде мұндай инфрақұрылымды құрудың төрт алғышарттарын атауға болады:

- **Технологиялық** – цифрлық құралдарды жедел жаңартумен байланысты;
- **Кәсіби** – нақты дағдыларды тексеруге және практикалық құзыреттілікке негізделген;
- **Педагогикалық** – дамудың адаптивтілігін, дербестендіруін және оқытудың жеке қарқынын есепке алу қажеттілігімен байланысты;
- **Әлеуметтік-экономикалық** – нарықтың технологиялық құрылымдардың өзгеруіне тез бейімделе алатын кадрларға деген қажеттілігімен байланысты.

Осы шарттардың үйлесімі педагогтардың кәсіби дамуының жаңа инфрақұрылымына объективті қажеттілікті қалыптастырады.

Халықаралық тәжірибеде микробіліктілік оқытуды жекелендіру құралы, кәсіби сертификаттау құралы, педагогтердің мансаптық дамуының элементі ретінде әрекет етеді. Бұл олардың адаптивті білім беру экожүйелерінің негізгі құрамдас бөлігі ретіндегі әлеуетін растайды.

Осылайша, IT – микробіліктіліктің адаптивті платформасын әзірлеу цифрлық білім беру шындығы жағдайында педагогтердің үздіксіз кәсіби даму жүйесін трансформациялаудың табиғи кезеңі болып табылады.

ӘДЕБИЕТ

[1] Semigina T., Rashkevych Yu. Microcredentials kak obrazovatel'naya tendentsiya i vyzov dlya vysshego obrazovaniya, *Mezhdunarodnyi nauchnyi zhurnal universitetov i liderstva*, (16) (2023), 77–89. DOI: <https://doi.org/10.31874/2520-6702-2023-16-77-89>.

[2] Illinois State Board of Education Microcredentials approved by ISBE.

ВЕЙВЛЕТ БАЗИСТЕРІН ҚОЛДАНА ОТЫРЫП ГАЛЕРКИН ӘДІСІ АРҚЫЛЫ БЮРГЕРС ТЕҢДЕУІНІҢ ЖУЫҚ ШЕШІМІН ЗЕРТТЕУ

Т.Ғ. МҰХАНОВА¹, Д.О. ТАМАБАЙ²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹tomirismukhanova04@gmail.com, ²dtamabay@gmail.com

Бюргерс теңдеуі – сұйықтық механикасында, газ динамикасында және турбуленттік құбылыстарды зерттеуде кеңінен қолданылатын сызықтық емес дифференциалдық теңдеу болып табылады [1]. Бұл теңдеу конвекция және диффузия процестерінің өзара әсерін сипаттайды және Навье–Стокс теңдеуінің қарапайым моделі ретінде қарастырылады.

Бюргерс теңдеуінің жалпы түрі келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

мұндағы $u(x, t)$ – белгісіз функция, ал ν – тұтқырлық коэффициенті. Бұл теңдеу көптеген физикалық процестерде кездеседі және оның аналитикалық шешімін табу көп жағдайда қиын болғандықтан, әртүрлі сандық әдістер қолданылады [2].

Бұл жұмыста Бюргерс теңдеуінің жуық шешімі вейвлет базистерін қолдана отырып Галеркин әдісі арқылы анықталады. Вейвлеттер – кеңістікте жақсы локализация қасиеттеріне ие функциялар жиыны болып табылады және күрделі функцияларды тиімді түрде аппроксимациялауға мүмкіндік береді [3].

Галеркин әдісінде белгісіз функция базистік функциялар арқылы келесі түрде жуықталады:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) \quad (2)$$

мұндағы $\psi_{nm}(x)$ – вейвлеттік базистік функциялар, ал c_{nm} – анықталатын коэффициенттер. Бұл өрнекті Бюргерс теңдеуіне қойып және Галеркин әдісін қолдану арқылы белгісіз коэффициенттерді анықтауға арналған теңдеулер алынады.

Вейвлет базистерін қолдану функцияларды дәл жуықтауға мүмкіндік береді және сандық әдістердің тиімділігін арттырады. Сонымен қатар бұл тәсіл есептеу уақытын азайтып, күрделі сызықтық емес дифференциалдық теңдеулерді шешуде жақсы нәтижелер береді [3].

Осылайша, вейвлет базистерін қолданатын Галеркин әдісі Бюргерс теңдеуін сандық түрде шешудің тиімді және дәл тәсілдерінің бірі болып табылады.

Кілтті сөздер: Бюргерс теңдеуі, Галеркин әдісі, вейвлеттер, сандық әдістер, дифференциалдық теңдеулер.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q35, 65M60, 42C40

ӘДЕБИЕТ

[1] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, **1** (1948), 171–199.

[2] Benton E.R., Platzman G.W. A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**:2 (1972), 195–212.

[3] Venkatesh S.G., Ayyaswamy S.K., Balachandar S.R. An approximation method for solving Burgers' equation using wavelets, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India, Section A: Physical Sciences*, **87**:2 (2017), 257–266.

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ТЕХНОЛОГИЯСЫН ТИІМДІ ПАЙДАЛАНУДА 4К ҚҰЗЫРЕТТІЛІГІН ИГЕРУДІҢ МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ

А.Ж. НУРБЕКОВА

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
janaseljan@mail.ru

Зерттеудің өзектілігі

Қазіргі цифрлық трансформация жағдайында жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары білім беру жүйесінің мазмұнына, әдістеріне және нәтижелеріне елеулі ықпал етуде. Қазақстан Республикасында ЖИ дамытудың 2024–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасында цифрлық инфрақұрылымды жетілдірумен қатар, ЖИ саласында кәсіби даярланған мамандарды қалыптастыру міндеті қойылған. Бұл педагогтардың тек техникалық сауаттылығын ғана емес, сонымен қатар ЖИ құралдарын оқу процесінде саналы, тиімді және жауапты қолдану қабілетін талап етеді.

Сонымен бірге, ЖИ технологияларын білім беру үдерісіне енгізу педагогтан тек пәндік құзыреттілікті ғана емес, ХХІ ғасыр дағдыларын меңгеруді қажет етеді. Осы контексте «4К» құзыреттілігі – шығармашылық (creativity), сыни ойлау (critical thinking), коммуникация (communication), ынтымақтастық (collaboration) – жасанды интеллект құралдарын тиімді пайдаланудың тұлғалық-әдіснамалық негізі ретінде қарастырылады [1,5].

Алайда ғылыми әдебиеттерде ЖИ технологияларын қолдану мәселесі кеңінен зерттелгенімен, оны тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігінің рөлі жеткілікті деңгейде эмпирикалық тұрғыдан талданбаған. Осы қайшылық зерттеу проблемасын айқындайды.

Зерттеудің мақсаты мен міндеттері

Зерттеудің мақсаты – жасанды интеллект технологиясын тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігін игерудің маңыздылығын теориялық негіздеу және жоғары мектеп оқытушыларының аталған дағдыларды меңгеру деңгейін эмпирикалық тұрғыдан айқындау.

Міндеттері:

- 4К құзыреттілігінің мазмұнын және құрылымдық компоненттерін талдау;
- ЖИ технологияларын білім беруде қолданудың педагогикалық ерекшеліктерін айқындау;
- Оқытушылардың 4К құзыреттілігін меңгеру деңгейін анықтау;
- Алынған нәтижелер негізінде 4К құзыреттілігінің ЖИ-ді тиімді қолданудағы маңызын дәлелдеу.

Зерттеу әдістері

Зерттеу барысында теориялық талдау, салыстырмалы зерттеу және сауалнама әдістері қолданылды. Эмпирикалық кезеңде 26 жоғары оқу орны оқытушысы қатысқан сауалнама жүргізілді. Сауалнама 5 тұжырымнан тұратын Ликерт шкаласы негізінде құрастырылды және респонденттердің 4К құзыреттілігін меңгеру деңгейі мен ЖИ құралдарын пайдалану тәжірибесін анықтауға бағытталды. Нәтижелер пайыздық және салыстырмалы талдау әдістерімен өңделді.

Теориялық негіз

4К құзыреттілігі өзара байланысты төрт компоненттен тұрады.

Шығармашылық (креативтілік) – жаңа идеяларды генерациялау, ЖИ құралдарын дәстүрлі емес тәсілмен қолдану және білім беру мазмұнын жаңғырту қабілеті.

Сыни ойлау – ЖИ арқылы алынған ақпаратты талдау, алгоритмдік шешімдерді бағалау және этикалық тәуекелдерді саралау мүмкіндігі [2].

Коммуникация – цифрлық ортада тиімді өзара әрекеттестік орнату, ЖИ нәтижелерін түсіндіру және білім алушылармен кері байланыс жүргізу қабілеті [3].

Ынтымақтастық – командалық жұмыс барысында ЖИ құралдарын бірлесіп қолдану, тәжірибе алмасу және жобалық қызметті ұйымдастыру дағдысы [4].

ЖИ технологияларын тиімді пайдалану осы компоненттердің интегративті дамуын талап етеді.

Зерттеу нәтижелері

Зерттеу нәтижелері респонденттердің басым бөлігі 4К құзыреттілігінің ЖИ қолдануда маңызды рөл атқаратынын көрсетті.

- 30,77% оқытушы 4К дағдыларын кәсіби табыстың негізгі факторы ретінде бағалайды;
- 23,08% респондент аталған дағдыларды жүйелі түрде дамыту қажеттігін атап өтті;
- «Ынтымақтастық» компоненті ең жоғары көрсеткішке ие болды, бұл білім беру ортасында коллаборативті стратегиялардың басымдығын көрсетеді;
- «Сыни ойлау» мен «шығармашылық» компоненттері ЖИ нәтижелерін талдау және оқу контентін бейімдеуде ерекше маңызға ие екендігі анықталды.

Нәтижелер 4К құзыреттілігінің жеткілікті деңгейде дамымауы ЖИ технологияларын толыққанды пайдалануға кедергі келтіруі мүмкін екенін көрсетеді.

Қорытынды

Жүргізілген зерттеу жасанды интеллект технологиясын тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігінің шешуші фактор екенін дәлелдейді. ЖИ құралдары педагогикалық үдерісті автоматтандырумен шектелмей, педагогтың шығармашылық, аналитикалық және коммуникативтік әлеуетін іске асыруды талап етеді.

Эмпирикалық деректер 4К құзыреттілігін жүйелі түрде дамыту қажеттігін көрсетеді. Осыған байланысты жоғары оқу орындарында педагог кадрларды даярлау және біліктілікті арттыру бағдарламаларына 4К құзыреттілігін дамытуға бағытталған арнайы модульдерді енгізу ұсынылады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] Куриленко И.В. Теория и практика общественного развития, *Теория и практика общественного развития*, (15) (2014), 67–68.
- [2] Олхова Т.А., Елисеев В.Н. Критическое мышление как основа развития информационно-познавательной самостоятельности студентов, *Высшее образование сегодня*, (5) (2013), 47–49.
- [3] Корчагина М.И. Коммуникативность – профессиональное качество педагога, *Вестник педагогических наук*, (3) (2008), 45–50.
- [4] Агаев Н.Ф. Педагогические условия повышения эмоциональной устойчивости личности студентов, *Педагогика*, (7) (2013), 284–290.
- [5] Арно А.О. Проектирование образовательного пространства на основе подхода развития навыков «4К», *Современные проблемы науки и образования*, (4) (2020), 112–118.

БІЛІМДІ БАСҚАРУҒА АРНАЛҒАН АГЕНТТІК RAG: ІЗДЕУ, ДӘЛЕЛДІЛІК ТЕКСЕРУІ ЖӘНЕ КОНТЕНТТІ ЖАҢАРТУ

Ж.К. НУРБЕКОВА¹, М.Н. КЕМЕЛБЕК²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹nurbekova-zhk@digitalexgroup.com, ²kemelbekmaira.99@gmail.com

Білім беру ортасының цифрлық трансформациясы оқу контентін қарапайым сақтау жүйелерінен күрделі цифрлық экожүйелерге көшуіне алып келді. Соның нәтижесінде білімді басқару оқыту сапасын қамтамасыз ететін өзекті әрі тірек компонентке айналып отыр. Қазіргі EdTech платформалары тек ақпаратты жинақтап сақтаумен шектелмей, оқу контентін әзірлеу және жүйелі жаңарту, оқу бағдарламасына сәйкестендіру, нақты пайдаланушының контекстіне бейімдеу, тьюторлық қолдау мен кері байланыс беру, сондай-ақ бағалау құралдарын құрастыру сияқты міндеттерді орындайтын инфрақұрылымға айналууда. Мұндай көпфункционалы орта деректер мен білімнің әртүрлі көздерін интеграциялап, қызметтер арасында келісімді жұмыс ағынын қамтамасыз ететін күрделі архитектуралық шешімдерді қажет етеді.

Оқытуды басқару жүйесі (LMS), силлабус, оқу-әдістемелік материалдар, тапсырма банкі, стандарттар, аналитикалық талдаулар сияқты білім көздерінің әртүрлі ортада шашыраңқы орналасуы білімді жедел табу, оның дәлелділігін қамтамасыз ету және мазмұнды дер кезінде жаңарту міндеттерін өзекті етеді. Соңғы жылдары үлкен тілдік модельдер (LLM) оқу контентін генерациялау және сұрақтарға жауап беру міндеттерінде кең қолданылғанымен, дереккөзсіз қате тұжырым және ескірген ақпаратты қайталау тәуекелі білім беру контекстінде жоғары. Сондықтан білімді басқару үшін тек генерацияға сүйенбей, оны білім қорымен байланыстырып, дәлелділік пен сапаны қамтамасыз ететін және басқарылатын әдіснама қажет. Бұл мәселе LLM галлюцинация құбылысына арналған кең шолуда жүйелі түрде сипатталып, оның нақты қолданбаларға соның ішінде ақпараттық іздеу жүйелері мен білімге тәуелді сервистерге қауіп төндіретіні көрсетіледі [1].

Осы тәуекелдерді төмендету бағыттарының бірі – генерацияны сыртқы білім қорынан алынған контекстпен негіздейтін Retrieval-Augmented Generation (RAG) тәсілі.

Алайда білім беру сценарийлерінде тек «контекст тауып беру» жеткіліксіз. Контенттің дәлелділігі міндетті түрде тексеріліп, білім қоры жүйелі жаңартылып отыруы керек. Білім беруде RAG қолдануларына арналған жүйелі шолу мен білім беру чатботтарына арналған RAG шолуы дәл осы қиындықтарды негізгі зерттеу мәселелері ретінде атап өтеді [2].

Зерттеу мақсаты – білімді басқаруға арналған агенттік RAG тәсілін ұсыну және EdTech ортада оның дереккөзге сүйенген жауап беру, қателікті азайту және контенттің өзектілігін сақтау тұрғысынан қолданбалы тиімділігін дәлелдеу.

Ұсынылатын тәсіл классикалық іздеу және генерациялау үлгісін көпқадамды циклге айналдыру. Зерттеу мақсатына қол жеткізу үшін агенттік RAG тәсілі басқарылатын жұмыс ағыны ретінде модельденді және оның негізгі кезеңдері 1-суретте көрсетілді. Суретте жоспарлау

мен рекурсивті іздеу арқылы релевант контекст жинақталып, синтез кезеңінде жауап құрастырылатыны көрсетілген. Одан кейін дәлелділік тексеруінде әр тұжырым дереккөз фрагменттерімен салыстырылып, дәлел жеткіліксіз болған жағдайда процесс іздеу кезеңіне қайта оралады. Тек расталған жағдайда ғана нәтиже пайдаланушыға ұсынылып, контенттің өзектілігін сақтау үшін білім репозиторийіне жаңарту енгізіледі. Осы цикл жауаптың дереккөзге сүйенуін күшейтіп, қателікті азайту және жаңартылуды басқару талаптарын жүйелі түрде қамтамасыз етеді.

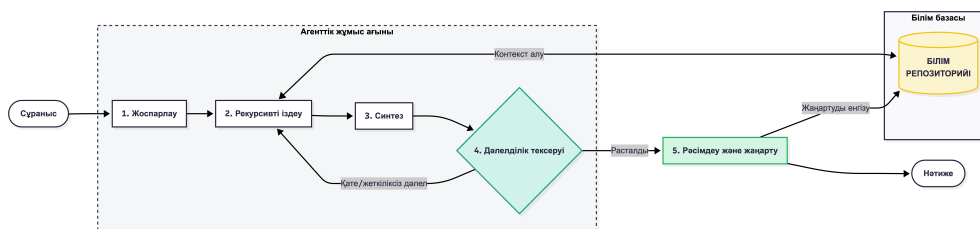


Рис. 1: *
Агенттік RAG арқылы білімді басқарудың жұмыс ағыны

LLM технологияларына негізделген генеративті жауаптарды верификацияланған білім репозиторийімен қатаң үйлестіру, әрбір тұжырымды дәлелділік сүзгісінен өткізу және контенттің нұсқалық жаңартылуын жүйелі қамтамасыз ету төмендегі стратегиялық нәтижелерге жеткізеді:

1. Дереккөзсіз немесе негізсіз қате жауаптардың (галлюцинациялардың) үлесі айтарлықтай төмендейді;
2. Пайдаланушыға ұсынылатын ақпараттың уақыт пен контекст тұрғысынан жарамдылығы артады;
3. Жасанды интеллект архитектурасының айқындығы мен басқарылу деңгейі күшейеді.

Зерттеу барысында агенттік RAG тәсілі EdTech платформаларында білімді басқарудың іргелі талаптарын, дереккөзге сүйену, дәлелділік бақылау, мазмұн өзектілігін сақтау және итерациялық жаңарту сияқты біртұтас басқарылатын жұмыс ағынына біріктіретіні көрсетілді. Дәстүрлі RAG жүйелерінің «іздеу және құрастыру» парадигмасы білімге тәуелді міндеттерде тиімді болғанымен, EdTech контекстінде оны агенттік циклмен кеңейту қажет. Атап айтқанда, дәлелділікті тексеру және білім қорын жаңарту қабаттарын міндетті компонент ретінде енгізу интеллектуалды оқыту жүйелерінің сенімділігі мен практикалық қолданымдылығын жаңа сапалық деңгейге көтереді.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] Huang L., Yu W., Ma W., Zhong W., Feng Z., Wang H., Chen Q., Peng W., Feng X., Qin B., Liu T. A Survey on Hallucination in Large Language Models: Principles, Taxonomy, Challenges, and Open Questions, *ACM Transactions on Information Systems*, **43**:2.
- [2] Li Z., Wang Z., Wang W., Hung K., Xie H., Wang F.L. Retrieval-augmented generation for educational application: A systematic survey, *Computers and Education: Artificial Intelligence*, (8) (2025), 100417.

GENAI ДӘУІРІНДЕ БОЛАШАҚ ІТ МАМАНДАРЫНЫҢ ПРОГРАММАЛАУ ДАҒДЫЛАРЫН БАҒАЛАУ ӘДІСТЕРІ

Ж.К. НУРБЕКОВА¹, А.Е. САГИМБАЕВА², А.Е. ЖАКСЫЛЫКОВ³

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

³Торайғыров университеті, Павлодар, Қазақстан

¹nurbekova-zhk@digitalexgroup.com, ²a.sagimbaeva1@abaiuniversity.edu.kz,

³zhaksylykov.a@teachers.tou.edu.kz

Аннотация. Бұл зерттеуде GenAI жағдайында болашақ ІТ мамандарының программалау дағдыларын бағалау әдістері қарастырылады. Дәстүрлі функционалдық дұрыстыққа негізделген бағалау тәсілінің шектеулері көрсетіліп, программалау дағдылары нәтижелік, үдерістік және рефлексиялық өлшемдер бойынша жіктеледі. Осы негізде алгоритмдік талдау, Big-O күрделілігін дәлелдеу және GenAI шешімін сыни бағалауды қамтитын көпкритерийлі бағалау жүйесі ұсынылады. Бағалау әдістері үш кезеңді құрылым арқылы жүзеге асырылады. Зерттеу GenAI жағдайында программалау дағдыларын кешенді бағалау қажеттігін негіздейді.

Кіріспе. GenAI технологияларының қарқынды дамуы ІТ саласы мамандарының кәсіби дайындық жүйесіне айтарлықтай өзгерістер енгізді. Үлкен тілдік модельдер (LLMs), код генерациялау, алгоритмдік құру және рефакторинг жасау мүмкіндігіне ие болды. Бұл программалау үдерісін жеңілдеткенімен, болашақ болашақ ІТ мамандарының алгоритмдік құзыреттіліктерін бағалау мәселесін күрделендіре түсуде.

Студенттердің программалау дағдыларын дәстүрлі бағалау барысында негізгі бағалау өлшемі функционалдық дұрыстық (functional correctness): кодтың дұрыс компиляциялануы және тестілеуден өтуі жеткілікті деп есептелді. Алайда GenAI жағдайында жұмыс істейтін код студенттің өзінің жеке алгоритмдік ойлауы нәтижесінде емес, AI құралдарын пайдалану нәтижесінде алынуы мүмкін.

Сондықтан GenAI дәуірінде студенттердің программалау дағдыларын бағалау соңғы нәтижеге емес, шешім қабылдау үдерісіне, алгоритмдік талдау мен метатанымдық қабілеттерге бағытталуы тиіс.

Зерттеудің мақсаты GenAI жағдайында болашақ ІТ мамандарының программалау дағдыларын нәтижелік, үдерістік және рефлексиялық өлшемдер негізінде бағалаудың көпкритерийлі бағалау жүйесі ұсыну және оның құрылымын негіздеу болып табылады.

Зерттеу әдістері. Зерттеу барысында студенттердің программалау дағдыларының құрылымын айқындау мақсатында құрылымдық-декомпозициялық талдау жүргізілді. Алгоритмдік тапсырмаларды бағалау механизмдері LeetCode және HackerRank платформалары негізінде қарастырылды. Сонымен қатар, программалау дағдыларын бағалау мүмкіндіктерін зерделеу мақсатында GitHub репозиторий құрылымы, commit тарихы, код эволюциясы және құжаттама сапасына талдау жүргізілді.

Нәтижелер. GenAI құралдарының код генерациялау қабілеті жоғары екендігі техникалық есептерде көрсетілгенімен, ұсынылған шешімдердің алгоритмдік тиімділігі мен негіздемесі әрдайым жүйелі түрде дәлелденбейтіні белгілі [1]. Бұл жағдай бағалау критерийлерін функционалдық дұрыстықпен шектеу жеткіліксіз екенін көрсетеді.

Осы алғышартқа сүйене отырып, студенттердің программалау дағдылары бастапқыда «шешім нәтижесі» және «шешім қабылдау үдерісі» өлшемдері бойынша жіктелді. Жіктеу логикасына сәйкес функционалдық дұрыстық нәтижелік өлшем ретінде қарастырылды, ал алгоритмдік логиканы негіздеу, деректер құрылымын саналы таңдау және уақыттық әрі кеңістіктік күрделілікті (Big-O) дәлелдеу шешім қабылдау үдерісін сипаттайтын бағалау критерийлері ретінде айқындалды.

Аталған критерийлер шешімнің ішкі құрылымын, талдау тереңдігін және дәлелдеу деңгейін сипаттайды. Бұл тәсіл студенттің тек жұмыс істейтін код ұсынуын емес, оны түсіндіру және негіздеу қабілетін бағалауға мүмкіндік береді. GenAI құралдарының білім беру үдерісіне

ықпалы жөніндегі зерттеулер де нәтижелік өнім мен терең түсіну деңгейі арасында айырмашылық болуы мүмкін екенін көрсетеді [2].

GenAI шешімін сыни талдау компоненті бағалау құрылымына дербес енгізілді, өйткені GenAI негізіндегі кодта қауіпсіздік пен сапа мәселелері туындауы мүмкін. Бұл компонент студенттің кодтың тиімділігін, шектеулерін және баламаларын бағалау қабілетін анықтауға бағытталған.

LeetCode және HackerRank платформалары функционалдық дұрыстықты тиімді тексергенімен, алгоритмдік негіздемені толық бағалай алмайтыны анықталды. Ал GitHub репозиторийлерін талдау код эволюциясы мен commit динамикасы арқылы үдерістік дағдыларды бағалауға мүмкіндік берді.

Осы шектеулерді ескере отырып, бағалау құрылымына оңтайландыру және қауіпсіздік критерийлері енгізіліп, нәтижесінде 1-кестеде GenAI жағдайындағы программалау дағдыларын бағалаудың көпкритерийлі жүйесі ұсынылды.

Таблица 1: GenAI жағдайындағы программалау дағдыларын бағалаудың көпкритерийлі жүйесі

Бағалау критерийі	Салмақ (%)	Бағалау мазмұны
Алгоритм логикасын түсіндіру	25	Шешімнің құрылымын негіздеу
Big-O талдау	20	Күрделілікті дәлелдеу
Кодтың функционалдық дұрыстығы	20	Автотест нәтижесі
Оңтайландыру және рефакторинг	15	Тиімділікті арттыру
AI шешімін сыни талдау	10	Шектеулер мен баламаларды анықтау
Қауіпсіздік және сенімділік	10	Код сапасын сараптау

1-кестеде ұсынылған көпкритерийлі бағалау жүйесі нәтижелік, үдерістік және рефлексиялық өлшемдерді біріктіруге негізделген. Алгоритмдік логика мен Big-O талдаудың жоғары салмағы студенттің терең танымдық деңгейін бағалауға бағытталған, ал функционалдық дұрыстық жалғыз көрсеткіш ретінде қарастырылмайды. GenAI шешімін сыни талдау рефлексиялық қабілеттерді анықтауға мүмкіндік береді және бағалау парадигмасын нәтижеге бағытталған тәсілден үдерістік-аналитикалық модельге кеңейтеді.

Бұл жүйе практикалық тұрғыда үш кезең арқылы жүзеге асырылады: GenAI-сыз диагностикалық кезең (дербес алгоритмдік деңгейді анықтау), GenAI-интеграциялық кезең (AI құралдарын саналы қолдануды бағалау) және рефлексиялық-аналитикалық кезең (шешімнің негіздемесі мен шектеулерін талдау). Осы кезеңдердің интеграциясы программалау дағдыларын кешенді бағалауға және GenAI жағдайында кәсіби дербестікті сақтауға мүмкіндік береді.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің қаржылық қолдауымен орындалды (грант № AP23490592).

Түйін сөздер: GenAI, программалау дағдылары, бағалау әдістері, алгоритмдік ойлау, Big-O күрделілік, көпкритерийлі бағалау жүйесі

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] OpenAI *GPT-4 Technical Report*, (2023). URL: <https://cdn.openai.com/papers/gpt-4.pdf>.
- [2] Denny P., Prather J., Becker B.A., Finnie-Ansley J., Hellas A., Leinonen J., Luxton-Reilly A., Reeves B.N., Santos E.A., Sarsa S. Computing education in the era of generative AI, *Communications of the ACM*, **67**:2 (2024), 56–67.

НЫҒЫЗДАЛҒАН БЕЛСЕНДІРІЛГЕН КӨМІРГЕ КӨМІРҚЫШҚЫЛ ГАЗЫНЫҢ АДСОРБЦИЯСЫН МОДЕЛЬДЕУ

Д.Е. ОРАЗАЛЫ¹, Б.А. БЕРДЕНОВА²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹orazalydana1@gmail.com, ²bakytur.berdenova@gmail.com

Қазіргі уақытта салқындату технологияларында компрессиялық салқындату жүйелері (КСЖ) кеңінен қолданылады. Ол энергетиканы тұрақты қажет етеді, яғни компрессордың үздіксіз жұмыс істеуі үшін салқындату жүйесі электр энергиясына тәуелді. Халықаралық энергетикалық агенттігі (International Energy Agency) деректеріне сәйкес, ауаны салқындату мен желдету мақсатында қолданылатын кондиционерлер мен желдеткіштер дүние жүзіндегі ғимараттардың электр энергиясының шамамен 20%-ын тұтынады, бұл ғаламдық электр энергиясы тұтынуының шамамен 10%-ына сәйкес келеді [1].

Сондықтан соңғы жылдары экологиялық қауіпсіз және энергия үнемдейтін балама технологияларды дамытуға ерекше назар аударылып отыр. Осындай перспективалы бағыттардың бірі – адсорбциялық салқындату жүйелері (АСЖ). Бұл жүйелерде механикалық компрессор қолданылмайды сол себепті олар қалдық жылу көздерін, оның ішінде күн энергиясын пайдаланып жұмыс істейді. Осы бір артықшылығы аталған технологияны шалғай өңірлерде қолдануға мүмкіндік береді. Күн энергиясына негізделген адсорбциялық салқындату жүйелерін қолданысқа енгізу энергияны тиімді әрі қауіпсіз пайдалануға жол ашады. Онымен қоса жасыл энергия көздеріне көшу ауаның ластануына байланысты туындайтын бірқатар мәселелерді де шешуге ықпал етеді.

Сондықтан адсорбциялық процестерді, әсіресе белсендірілген көмірдегі газ адсорбциясын зерттеу және оны математикалық модельдеу ғылыми әрі практикалық мәнге ие.

Бұл зерттеуде адсорбат ретінде көмірқышқыл газы мен адсорбент ретінде нығыздалған белсендірілген көмір таблеткасынан тұратын жұмысшы жұп зерттелді. Математикалық модель цилиндрлік координаттар жүйесі негізінде құрылды, осыған орай есептеу аймағы таблетканың радиалдық қимасына сәйкес келетін тік төртбұрышты, екі өлшемді осьтік симметриялы облыс ретінде алынды. Адсорбция жылдамдығы LDF (сызықтық қозғаушы күш) моделі негізінде өрнектелді.

Математикалық модельді құру барысында келесі жорамалдар қабылданды: адсорбция жылуы тұрақты, жылуөткізгіштік пен жылу сыйымдылық адсорбцияланған зат мөлшеріне тәуелді емес.

Математикалық модель энергияның сақталу теңдеуін және адсорбцияланған фазадағы массаның сақталу теңдеуін қамтиды.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_{th} \nabla^2 T + \frac{\dot{e}_{gen}}{\rho c_p}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = k(T)(q_{eq} - q)$$

Қатты адсорбент үшін энергия балансы (1) теңдеумен сипатталады. Адсорбциялық жұтылу жылдамдығы (2) теңдеуге сәйкес LDF (сызықтық қозғаушы күш) моделі негізінде алынған. Адсорбенттің жылуөткізгіштігі мен жылу сыйымдылығы температураға және адсорбция қарқынына тәуелді, себебі адсорбция процесі кезінде бірлік көлемнің құрамы өзгереді

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k_{LDF}(T)(q_{eq} - q) \quad (2)$$

Шекаралық шарттар:

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = h(T - T_\infty)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h(T - T_{\infty})$$

Бастапқы шарттар: $q|_{t=0} = 0$, $T|_{t=0} = T_{\infty}$.

Есептеу жұмыстары Python бағдарламалау тілінде айқын ақырлы айырымдық схемаларды қолдану арқылы жүргізілді. Модельдеу нәтижесінде температура өрісі, адсорбция жылдамдығы және адсорбциялық жұтылу қисықтары анықталып, алынған нәтижелер эксперименттік деректермен салыстырылды.

Кілтті сөздер: Белсендірілген көмір, адсорбция, адсорбент, адсорбат, осьтік симметрия, көмірқышқыл газы, сандық модельдеу.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35B06, 80A19

ӘДЕБИЕТ

[1] IEA The Future of Cooling. Opportunities for energy-efficient air conditioning, International Energy Agency, Paris (2018).

[2] 1. Берденова Б., Калтаев А. Review of adsorption and thermal characteristics of activated carbon and its application in ANG storage and ACS systems, *Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, **1**:2 (2017), 27–36.

[3] Берденова Б., Калтаев А. Review of adsorption and thermal characteristics of activated carbon and its application in ANG storage and ACS systems, *Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, **3**:2 (2017), 27–36.

[4] Verde M., Harby K., de Boer R., Corberán J.M. Performance evaluation of a waste-heat driven adsorption system for automotive air-conditioning: Part I – Modeling and experimental validation, *Energy*, **116**:2 (2016), 526–538.

[5] Ben-Mansour R., Habib M.A., Bamidele O.E., Basha M., Qasem N.A.A., Peedikakkal A., Laoui T., Ali M. Carbon capture by physical adsorption: Materials, experimental investigations and numerical modeling and simulations – A review, *Applied Energy*, **161**:2 (2016), 225–255.

[6] Yin G., Jameel Ibrahim Alazawi F., Mironov S., Reegu F., El-Shafay A.S., Lutfur Rahman M., Si C.H., Lu Y.Z., Chinh Nguyen H. Machine learning method for simulation of adsorption separation: Comparisons of models' performance in predicting equilibrium concentrations, *Arabian Journal of Chemistry*, **15**:3 (2022), 1878–3532.

СИПАТТАМАЛАРҒА НЕГІЗДЕЛГЕН АЙЫППҰЛДЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ӘДІСІМЕН КАНАЛДАҒЫ КӨПКОМПОНЕНТТІ ДЫБЫСТАН ЖОҒАРЫ ГАЗ АҒЫНЫН МОДЕЛЬДЕУ

Қ.А. ӨМІРТАЙ¹, А.О. БЕКЕТАЕВА²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹kukass_dylan@mail.ru, ²azimaras10@gmail.com

Каналда ішкі кедергі болған жағдайда көпкомпонентті газдың дыбыстан жоғары ағыны соққы толқындарының түзілуімен, шекаралық қабаттың қайта құрылуымен және қоспа компоненттерінің қайта бөлінуімен қатар жүреді.

Бұл жұмыста сфера тәрізді кедергісі бар каналда сығылатын көпкомпонентті газ қоспасының дыбыстан жоғары ағыны сандық түрде модельденеді. Тасымалдаушы газ фазасы Навье–Стокс теңдеулерімен, ал қоспа компоненттері газ қоспасының массалық концентрацияларын тасымалдау теңдеулерімен сипатталады; турбуленттілікті тұйықталған $k-\omega$ моделі арқылы есепке алу қарастырылған. Кедергінің әсерін ескеру үшін айыппұлдық функциялар әдісі қолданылады [1]: мұнда қатты дене аймағы дифференциалдық теңдеулерге қосымша мүшелер

енгізу арқылы беріледі, бұл сфера беті бойынша шекараны айқын тұрғызбай-ақ қарапайым торда есептеуге мүмкіндік береді. Дирихле, Нейман және Робин шекаралық шарттары дененің ішіне бағытталған сипаттамаларды ескере отырып құрылған гиперболалық айыппұлдық мүшелер арқылы беріледі. CBVP әдісінің маңызды қасиеті - айыппұл параметрі η арқылы қатені басқару мүмкіндігі, ал өтпелі шекара аймағындағы қателік $O(\eta)$ заңдылығы бойынша кемиді [2]. Есепті шешу үшін ENO схемасы жасалды. Негізгі теңдеулер жүйесі стандартты өлшемсіз түрге келтірілді.

Есептеулерде $Ma = 1.3$ және $Re = 10^3$ жағдайында сфераны көпкомпонентті дыбыстан жоғары ағынмен айналып өту қарастырылды. Сфера бетінде адиабаталық шекаралық шарт және сырғанау шарты берілді. Сандық модельдеу нәтижелері соққы толқынының турбуленттілік әсерінен бұзылмайтынын және турбуленттілік қарқындылығы жоғары болғанның өзінде соққы толқыны сфера алдында айқын байқалатынын көрсетті. Дене алдындағы аймақта соққы толқынынан кейін Мах саны төмендеп, шамамен 0.7 мәніне дейін азаяды. Сфера алдында шекаралық қабаттың түзілуі, сондай-ақ ағынның денені айналып өткен кезде жылдамдықтың артуы байқалады. Денеден ажырау аймағында құйындар мен турбулентті аймақтардың әсерінен жылдамдық өседі, одан кейін ағын біртіндеп тұрақтанады. Денеден алыстаған сайын құйындану аймағы сақталады. Соққы толқынының түзілуі дененің алдыңғы бөлігінде тығыздықтың артуына әкеледі. Сфера беті бойымен тығыздық біртіндеп төмендейді, бұл ағын параметрлерінің дене бойымен өзгеруімен және шекаралық қабаттағы тығыздықтың қайта бөлінуімен байланысты. Сфера алдында соққы толқынының өтуіне байланысты қысымның өсуі тіркеледі. Сфера беті бойымен қысым біртіндеп төмендейді, ал артқы бөлігінде қысымның күрт төмендеуі байқалады.

Жүргізілген талдау нәтижелері ұсынылған әдістің қарастырылған конфигурациялар диапозонында ағын физикасын сәтті сипаттайтынын көрсетті.

Кілтті сөздер: көпкомпонентті газ, дыбыстан жоғары ағын, сфера, Навье–Стокс теңдеулері, айыппұлдық функциялар әдісі.

ӘДЕБИЕТ

[1] Brown-Dymkoski E., Kasimov N., Vasilyev O.V. A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows, *Journal of Computational Physics*, **262** (2014), 344-357.

[2] Angot R., Bruneau C.-H., Fabrie P. A penalization method to take into account obstacles in viscous flows, *Numerische Mathematik*, **81** (1999), 497-520.

МЕТОД RANDOM FOREST ДЛЯ ПРОГНОЗА КОНЦЕНТРАЦИИ ЗОЛОТА

Н.А. ПІРІМЖАНОВ¹, Н.М. ТЕМИРБЕКОВ², С.Е. КАСЕНОВ³

^{1,2,3}Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

^{1,2,3}Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

¹pirimzhanov@gmail.com, ²temirbekov@rambler.ru, ³syrym.kasenov@gmail.com

В работе рассматривается задача прогнозирования концентрации золота в геологических точках на основе пространственных и геохимических признаков. Для предсказания использовалась база данных, включающая координаты, топографические характеристики и результаты кригинга радиоактивных элементов (^{238}U , ^{226}Ra , ^{232}Th). Особое внимание уделялось предобработке данных: числовые значения приводились к единому формату, пропуски заполнялись нулями, а высоко коррелированные признаки удалялись с сохранением координат для пространственной привязки. Пространственное разделение данных позволило выделить тренировочные точки и точки для прогноза. В качестве модели использовался алгоритм случайного леса (Random Forest) с 300 деревьями и стандартизацией признаков. Для оценки качества

модели применялся K -fold кросс-валидационный подход ($K = 5$), с вычислением R^2 , MAE и RMSE [1,2]. Анализ важности признаков выявил, что наиболее значимыми являются кригинг ^{238}U , долготы и плотности дренажа, что соответствует ожиданиям геохимической и геологической интерпретации. Прогнозирование позволило выделить 20% точек с наибольшей предсказанной концентрацией золота, которые могут быть приоритетными для дальнейших исследований и геологоразведки [3]. Визуализация результатов выполнена с использованием тепловых карт корреляций до и после удаления высоко коррелированных признаков, а также пространственных распределений прогнозируемых точек с повышенной концентрацией золота. Полученные результаты демонстрируют возможность использования ансамблевых методов машинного обучения для пространственного анализа и разведки минералов.

Финансирование: Данное исследование было профинансировано Научным комитетом Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан ((BR) № 27100483 «Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территории на основе анализа данных единой платформы недропользователей «Minerals.gov.kz» с применением искусственного интеллекта и методов дистанционного зондирования земли»).

Ключевые слова: машинное обучение, Random Forest, золото, пространственный прогноз.

2020 Mathematics Subject Classification: 62M30, 68T01

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The Elements of Statistical Learning*, Springer (2009).
- [2] Breiman L. Random Forests, *Machine Learning*, **45** (2001), 5–32.
- [3] Goovaerts P. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*, Oxford University Press, New York (1997), 496.

ПРОГРАММАЛАУДЫ ОҚЫТУДА ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ҚҰРАЛДАРЫН ҚОЛДАНУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Қ.Ж. САБРАЕВ¹, Е.Ы. БИДАЙБЕКОВ², Е.Х. ЖАБАЕВ³

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
k.sabraev@abaiuniversity.edu.kz

Аннотация. Мақалада программалауды оқытуда жасанды интеллект (ЖИ) құралдарын қолданудың ерекшеліктері мен педагогикалық мүмкіндіктері қарастырылады. ЖИ платформалары оқушыларға жеке оқу траекториясын құруға, тапсырмаларды дербестендіруге, қателерді түзетуге және кері байланыс алуға мүмкіндік береді. Педагогикалық эксперимент нәтижелері ЖИ қолданылған сабақтарда оқушылардың алгоритмдік ойлау, логикалық дағдылары және практикалық тапсырмаларды орындау сапасының артқанын көрсетті.

Қазіргі білім беру жүйесінің цифрлық трансформациясы оқыту әдістерін жаңартуды және жаңа технологияларды енгізуді талап етеді. Әсіресе информатика және программалау пәндерін оқыту барысында оқушылардың алгоритмдік және логикалық ойлау қабілеттерін дамыту маңызды міндеттердің бірі болып табылады. Программалау негіздерін меңгеру оқушылардың есептерді жүйелі түрде талдау, модельдеу және тиімді шешім қабылдау қабілеттерін қалыптастырады.

Дәстүрлі оқыту әдістерінде программалау тапсырмаларын орындау барысында мұғалімнің түсіндіруі мен тексеруіне көп уақыт жұмсалады. Бұл жағдай оқушылардың жеке ерекшеліктерін ескеруге және дербес оқу траекториясын ұйымдастыруға белгілі бір шектеулер қояды. Сондықтан білім беру процесіне жасанды интеллект технологияларын енгізу оқыту тиімділігін арттырудың маңызды бағыттарының бірі болып табылады.

Жасанды интеллект негізіндегі цифрлық құралдар оқу процесін автоматтандыруға, оқу материалдарын дербестендіруге және оқушылардың оқу нәтижелерін жедел талдауға мүмкіндік береді. Мұндай жүйелер программалау тапсырмаларын тексеру, қателерді анықтау және оқушыларға нақты ұсыныстар беру арқылы оқу процесін тиімді ұйымдастыруға көмектеседі [1].

Жасанды интеллект технологиялары білім беру саласында кеңінен қолданылып келеді. Программалауды оқыту барысында ЖИ құралдары бірнеше негізгі бағытта қолданылады.

Біріншіден, ЖИ оқушылардың жеке оқу траекториясын қалыптастыруға мүмкіндік береді. Интеллектуалды оқыту жүйелері әрбір оқушының білім деңгейін талдап, соған сәйкес тапсырмалар ұсына алады. Бұл тәсіл оқу материалын меңгеру қарқынын әр оқушының мүмкіндігіне бейімдеуге жағдай жасайды.

Екіншіден, ЖИ негізіндегі платформалар тапсырмаларды автоматты түрде тексеру қызметін атқарады. Программалау сабақтарында оқушылардың жазған кодтарын автоматты түрде тексеру мұғалімнің уақытын үнемдеп, оқушыларға жылдам кері байланыс алуға мүмкіндік береді. Сонымен қатар жүйе қателердің түрін анықтап, оларды түзету жолдарын ұсына алады.

Үшіншіден, ЖИ құралдары оқыту процесін интерактивті етуге ықпал етеді. Мысалы, интеллектуалды чат-ассистенттер немесе бағдарламалау тренажерлары оқушыларға күрделі есептерді кезең-кезеңімен шешуге көмектеседі. Мұндай жүйелер программалау логикасын түсіндіруде қосымша кеңесші ретінде қызмет атқара алады.

Төртіншіден, ЖИ технологиялары оқушылардың алгоритмдік ойлауын дамытуға жағдай жасайды. Интеллектуалды жүйелер тапсырмаларды күрделілік деңгейіне қарай ұсынып, оқушылардың біртіндеп күрделі алгоритмдерді меңгеруіне мүмкіндік береді.

Жасанды интеллект технологияларын қолдану оқыту процесінің сапасына бірнеше тұрғыдан әсер етеді. Ең алдымен, оқу процесінің дербестендірілуі оқушылардың өз бетімен білім алуына мүмкіндік береді. Әрбір оқушы өзінің білім деңгейіне сәйкес тапсырмалар орындап, оқу нәтижесін біртіндеп жақсарта алады.

Сонымен қатар ЖИ құралдары жедел кері байланыс беруді қамтамасыз етеді. Оқушылар тапсырманы орындағаннан кейін бірден нәтижесін көріп, жіберілген қателерді түзетуге мүмкіндік алады. Бұл тәсіл оқыту процесінің тиімділігін арттырып, оқушылардың оқу мотивациясын күшейтеді.

Педагогикалық зерттеулер көрсеткендей, ЖИ құралдарын қолдану оқушылардың программалау тапсырмаларын орындау сапасын арттыруға және олардың алгоритмдік ойлау қабілеттерін дамытуға ықпал етеді. Мұндай технологиялар оқыту процесінде практикалық дағдыларды қалыптастыруға және шығармашылық ойлауды дамытуға жағдай жасайды.

Жасанды интеллект технологияларын программалауды оқытуда қолдану білім беру процесін жетілдірудің тиімді бағыттарының бірі болып табылады. ЖИ құралдары оқу материалдарын дербестендіруге, тапсырмаларды автоматты тексеруге және оқушыларға жедел кері байланыс беруге мүмкіндік береді. Сонымен қатар мұндай технологиялар оқушылардың алгоритмдік және логикалық ойлау қабілеттерін дамытуға ықпал етеді.

Болашақта программалауды оқытуда жасанды интеллект негізіндегі интеллектуалды оқыту жүйелерін кеңінен енгізу білім беру сапасын арттыруға және оқушылардың цифрлық құзыреттіліктерін қалыптастыруға мүмкіндік береді.

Кілтті сөздер: жасанды интеллект, программалау, оқыту, педагогикалық технология, өз бетінше оқу, персонализация, алгоритмдік ойлау.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

[1] Nurbekova Z., Sagimbaeva A., Zhaksylykov A., Bidaibekov E. Potentsial i vyzovy ispolzovaniya GenAI v kontrole znaniy po programmirovaniyu, *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*, 8:5 (2025), 157–167.
DOI: 10.53894/ijirss.v8i5.8577.

РЕКОНСТРУКЦИЯ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ: ОТ КЛАССИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА К МЕТОДАМ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ В НИЗКОДОЗОВОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Н. САЙБЕКОВ¹, Е. КАЛДАРБЕК², М. КУДАЙБЕРГЕН³, А. АМРЕЕВА⁴

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.

Сатпаева, Алматы, Казахстан

Nurbolsajbekov@gmail.com

Компьютерная томография (КТ) остаётся одним из наиболее информативных методов медицинской визуализации, позволяющим восстанавливать трёхмерную структуру внутренних органов и тканей по набору двумерных проекций, полученных при прохождении рентгеновского излучения через тело пациента. Математической основой большинства алгоритмов реконструкции служит преобразование Радона, введённое И. Радоном в 1917 году. В двумерном случае прямое преобразование Радона определяется как

$$(Rf)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt, \quad (1)$$

где $f(x, y)$ — функция линейного коэффициента ослабления излучения, а (θ, s) — полярные координаты линии интегрирования.

Обратная задача — восстановление f по известным проекциям $p(\theta, s)$ — в идеальных условиях решается аналитически с помощью формулы Радона-инверсии или, на практике, алгоритмом фильтрованной обратной проекции (Filtered Back-Projection, FBP). FBP включает свёртку проекций с гаусс-фильтром $|\omega|$ в частотной области и последующую обратную проекцию.

Несмотря на высокую скорость и теоретическую точность при полном наборе данных (360° или $180^\circ + \text{fan-beam}$), классические аналитические методы обладают существенными ограничениями в реальных клинических условиях:

- сильная чувствительность к шуму (особенно Poisson-шум в низкодозовых режимах LDCT),
- выраженные артефакты от движения пациента (motion artifacts),
- streak-артефакты от металлических имплантов (beam hardening и металлические артефакты),
- потеря качества при ограниченном числе проекций (sparse-view CT) или ограниченном угловом диапазоне (limited-angle tomography).

В этих случаях задача реконструкции становится сильно некорректно поставленной (ill-posed), что приводит к размытию мелких деталей, появлению ложных структур и снижению диагностической ценности изображений.

С 2016–2017 годов методы глубокого обучения радикально изменили подход к решению задачи реконструкции КТ-изображений, особенно в низкодозовых режимах. Основные классы современных подходов включают:

1) Постобработку (post-processing): применение свёрточных нейронных сетей (U-Net, DnCNN, ResNet-based denoisers) к результату FBP для удаления шума и артефактов. Этот подход наиболее широко внедрён в коммерческих системах (TrueFidelity от GE, AiCE от Canon, DeepIR и др.).

2) Обработку в домене синограмм: denoising проекций перед реконструкцией.

3) Гибридные итеративные методы с обучением: разворачивание классических итеративных алгоритмов в слоистые сети. Один из наиболее эффективных — Learned Primal-Dual (LPD):

$$\begin{aligned} h^{k+1} &= h^k + \alpha^k \cdot \text{CNN}_\theta(h^k, R^T(p - Rg^k)), \\ g^{k+1} &= g^k + \beta^k \cdot \text{CNN}_\phi(g^k, Rh^{k+1}), \end{aligned} \quad (2)$$

где h^k — промежуточное изображение (primal), g^k — оценка в домене данных (dual), R и R^T — оператор Радона и обратный ему.

4) Полностью end-to-end сети: прямое отображение проекций в изображение (AUTOMAP, Radon inversion via DL).

5) Безнадзорные и physics-informed подходы: использование физических ограничений в функции потерь, например:

$$\mathcal{L} = \|Rf_\theta - p\|_2^2 + \lambda_1 \|\nabla f_\theta\|_1 + \lambda_2 \mathcal{L}_{\text{physics}}(f_\theta), \quad (3)$$

где $\mathcal{L}_{\text{physics}}$ учитывает известные физические свойства тканей или уравнения распространения излучения.

Обученные на миллионах парных наборов данных (low-dose $\leftrightarrow$ full-dose) нейронные сети позволяют снижать эффективную дозу облучения на 40–70% при сохранении или даже улучшении диагностической информативности. Они эффективно устраняют артефакты движения и металла, восстанавливают мелкие структуры (например, лёгочную паренхиму), а также ускоряют реконструкцию в десятки раз по сравнению с традиционными итеративными методами (MBIR, ASD-POCS).

В условиях Казахстана, где количество КТ-исследований ежегодно растёт, а вопросы радиационной безопасности населения остаются приоритетными, разработка и адаптация методов научного искусственного интеллекта для задач медицинской томографии открывает перспективы создания локальных алгоритмов, оптимизированных под региональные особенности данных и клинические протоколы.

Ключевые слова: преобразование Радона, компьютерная томография, низкодозовая КТ, глубокое обучение, Learned Primal-Dual, некорректно поставленные задачи, physics-informed neural networks.

2020 Mathematics Subject Classification: 92C55, 65R32, 68T07, 44A12, 65F22.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kuchment P. The Radon Transform and Medical Imaging. SIAM, Philadelphia, 2013.
- [2] Adler J., Öktem O. Learned Primal-Dual Reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 37(6):1322–1332, 2018.
- [3] Koetzier L.R. et al. Deep Learning Image Reconstruction for CT: Current Status and Future Directions. *Radiology: Artificial Intelligence*, 5(2):e220134, 2023.
- [4] Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation. *MICCAI*, 2015.
- [5] Xu S. et al. Deep Radon Prior: Unsupervised Sparse-View CT Reconstruction. arXiv preprint, 2025.

О ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ С УСЛОВИЯМИ СТЕФАНА

Ж.О. ТАХИРОВ¹, Б.Б. АНВАРЖОНОВ²

^{1,2}Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

¹prof.takhirov@yahoo.com, ²bunyodbek.anvarjonov@bk.ru

Точное решение системы дифференциальных уравнений, связанных с движущимися неизвестными границами, всегда представляет собой сложную задачу, хотя такие системы широко применяются для описания многих физических/биологических явлений, таких как динамика распространения популяций. Цель данной заметки — представить некоторую информацию в рамках общей структуры для решения таких систем с движущимися свободными границами. Основная численная задача заключается в отслеживании движущихся свободных границ, особенно для больших пространственных размерностей. Мы рассматриваем уравнения реакции

диффузии на изменяющейся области вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} - D\Delta U = f(U) \quad \text{для } x \in \Omega(t), \quad t > 0, \quad U = 0 \quad \text{для } x \in \partial\Omega(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Предполагается, что нелинейная функция $f(U)$ является функцией класса C^1 , удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, и в литературе ее часто принимают за логистическую функцию $f(U) = U(a - bU)$ с положительными константами a и b . Эволюция движущейся области $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^N$, или, точнее, ее границы $\partial\Omega(t)$, определяется условием Стефана для одной фазы, которое в случае, когда $\partial\Omega(t)$ является многообразием C^1 в $\mathbb{R}^N$, может быть описано следующим образом:

Любая точка $x \in \partial\Omega(t)$ движется со скоростью $\mu|\nabla_x U(t, x)|n(x)$, где $n(x)$ — единичная внешняя нормаль к $\Omega(t)$ в точке x , а μ — заданная положительная константа.

Подобная задача со свободной границей была впервые представлена в [1] в одном пространственном измерении как модель распространения инвазивного или нового вида с плотностью популяции $U(t, x)$, фронт распространения которого представлен свободной границей.

Численные методы для 2D модели с радиальной симметрией

Для решения 2D диффузионной логистической модели в полярных координатах систему можно записать как:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right) = U(a - bU), \quad t > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r > 0, \quad (2)$$

где $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Omega(t)$.

Мы предполагаем, что окружающая среда и решение радиально симметричны, т.е. мы задаем начальную область Ω_0 как диск, начальную функцию $U_0(x)$ радиально симметричную, движущуюся границу $\partial\Omega(t)$ как окружность, радиус которой мы обозначаем $H(t)$, и решение $U(t, r, \theta) = U(t, r)$, двумерную диффузионную логистическую модель с радиальной симметрией можно записать как одномерную диффузионную логистическую модель

$$\frac{\partial U}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) = U(a - bU), \quad t > 0, \quad 0 < r < H(t), \quad (3)$$

вместе с граничными условиями

$$\frac{\partial U}{\partial r}(t, 0) = 0, \quad U(t, H(t)) = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

условие Стефана

$$H'(t) = -\mu \frac{\partial U}{\partial r}(t, H(t)), \quad t > 0, \quad (5)$$

и начальные условия

$$H(0) = H_0, \quad U(0, r) = U_0(r), \quad 0 \leq r \leq H(0). \quad (6)$$

Здесь мы расширяем идеи [2] для одномерного случая на двумерную систему с радиальной симметрией. Сведем одномерную диффузионную логистическую модель (3)-(6) в задачу с фиксированной областью $[0, 1]$ при помощи преобразования Ландау [3]

Ключевые слова: Реакции-диффузия, условия Стефана, свободная граница.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K15, 35K57.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Du, Y., and Lin, Z. *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*, SIAM Journal on Mathematical Analysis (2010), 42(1), 377-405.

[2] Piqueras, M.-A., Company, R., Jodar, L. *A front-fixing numerical method for a free boundary nonlinear diffusion logistic population model*, Journal of Computational and Applied Mathematics (2017), 309, 473-481.

[3] Landau, H. G. *Heat conduction in a melting solid*, Quarterly of Applied Mathematics (1950) 8(1), 81-94.

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА–БРИНКМАНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Н.М. ТЕМИРБЕКОВ¹, А. КЕРИМАКЫН²

¹Факультет механики и математики, КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

²Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

¹temirbekov@rambler.ru, ²ainurkerim2002a@gmail.com

1.1. Постановка задачи

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической области

$$\Omega = \{(x, \theta, r) \mid 0 < x < L, 0 < \theta < 2\pi, 0 < r < f(x)\},$$

где x — продольная координата, θ — угловая координата, r — радиальная координата.

Движение жидкости в пористой среде описывается уравнениями Навье–Стокса–Бринкмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - k(x, r) \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$ — вектор скорости, p — давление, $\mu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{f} = (f_x, f_\theta, f_r)$ — внешняя сила, $k(x, r) \geq 0$ — коэффициент проницаемости пористой среды.

Задача дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} x = 0, 0 < r \leq r_0, 0 < \theta < 2\pi : \quad u_x &= g(r), \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \\ 0 \leq x \leq L, r = f(x), 0 < \theta < 2\pi : \quad u_x &= g(r), \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \\ x = L, r = 0 : \quad \frac{\partial u_x}{\partial r} &= 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение. Функция $\mathbf{u} \in V$ называется слабым решением задачи (1)–(2), если для любой тестовой функции $\varphi \in V_0$ и $q \in Q$ выполняется интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right) dt - \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \varphi) dt - \int_0^T (p, \nabla \cdot \varphi) dt \\ + \int_0^T (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) dt + \mu \int_0^T (\nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi) dt + \int_0^T k(\mathbf{u}, \varphi) dt \\ = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

В работе рассматривается математическое и численное моделирование осесимметричного течения несжимаемой вязкой жидкости в криволинейном канале, состоящем из свободной и пористой областей. Начально–краевая задача сформулирована в вариационной форме, а существование слабого решения рассматривается в пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса–Бринкмана, цилиндрические координаты, слабое решение, метод конечных элементов.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 65M60, 76D05

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ладыженская О.А. *Математические задачи динамики вязких несжимаемых жидкостей*, Наука, Москва, 1970.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЕ FEniCS

Н.М. ТЕМИРБЕКОВ¹, А.К. МУРАТОВА²

^{1,2}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
aluamuratova1@gmail.com

В работе рассматривается численное моделирование двумерного нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Математическая модель основана на уравнениях Навье–Стокса в безразмерной форме [1].

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости, p — давление, Re — число Рейнольдса. Задача дополняется начальными и граничными условиями, соответствующими постановке течения в ограниченной области.

Численное решение строится в рамках слабой постановки задачи. Найти $\mathbf{u}(t) \in V$ и $p(t) \in Q$ такие, что для любых тестовых функций $\mathbf{v} \in V$ и $q \in Q$ при почти всех $t > 0$ выполняется интегральное тождество

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)$.

Дискретизация слабой задачи по пространству осуществляется методом конечных элементов на основе устойчивых пар конечных элементов, удовлетворяющих условию Ладыженской–Бабушки–Бреззи. Полученная полудискретная задача по времени решается с использованием неявной схемы, обеспечивающей устойчивость вычислительного алгоритма. Численная реализация вычислительных алгоритмов осуществлена с использованием платформы FEniCS.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, метод конечных элементов, слабая постановка.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 65M60, 76D05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ладыженская О.А. *Математические задачи динамики вязких несжимаемых жидкостей*, Наука, Москва (1970).
- [2] E. Erturk, T. Allahviranloo, Bifurcation and multiplicity of solutions of the Navier–Stokes equations in driven semi-elliptical cavity flow, *Mathematics*, 2022, Vol. 10, No. 22, Article 4242. DOI: 10.3390/math10224242.
- [3] D. Lomasov, P. Vabishchevich, Iterative solutions of incompressible fluid flow in a lid-driven cavity at large Reynolds numbers, in: *Current Problems of Applied Mathematics and Computer Systems (CPAMCS 2024)*, Lecture Notes in Networks and Systems, Vol. 1585, Springer, Cham (2025).

АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ ПОЛНОСВЯЗНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ С ОБРАТНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ОШИБКИ

Н.М. ТЕМИРБЕКОВ¹, О.Д. ГАВРИЛЕНКО², Б.Б. ХУДАЙБЕРГЕН³,
Л.Н. ТЕМИРБЕКОВА⁴, З.И. СЕЙТМУРАТОВА⁵

^{1,2,3,5}Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

⁴Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы,
Казахстан

Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

ntemirbekov314@gmail.com

Применение нейронных сетей в геологии помогает ускорить процесс исследований, повысить точность и надёжность результатов и снизить затраты на проведение геологических работ. Нейросети способны анализировать огромные массивы геофизических, геохимических и геологических данных, которые человеку сложно обработать вручную, и выявлять закономерности для поиска новых месторождений. В современных проектах на первом месте стоят ГИС-технологии, затем 3D-моделирование геологических структур, искусственный интеллект, дистанционное зондирование Земли, анализ больших геологических данных (Big Data), включая многопараметрическую геостатистику.

Преимущества искусственного интеллекта в геологических задачах — это автоматизация и скорость анализа больших данных, повышение точности: модели способны выявлять тонкие зависимости и корреляции, незаметные человеческому глазу, мультидисциплинарность: ИИ интегрирует данные из разных источников (геология, геофизика, дистанционное зондирование и др.).

Типы нейронных моделей, используемых в геологии: CNN (Convolutional Neural Networks) для обработки изображений (спутниковые снимки, карты изменений минералогии), RNN / LSTM (Recurrent Neural Networks) для анализа временных рядов (сейсмические сигналы), глубокие нейронные сети (DNN) для решения прогнозных задач и регрессии (оценка свойств пород), Random Forest/Ensemble - методы для поиска мест с повышенным минералогическим потенциалом.

Искусственный интеллект помогает обрабатывать геологические данные быстрее, точнее выявлять закономерности и снижать риски принятия решений. Несмотря на достижения, существуют и ограничения: нехватка качественно размеченных данных для обучения моделей в некоторых областях, необходимость адаптации моделей под региональные особенности геологии, интерпретация результатов ИИ (объяснимость моделей) ещё остаётся сложной задачей при принятии решений в полевых условиях.

В работе [1] приведён общий обзор развития машинного обучения в геологических науках.

В данной работе рассматривается полносвязная нейронная сеть с обратным распространением ошибки. В рассматриваемом алгоритме есть три этапа: прямое распространение (*Forward*), обратное распространение (*Backward*) и обновление обучаемых параметров (*Update*). В результате прямого распространения находится ошибка $E(\Omega^t)$. На этапе обратного распространения, используя ошибку $E(\Omega^t)$, нужно найти вектор градиента $\frac{\partial E}{\partial \Omega}(\Omega^t)$. Далее обновляются обучаемые параметры.

$$\Omega^{t+1} = \Omega^t - \alpha \frac{\partial E}{\partial \Omega}(\Omega^t)$$

Приведены математические выводы формул для определения вектора градиента. По известным данным $\frac{\partial E}{\partial h} = \left[\frac{\partial E}{\partial h_1}, \frac{\partial E}{\partial h_2}, \frac{\partial E}{\partial h_3} \right]$ последовательно определяется градиент $\frac{\partial E}{\partial w}$ в виде матрицы, $\frac{\partial E}{\partial b}$ — вектор-строка. Градиент по входу $\frac{\partial E}{\partial x}$ — вектор-строка — нужен, чтобы протащить градиент к предыдущему слою. В выводах формул используется правило дифференцирования сложной функции.

Использование вычислительных графов позволило наглядно представить процесс распространения сигналов и ошибок в нейронной сети, а также упростить реализацию алгоритма обучения. В докладе будет изложен переход от математических основ и знаний к разработке алгоритмов для построения моделей. Для программного кода машинного обучения и ИИ

используется язык *Python* со следующими библиотеками:

— *scikit-learn* — базовая библиотека для классических алгоритмов ML (регрессия, классификация, кластеризация и др.), часто используется в геологических исследованиях как базовый слой перед глубоким обучением.

— *EarthML* — проект с примерами Python-инструментов и практик машинного обучения для задач наук о Земле (Earth science), включая обработку данных LiDAR, спутниковых снимков и др.

— Библиотека машинного обучения *TensorFlow* — широко применяется для анализа больших данных. В геологии она используется для обработки сейсмички, интерпретации разрезов, прогнозирования месторождений и анализа спутниковых снимков.

Будут продемонстрированы программные коды машинного обучения методами опорных векторов, случайный лес, гауссовская классификация процессов, глубокая нейронная сеть на реальных геологических данных. Результаты машинного обучения по входным данным рельефа местности, геохимии, геофизики, дистанционного зондирования Земли представлены в виде таблиц, графиков и изолинии.

Данная работа выполняется по проекту программно-целевого финансирования.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR27100483 «Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территорий на основе анализа данных Единой платформы недропользователей "Minerals.gov.kz"»).

Ключевые слова: нейронные сети, backpropagation, градиентный спуск, машинное обучение в геологии, анализ геоданных, прогнозирование месторождений.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dramsch J.S. 70 years of machine learning in geoscience in review. *In Machine Learning in Geoscience*, 1 pages 1-55. Elsevier, 2020.
URL: <https://doi.org/10.1016/bs.agph.2020.08.002>,

ИНТЕГРАЦИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ОБУЧАЮЩИХ СИСТЕМ В ПРЕПОДАВАНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В МНОГОЯЗЫЧНОЙ СРЕДЕ: ОПЫТ И КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ

А.М. ТЛЕУЛЕСОВА

Казахский национальный университет им. аль Фараби, Алматы, Казахстан

aigerimtleulessova@gmail.com

Современные процессы цифровизации и интернационализации высшего образования требуют внедрения интеллектуальных информационных технологий в преподавание математических дисциплин. Особую актуальность приобретают две проблемы: рост академической недобросовестности, связанный с использованием генеративных языковых моделей (LLM), и трудности адаптации иностранных студентов в многоязычной образовательной среде.

Целью работы является разработка и апробация методологии интеграции интеллектуальных обучающих систем (ИОС) в курс высшей математики с использованием технологий искусственного интеллекта и адаптивного обучения.

Предложенная методология основана на принципе поэтапного контроля решения. В отличие от традиционной проверки конечного ответа, система требует ввода промежуточных шагов, анализирует используемые методы и выявляет попытки применения неизученных алгоритмов. Это позволяет оценивать уровень понимания материала и снижать возможность некорректного использования внешних AI-инструментов.

Вторая задача связана с адаптацией иностранных студентов. Разработана модель многоязычной поддержки, включающая дистанционное начало обучения, использование универсального математического языка символов и предоставление дополнительных материалов на родных языках. Такой подход позволяет сократить период адаптации и обеспечить равные образовательные возможности. Экспериментальная апробация методики проводилась в группах первого курса ($n = 86$). Получены следующие количественные результаты:

- доля полностью самостоятельных решений увеличилась с 58% до 82%;
- средний балл по текущему контролю вырос на 18%;
- количество типичных концептуальных ошибок снизилось на 35%;
- время проверки работ преподавателем сократилось на 40%;
- среди иностранных студентов доля успешно освоивших базовые темы к 4-й неделе увеличилась с 52% до 79%.

Полученные результаты подтверждают, что использование интеллектуальных обучающих систем позволяет реализовать персонализированные образовательные траектории, повысить качество усвоения математического материала и снизить нагрузку на преподавателя. В условиях широкого распространения искусственного интеллекта предложенный подход способствует формированию академической честности и трансформирует роль преподавателя от лектора к наставнику и проектировщику образовательной среды.

Эффективность обучения оценивалась с использованием интегрального показателя

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i^{post} - S_i^{pre}),$$

где S_i^{pre} и S_i^{post} — результаты входного и итогового контроля соответственно. Получено значение $E = 0.18$, что соответствует увеличению среднего уровня успеваемости на 18%.

Разработанная методология может быть внедрена в образовательные программы технических и естественно-научных направлений и использована при цифровой трансформации математического образования.

Ключевые слова: интеллектуальные обучающие системы, высшая математика, искусственный интеллект в образовании, адаптивное обучение, многоязычная среда, академическая честность.

2020 Mathematics Subject Classification: 97C80, 68T01

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Каснеци Э., Сесслер К., Кюхеманн С. и др. ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education *Learning and Individual Differences*, **2023**. – Vol. 103. – 102274.
- [2] Коттон Д., Коттон П., Шипуэй Дж. Chatting and cheating? Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT *Assessment & Evaluation in Higher Education*, **2024**.
- [3] Завицки-Рихтер О., Бонд М., Беденлиер С. Искусственный интеллект в высшем образовании: современное состояние и тенденции развития *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, **2024**.

ПРОГНОЗНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИТИЕВОЙ МИНЕРАЛИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ГЕОДАННЫХ И МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В КАЛБА-НАРЫМСКОЙ МЕТАЛЛОГЕНИЧЕСКОЙ ЗОНЕ

Л.Н. ТЕМИРБЕКОВА¹, О.Д. ГАВРИЛЕНКО², Н.М. ТЕМИРБЕКОВ³

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

²Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

³Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

laura.tem.2020@gmail.com

В работе выполнено прогнозирование пространственного распределения литиевой минерализации на основе интеграции геохимических и геофизических данных с применением методов машинного обучения и геостатистического анализа. В качестве входных параметров использованы результаты геохимических исследований, геохимические отношения элементов, радиометрические показатели (K, Th, U), а также данные гравитационных и магнитных аномалий. Для моделирования были применены методы Random Forest (RF), Gaussian Process Regression (GPR) и Empirical Bayesian Kriging (EBK). Все модели обучались и тестировались на едином наборе данных, что обеспечило корректность их сопоставления. Пространственное прогнозирование выполнялось на регулярной сетке с шагом 3 км.

Сравнительный анализ результатов моделирования показал различия в точности и характере пространственного распределения прогнозируемых значений лития. Наиболее высокое значение коэффициента детерминации продемонстрировала модель RF ($R^2 = 0.736$) при наименьшей среднеквадратичной ошибке (RMSE = 10.387 ppm), что свидетельствует о высокой способности алгоритма выявлять нелинейные зависимости между геофизическими и геохимическими признаками. Геостатистический метод EBK также показал высокую согласованность с наблюдаемыми значениями ($R^2 = 0.720$, RMSE = 10.589 ppm) и хорошо воспроизвел пространственное распределение концентрации лития, учитывая пространственную автокорреляцию исходных данных. Модель GPR характеризуется несколько меньшими значениями точности ($R^2 = 0.677$, RMSE = 11.279 ppm), однако формирует более сглаженную прогнозную поверхность и позволяет количественно оценивать неопределённость прогноза. В целом результаты сравнения показывают, что RF наиболее эффективно выявляет локальные аномалии литиевого обогащения, тогда как EBK и GPR лучше отражают региональные закономерности пространственного распределения показателя.

В пределах исследуемой территории выделены пять прогнозных участков, перспективных на выявление литиевого оруденения: Восточно-Калбинский, Центрально-Калбинский, Есерский, Пролетарский и Ковалевский. Полученные результаты подтверждают эффективность интеграции методов машинного обучения и геостатистических подходов при прогнозировании редкометальной минерализации и могут быть использованы при планировании дальнейших геологоразведочных работ.

Финансирование: Данное исследование было профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ПЦФ BR27100483 “Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территории на основе анализа данных единой платформы недропользователей “Minerals.gov.kz” с применением искусственного интеллекта и методов дистанционного зондирования Земли”)

Ключевые слова: Li (литий), геоданные, методы машинного обучения, Калба-Нарымская металлогеническая зона, метод случайного леса, метод регрессии гауссовского процесса, метод эмпирического байесовского кригинга.

2020 Mathematics Subject Classification: 62H30, 62M30

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mahboob M., Celik T., Genc B. Review of Machine Learning-Based Mineral Resource

Estimation, *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 2022. , vol. 122. pp. 655–664.

[2] Emmanuel J. M. Carranza Geochemical anomaly and mineral prospectivity mapping in GIS. *Handbook of exploration and environmental geochemistry* , Elsevier, Volume 11, City (2008), 347 p.

[3] Alfuqara D. A., Al-E bayat M. S., Alsaaidh A. S., and Al Dwairi R. A. Sustainable Exploration of Critical Minerals: Integrated Magnetotelluric and Gravity Surveys for Lithium Pegmatite Targeting , *International Journal of Environmental Sciences*, 11(24s), 1700, (2025). <https://theaspd.com/index.php>

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Ж.С. ТУТКУШЕВА¹, Х.Т. ОТАРОВ²

^{1,2}Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан

¹zhailan_k@mail.ru, ²khassenotar@mail.ru

Работа посвящена применению детерминированного метода глобальной оптимизации, основанного на использовании вспомогательной функции, связанной с исходной целевой функцией посредством интегрального преобразования, к задаче оценки параметров нелинейной регрессии с квадратичной функцией потерь.

Рассмотрим нелинейную двумерную регрессионную модель относительно параметров θ_1, θ_2 :

$$y = \theta_1 \sin(\theta_2 x), \quad (1)$$

где $(\theta_1, \theta_2) \in E \subset \mathbb{R}^2$, $E = [\theta_1^{\min}, \theta_1^{\max}] \times [\theta_2^{\min}, \theta_2^{\max}]$, для которой функция потерь наименьших квадратов имеет вид

$$L(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 \sin(\theta_2 x_i))^2. \quad (2)$$

Функция $L(\theta_1, \theta_2)$ является неотрицательной, непрерывной и, вообще говоря, многоэкстремальной по параметру θ_2 , что делает задачу поиска глобального минимума нетривиальной для стандартных градиентных методов. Требуется найти глобальный минимум

$$\hat{\alpha} = \min_{(\theta_1, \theta_2) \in E}^{\text{glob}} L(\theta_1, \theta_2). \quad (3)$$

Ясно, что компактность множества E и непрерывность функции $L(\theta_1, \theta_2)$ обеспечивают существование глобального минимума. Функция $L(\theta_1, \theta_2)$ может быть невыпуклой и многоэкстремальной, что характерно для широкого класса прикладных задач, включая задачи оценки параметров нелинейных моделей.

Целью настоящей работы является применение ранее разработанного авторами детерминированного метода, позволяющего вычислять значение глобального минимума $\hat{\alpha}$ без перебора многомерного пространства параметров и использования стохастических процедур, к минимизации многоэкстремальных функций потерь.

Введем соответствующую целевой функции $L(\theta_1, \theta_2)$ вспомогательную функцию одной переменной $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$g_m(L(\theta_1, \theta_2), \alpha) = \int_{-4}^4 \int_{-4}^4 (|L(\theta_1, \theta_2) - \alpha| - L(\theta_1, \theta_2) + \alpha)^m d\theta_2 d\theta_1, \quad m > 1. \quad (4)$$

Согласно теореме из работы [1], глобальный минимум функции потерь (2) совпадает с точной верхней гранью нулей вспомогательной функции (4). Таким образом, задача минимизации функции потерь модели сводится к нахождению «наибольшего нуля»

$$\hat{\alpha} = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R} : g_m(L(\theta_1, \theta_2), \alpha) = 0 \} \quad (5)$$

функции (4) без вычисления градиентов.

При этом значения функции $g_m(L(\theta_1, \theta_2), \alpha)$, представленной в виде кратного интеграла, определяются численно. Для этого могут быть использованы методы Монте-Карло, а также эффективные кубатурные формулы, в частности формулы Соболева.

Так как функция $g_m(L(\theta_1, \theta_2), \alpha)$ зависит только от одной переменной и является выпуклой, то для нахождения точной верхней грани её нулей можно воспользоваться такими стандартными методами, как метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Ньютона, обеспечивающими заданную точность определения искомого значения $\hat{\alpha}$.

В данном случае для поиска точной верхней грани нулей функции (4) использован метод дихотомии, а для вычисления кратного интеграла — кубатурные формулы Соболева [2], реализованные на языке программирования Visual Studio.

Эффективность предложенного метода продемонстрирована на нелинейной регрессионной модели с двумя параметрами. Результаты численных экспериментов подтверждают, что даже в случае сильно многоэкстремальных функций потерь метод позволяет надёжно определять значение глобального минимума, а также локализовать области параметров, содержащие глобальные минимумы. Использование кубатурных формул Соболева и одномерных методов поиска корня обеспечивает практическую реализуемость алгоритма и заданную точность.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP25794821).

Ключевые слова: глобальная оптимизация, нелинейная регрессия, квадратичная функция потерь, вспомогательная функция, детерминированные алгоритмы.

2020 Mathematics Subject Classification: 90C26, 62F30, 65K05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tutkusheva Zh.S., Kazbekova G.N., Seilkhanova R.B., Kairakbaev A.K. Wegstein's method for calculating the global extremum, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, **9:2** (2022), 405–410.
- [2] Ramazanov M.D. Theory of lattice cubature formulas with a bounded boundary layer, *Ufa Mathematical Journal*, **2:3** (2010), 63–82.

БОЛАШАҚ ИНФОРМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІНІҢ ІОТ САЛАСЫНДАҒЫ ҚҰЗЫРЕТТЕРІН ҚАЛЫПТАСТЫРУ ҚҰРАЛЫ РЕТІНДЕ ІОТ BOARD БІЛІМ БЕРУ ЖИНАҒЫ НЕГІЗІНДЕ «АҚЫЛДЫ ҮЙ» ЭЛЕКТРОНДЫҚ ПРАКТИКУМЫН ӘЗІРЛЕУ

Ш.П. ТҰРАШОВА¹, З.Н. ДАУБАЕВ²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹sturashova@gmail.com, ²shturashova@gmail.com

Аннотация. Зерттеудің өзектілігі мектеп информатика курсына «Заттар интернеті» (ІОТ) бөлімінің енгізілуімен анықталады. Бұл информатика мұғалімінен тек техникалық білімді ғана емес, сонымен қатар ІОТ оқыту процесін тиімді ұйымдастыруға арналған арнайы әдістемелік құзыреттіліктерді де талап етеді. Мақалада ІОТ саласындағы электрондық практикумның ғылыми негіздемесі және практикалық жүзеге асырылуы ұсынылған, практикум арнайы ІОТ Board білім беру жинағы негізінде әзірленген.

Зерттеудің мақсаты болашақ информатика мұғалімдерінде мектепте ІОТ тақырыбын оқытуға дайындық қалыптастыруға бағытталған практикумнің құрылымы мен мазмұнын жобалау. Зерттеудің әдістемелік негізін білім берудегі құзыреттілік және іс-әрекеттік тәсілдер, сондай-ақ Интернет заттары идеяларымен үйлесімді таралған оқыту концепциясы құрайды.

Нәтиже ретінде практикумның модульдік құрылымы ұсынылған және мұғалімде қалыптасатын құзыреттіліктердің толық тізімі егжей-тегжейлі сипатталған. ІОТ Board жинағымен

жұмыс жасау ерекшелігі мен оның педагогты даярлаудағы маңызы айқындалған. Алынған нәтижелер педагогикалық жоғары оқу орындарының оқу бағдарламаларын жобалауда қолданылуы мүмкін.

Кіріспе. Қазіргі мектеп цифрлық дәуірдің жаңа талаптары мен сын-қатерлеріне белсенді түрде бейімделуде. Информатика курсының мазмұнына «Заттар интернеті» бөлімін енгізу – жай ғана заманауи үрдіске ілесу емес, бүгінгі күннің өзекті қажеттілігі болып табылады, себебі IoT-технологиялар тұрмыстық және өндірістік салалардың ажырамас құрамдас бөлігіне айналды. Білім беру мазмұнындағы кез келген технологиялық жаңару мұғалімнің соған сәйкес кәсіби және әдістемелік даярлығын қамтамасыз етуді талап етеді. Алайда, технологияның қарқынды дамуына қарамастан, болашақ информатика мұғалімдерін IoT саласында даярлау үдерісі әлі де фрагментті болып қала береді және көбінесе жалпы теориялық мәліметтермен шектеледі. [1].

Қолданыстағы білім беру шешімдері, мысалы, техникалық мамандықтар студенттеріне арналған «Заттар интернетінің технологиялық негіздері» практикумы немесе «ЙоТик М2 ақылды үй» жинағы негізінен инженерлік даярлыққа бағытталған. Аталған шешімдер педагогикалық қызметтің спецификасын толыққанды ескермейді, себебі мұнда басты міндет технологияны игерумен шектелмей, оны мектеп оқушыларына тиімді трансляциялауға бағытталған әдістемелік құзыреттілікті қалыптастыруды көздейді.

Аталған мәселені шешу мақсатында бір баспа платасына біріктірілген және оқыту үдерісіне қажетті барлық құралдарды қамтитын IoT Board білім беру жинағы әзірленді. Жинақтың техникалық мүмкіндіктері (Arduino/ESP микроконтроллерлерінің, датчиктер мен актуаторлардың, Wi-Fi модулінің болуы) мектеп информатика курсына «Заттар интернеті» бөлімінің негізін құрайтын «Ақылды үй» тақырыбын меңгеру міндеттеріне толық сәйкес келеді және қауіпсіздік мақсатында қысқа тұйықталудан қорғау жүйесімен жабдықталған. Алайда жабдықтың болуы – табыстың тек бір бөлігі ғана. «Темір» мен болашақ информатика мұғалімінің кәсіби қызметі арасындағы дидактикалық көпір қызметін атқаратын, мұқият құрылымдалған электрондық практикум қажет.

Бұл зерттеудің мақсаты – болашақ информатика мұғалімдерінің мектепте IoT тақырыбын оқытуға әдістемелік және кәсіби даярлығын қалыптастыруға бағытталған практикумнің құрылымы мен мазмұнын теориялық негізде отырып әзірлеу болып табылады.

Зерттеу әдістері. Зерттеу мақсатына жету үшін келесі кешенді әдістер қолданылды: IoT оқыту мәселелері бойынша ғылыми-әдістемелік әдебиеттер мен нормативтік-құқықтық құжаттаманы теориялық тұрғыдан талдау, IoT Board оқу жинағының техникалық мүмкіндіктерін зерттеу, практикум құрылымы мен болашақ информатика мұғалімінің IoT саласындағы кәсіби құзыреттіліктерін модельдеу.

Нәтижелер. Практикум модульдік құрылымға ие болып, IoT жүйесін жобалаудың барлық кезеңдерін қамтитын, логикалық түрде байланысты модульдерден тұрады. Әрбір модуль нақты оқу міндеттерін шешіп, студентті келесі модульге және практикалық жобалау кезеңдеріне дайындайды. Бұл зерттеудің басты ғылыми нәтижесі тек зертханалық жұмыстардың тізбесін ұсынумен шектелмей, олардың жүзеге асырылуы болашақ мұғалімдерге басқа тәсілдермен дамытылуы мүмкін емес ерекше кәсіби құзыреттіліктерді қалыптастыратынын дәлелдейді (1-кесте).

Дидактикалық принциптерге сәйкес әзірленген және озық техникалық шешімдерді ескере отырып, электронды практикум инженерия, бағдарламалау және педагогика қиылысында жұмыс істей алатын жаңа типтегі мұғалімнің кәсіби қалыптасу құралдарының бірі ретінде әрекет етеді. Болашақ зерттеу перспективалары осы практикумді педагогикалық жоғары оқу орнының нақты оқу процесінде апробациялау, сондай-ақ IoT саласында қалыптасқан кәсіби және әдістемелік құзыреттіліктер деңгейін бағалайтын диагностикалық жүйені әзірлеу арқылы жалғасады.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылды (Грант № AP23490844).

Түйін сөздер: Заттар интернеті (IoT), информатика мұғалімдерін даярлау, ақылды үй, IoT Board білім беру

Таблица 1: Практикум негізінде қалыптасатын болашақ информатика мұғалімінің құзыреттіліктер матрицасы

	Құзыреттіліктер	Тапсырмалар мысалында практикумда қалай қалыптасады
пәндік	Микроконтроллерлер негізінде аппараттық-бағдарламалық кешендерді жобалау және жөндеу қабілеті	Макет тақтасында схемаларды құрастыру, датчиктер мен реле үшін код жазу, қосылу және кодтағы қателерді түзету.
	Желілік технологиялар мен бұлтты қызметтердің негіздерін меңгеру	IoT тақтасында Wi-Fi байланысын орнату, бұлтты серверге деректерді жіберу және бұлттан командаларды оқу.
әдістемелік	Оқушылардың жобалық және зерттеу қызметін ұйымдастыра білу	Семинар жобалық әдістеме негізінде құрылып, оны оқушылармен бірге іске асыру мүмкіндігі қарастырылады.
	Дидактикалық материалдар мен нұсқаулықтарды әзірлеу мүмкіндігі	Мектептегі семинар модульдерін әртүрлі жас топтарына бейімдеу мүмкіндігі.
жобалық	Пәнаралық байланыстарды іске асыруға дайындық (физика, информатика, технология)	Тапсырмалар сенсорлардың физикалық принциптерін және бағдарламалау логикасын кешенді түсінуді талап етеді.

жинағы, мұғалімнің кәсіби құзыреттіліктері

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

[1] Kylyshbek F., Sadvakassova A., Dokuz A.S. Research of the current situation of teaching the internet of things to future computer science teachers in higher educational institutions of the Republic of Kazakhstan, *Scientific Journal of Pedagogy and Economics*, **408:2** (2024), 307–320. DOI: <https://doi.org/10.32014/2024.2518-1467.724>.

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ӘДІСТЕРІН ПАЙДАЛАНУ АРҚЫЛЫ ҮЙ ЖИҒАЗДАРЫНА АРНАЛҒАН E-COMMERCE АҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕСІН МОДЕЛЬДЕУ

А.А. ТҮРҒЫНБАЕВА¹, А. КЕРІМАҚЫН², Ә.Е. ЕРЛАНБЕК³

¹Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы
erlanbekasem5@gmail.com

Бұл мақала Қазақстан нарығында үй жиһаздарын сатуға арналған интернет-дүкеннің ақпараттық жүйесін әзірлеуге бағытталған. Жұмыста қазіргі электрондық коммерция жағдайында қолданылып жүрген әдістер мен технологиялар сарапталып, пайдаланушыларға ыңғайлы әрі функционалды интернет-дүкен құрудың кешенді тәсілі ұсынылады. Заманауи веб-технологияларға (HTML, CSS, JavaScript) негізделген ақпараттық жүйе деректерді өңдеу уақытын қысқартуға және клиенттерге сапалы қызмет көрсетуге мүмкіндік береді.

Қазіргі таңда электрондық коммерция Қазақстанда қарқынды дамып келеді. 2025 жылдың алғашқы жартысында Қазақстандағы бөлшек электрондық сауда нарығы 1,7 трлн теңгеге (+19% жылдық өсім) жетіп, бөлшек саудадағы үлесі 17,1%-ға дейін өскені хабарланды. Бұл көрсеткіш елдің e-commerce нарығының дүниежүзілік орташа деңгейге жақындағанын көрсетеді. Әсіресе, жиһаз саласында интернет-дүкендердің маңызы зор, себебі тұтынушылар үйден шықпай-ақ үлкен ассортимент арасынан өздеріне қолайлы жиһазды таңдап, сатып ала алады [1-3].

Біз әзірлеген Уу Жуһаз интернет-дүкені HTML, CSS және JavaScript технологияларын қолдана отырып жасалды. Біздің қойылған тапсырмамызда пайдаланушыға ыңғайлы интерфейс

және қарапайым навигация маңызды, сондықтан HTML, CSS және JavaScript комбинациясын ең жақсы нұсқа деп алдық.

Жүйенің негізгі бөлімдері:

Басты бет – компания туралы қысқаша ақпарат;

Каталог – жиһаздар тізімі, іздеу және сүзгілеу;

Себет – таңдалған тауарлар мен жалпы сома;

Таңдаулылар – жеке таңдаулы тауарлар;

Тіркелу/Кіру – пайдаланушы авторизациясы;

Төлем – төлем түрін таңдау;

Чат-бот – жедел көмек көрсету функциясы.

Сайттың басты бетінде үлкен шақыру баннері орналасқан. Баннердің жоғарғы жағында «Үйіңізге жарамды заманауи жиһаздар» деген ұран жазылған. Баннердің төменгі жағында «Қазір сатып алу» батырмасы орналасқан, ол арқылы пайдаланушы тікелей каталог бетіне өте алады. Басты бетте сонымен қатар жиһаз категориялары, артықшылықтар блогы және сайттың төменгі бөлігі (footer) орналасқан..

Каталог бетінде пайдаланушылар жиһаздарды ыңғайлы табуға және сүзгілеуге мүмкіндік алады. Беттің жоғарғы жағында «Жиһазды іздеңіз» деген тақырыппен іздеу жолағы орналасқан. Іздеу жолағының астында алты негізгі категория бойынша сүзгілеу батырмалары берілген..

Біз әзірлеген Уу Юһаз интернет-дүкені HTML, CSS және JavaScript технологияларын қолдана отырып жасалды.

Біздің қойылған тапсырмамызда пайдаланушыға ыңғайлы интерфейс және қарапайым навигация маңызды, сондықтан HTML, CSS және JavaScript комбинациясын ең жақсы нұсқа деп алдық.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] National Bank of Kazakhstan, E-commerce Development in Kazakhstan: Annual Report, 2025.
- [2] Тәжіғұлова Г.О., Желілік технологиялар, Қарағанды, 2017.
- [3] Рустембаев Б.Е., Нұрмағанбетов К.Қ., Қазақстанда ақпараттық технологияның дамуы, Іргелі зерттеулер, 2023.

Numerical study of the settling patterns of solid particles using LBM

A.B. ABZHAPPAROVA¹, K.K. KARZHAUBAYEV²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*International Engineering Technological University, Almaty, Kazakhstan*

¹abzhapparova17@gmail.com, ²kairzhan.k@gmail.com

The motion of solid particles in viscous fluids is an important problem in hydrodynamics and many engineering applications such as environmental monitoring, chemical technology and industrial processes. For example, particle sedimentation plays an important role in land reclamation, where sand particles settle under gravity in water during dredging and deposition processes. Studying this phenomenon allows us to analyze the particle trajectory, velocity field and interaction between the particle and the surrounding fluid to improve numerical models for predicting settling regimes.

The aim of this work is to numerically investigate the settling process of a solid particle in a viscous fluid under different governing parameters, such as the density ratio and the Galileo number. The Galileo number, the key dimensionless parameters describing the motion regime of a

particle, is defined as

$$Ga = \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1\right) |\vec{g}| d_p^3}}{\nu_f}, \quad (1)$$

here ρ_p and ρ_f denote the densities of the particle and the fluid, $\vec{g}$ is the gravitational acceleration, d_p is the particle diameter and ν_f is the kinematic viscosity of the fluid.

The particle settling process is simulated using the Lattice Boltzmann Method (LBM) [1]. This method is widely used for simulation of complex hydrodynamic flows and particle–fluid interaction. In LBM the main variable is the so-called distribution function of the fluid particles – f_i , where i denotes the direction of the motion. The evolution of the f_i is governed by Lattice-Boltzmann BGK equation: $f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t))$, where f_i is the particle distribution function, f_i^{eq} is the equilibrium distribution function, $\mathbf{c}_i$ are discrete velocities and τ is the relaxation time related to viscosity. In this work, the D3Q27 discrete velocity model was employed. Macroscopic quantities of the fluid are computed as moments of the distribution function.

To validate the proposed numerical model, the obtained numerical results were compared with the experimental and numerical data reported by ten Cate et al. [2]. After code validation, numerical simulations were performed for different values of the Galileo number in order to analyze the settling behavior of a solid particle in a viscous fluid. The trajectories of the particle's motion, velocity fields and the main hydrodynamic forces acting on it were analyzed. The results obtained were compared with experimental correlations and showed that the Lattice Boltzmann method is effective in modeling such problems.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, particle settling, Galileo number, numerical simulation.

2020 Mathematics Subject Classification: 76T10, 76M28, 76D05

References

- [1] Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggien E. *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*, Springer, Cham (2017).
- [2] ten Cate A., Nieuwstad C. H., Derksen J. J., Van den Akker H. E. A. Particle imaging velocimetry experiments and lattice-Boltzmann simulations on a single sphere settling under gravity, *Physics of Fluids*, **14**:12 (2002), 4012–4025.

Lotka–Volterra Operators on the Simplex S^5 with Bipartite Interaction Graphs

D. D. AKHMEDOVA

¹Andijan State University, Andijan, Uzbekistan

dilafruz.ahmedova.0695@gmail.com

We study discrete Lotka–Volterra (LV) operators on the simplex

$$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

generated by a skew-symmetric matrix $A = (a_{ij})$, $|a_{ij}| \leq 1$, via

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = 1, \dots, m,$$

where $Vx = x' = (x'_1, \dots, x'_m)$. While nondegenerate skew-symmetric matrices (i.e., $\det A \neq 0$) yield a finite fixed-point set, many applied models contain missing interactions (some $a_{ki} = 0$ for

$k \neq i$), which may lead to an infinite set of fixed points. A convenient way to encode such sparsity is through the interaction graph G_A . In this work, we focus on the case $m = 6$ (the simplex S^5) when G_A is bipartite (a bigraph), i.e., the vertex set is split into two classes I and II so that $a_{ki} \neq 0$ only when one index belongs to I and the other to II [1].

Main results on S^5 . We provide a complete classification of the qualitative dynamics in both bipartite configurations on S^5 . The analysis is based on the polyhedral sets

$$P = \{x \in S^5 : Ax \geq 0\}, \quad Q = \{x \in S^5 : Ax \leq 0\}, \quad \text{and} \quad \ker(A) \cap S^5.$$

Depending on the bipartite structure and parameter inequalities, these sets form invariant regions and determine the limiting behavior of both forward and backward trajectories.[2].[3]

Case 1: $I = \{1\}$ and $II = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. The fixed-point set is

$$\text{Fix}(V) = \{e_1\} \cup \text{co}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}.$$

A distinguished polytope $K = \ker(A) \cap S^5$ consists of neutral fixed points (Jacobian eigenvalues equal to 1 along K). Moreover, P and Q induce a polyhedral decomposition of the face $\text{co}\{e_2, \dots, e_6\}$, and every trajectory converges to a fixed point. For $x^{(0)} \in \text{ri } S^5$ we obtain

$$\omega(x^{(0)}) \subset \text{ri } Q, \quad \alpha(x^{(0)}) \subset \text{ri } P,$$

where $\omega(\cdot)$ and $\alpha(\cdot)$ are the ω - and α -limit sets.

Case 2: $I = \{1, 2\}$ and $II = \{3, 4, 5, 6\}$. Here $\text{Fix}(V) = \text{co}\{e_1, e_2\} \cup \text{co}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, and the Jacobian eigenvalues at fixed points are real and nonnegative. The dynamics depend on the mutual location of several parameter-dependent points M_i and N_i on the face $\text{co}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$. In the fully degenerate configuration $M_i = N_i$ ($i = 1, \dots, 4$), we have $P = Q = \ker(A) \cap S^5$, and we construct a family of Lyapunov functions

$$\varphi_p(x) = \prod_{i=1}^6 x_i^{p_i}, \quad p \in P,$$

which are non-increasing along forward trajectories. This yields convergence of backward trajectories $\alpha(x^{(0)}) \subset P$ for all $x^{(0)} \in \text{ri } S^5$.

Polyhedral partition and trajectory routes. For fixed parameter inequalities, each point $x \in S^5$ admits a *signature* given by the signs of increments $x'_i - x_i$. Solving the corresponding homogeneous inequalities produces a finite family of 5-dimensional polytopes $F_1, \dots, F_N$ whose union is S^5 and whose pairwise intersections are either empty or common facets. The adjacency graph of $\{F_i\}$ and the directed *route graph* induced by V describe the order in which trajectories visit these polytopes. In several configurations, we obtain full convergence:

$$\omega(x^{(0)}) \subset Q, \quad \alpha(x^{(0)}) \subset P, \quad x^{(0)} \in \text{ri } S^5.$$

Conclusion. Encoding sparsity by bipartite interaction graphs provides a constructive geometric framework for LV dynamics on S^5 . The sets P , Q , and $\ker(A) \cap S^5$ govern invariant regions, attractor/repeller behavior, and the polyhedral routing of trajectories.

Funding: None

Keywords: Lotka–Volterra operator, simplex, bigraph, fixed point, attractor, repeller, Lyapunov function, signature, trajectory route.

2020 Mathematics Subject Classification: 37B25, 37C25, 37C27.

References

- [1] Bondy J.A. *Graph Theory with Applications*, USA, (1976).

[2] Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B., Akhmedova D.D. Linear Homogeneous Inequalities and Trajectory Routes of the Degenerate Lotka–Volterra Operators, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **46**:3 (2025), 1257-1265.

[3] Akhmedova D.D., Muminov U.R. Routes of trajectories of Lotka–Volterra operators acting on the simplex S_4 and bipartite graphs, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, **7**:6 (2024), 132-140

A new eigenvector-based method for the matrix algebraic Riccati equation

F.A. ALIEV¹, N.S. HAJIYEVA²

Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan

¹*Institute of Information Technologies, Baku, Azerbaijan*

²*Institute of Data Science and Artificial Intelligence, Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

¹f.aliev@yahoo.com, ²n.hajiyeva@gmail.com

This study introduces a novel analytical expression for the solution of matrix algebraic Riccati equations (MARE) [1-3]. The proposed methodology relies on the spectral analysis of the corresponding Hamiltonian matrix, with particular emphasis on the properties of its eigenvectors.

In comparison with traditional solution techniques, the developed formula makes it possible to address a class of optimization problems for which existing approaches, including those attributed to D. Vaughan [4] and H. Kwakernaak [5], are either inapplicable or unsuccessful.

A number of representative examples are presented to illustrate the performance of the method. For standard configurations, the resulting solutions agree with those previously established in the literature, thereby confirming the correctness and consistency of the approach. In contrast, for more involved cases where the methods of D. Vaughan and H. Kwakernaak fail to produce feasible solutions, the new formulation yields accurate and reliable results.

Overall, the proposed analytical framework broadens the scope of existing techniques for solving matrix algebraic Riccati equations and serves as an effective alternative for handling complex optimization problems encountered in control theory and related areas of applied mathematics.

Consider the linear time-invariant system [6-8]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

where $x(t)$ — n -dimensional phase vector, $u(t)$ — m -dimensional control vector, x_0 — known vector, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

It is required to find the regulation law $u(t) = Kx(t)$, such that the closed-loop system (1) + (2) is asymptotically stable and the quadratic functional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x'(t)Rx(t) + u'(t)Cu(t)) dt \quad (3)$$

reaches minimum value, such a problem is called optimal stabilization, where $C = C' > 0$, $R = R' \geq 0$, respectively, $m \times m$, $n \times n$ dimensions known matrices. The prime sign ($'$) denotes the transpose operation. Note that, (F, G) is stabilizable pair, $(F, R^{1/2})$ is detectable pair,

$$K = -C^{-1}G'S,$$

where S is the solution of the following MARE: $F + F'S - SGC^{-1}G'S + R = 0$.

Adopting the notation

$$H = \begin{pmatrix} -F & GC^{-1}G' \\ R & F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

for solving the algebraic matrix Riccati equation (AMRE) (5) [9-12], a new formula is derived:

$$S_N = (V_{11}V_{21}^{-1}H_{22} - H_{12})^{-1} (H_{11} - V_{11}V_{21}^{-1}H_{21}), \quad (4)$$

The matrix Λ containing eigenvalues of the Hamiltonian matrix H lie on the right half plane, the matrix $\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ corresponding eigenvectors and

$$(-H)^{-1} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

References

- [1] F.A. Aliev, V.B. Larin, Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Gordon and Breach Sci, Amsterdam, (1998).
- [2] V.B. Larin, F.A. Aliev, On the solution of algebraic Riccati equations, Mathematical physics, Naukova Dumka, Kyiv, (1975).
- [3] F.A. Aliev, Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems, Elm, Baku, 1989.
- [4] D.R. Vaughan, A negative exponential solution for the matrix Riccati equation, IEEE Transactions on Automatic Control, (1969), 72–73.
- [5] H. Kwakernaak, R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, New York, London, 1972.
- [6] F.A. Aliev, V.B. Larin, N.I. Velieva, Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, Outskirts Press, USA, 2022.
- [7] A.J. Laub, Schur method for solving algebraic Riccati equations, IEEE Transactions on Automatic Control, 24(6), (1973), 913–921.
- [8] A.E. Bryson, Y.C. Ho, Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, 1972.
- [9] F.A. Aliev, B.A. Bordyug, V.B. Larin, Systems & Control Letters, 14(5), 1990.
- [10] F.A. Aliev, V.B. Larin, Appl. Comput. Math, 13(2), (2013), 266–267.
- [11] F.A. Aliev, V.B. Larin, Applied and Computational Mathematics, 10(2), (2011), 356–360.
- [12] F.A. Aliev, V.B. Larin, Appl. Comput. Math., 8(2), (2009), 268–269.

Development of the Geometric Theory Related to Solving the Elliptic Monge–Ampère Equation.

A. ARTYKBAEV

Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

aartykbaev@mail.ru

It is known that the global geometric problem of the existence of a convex surface with a prescribed function of external curvature is equivalent to proving the existence of a solution to the Dirichlet problem for the elliptic Monge–Ampère equation [1], [2].

In the works listed in [4], this problem was solved only in the case when the external curvature is defined in a convex and simply connected domain.

N. Ibodullaeva refined the concept of the external curvature of convex surfaces and constructed a generalized curvature of convex surfaces. She solved the problem of the existence of convex surfaces with a prescribed external curvature for non-convex and simply connected surfaces [3].

D. Tillaev introduced the concept of a convex surface with a finite number of vertices and studied the properties of the external curvature of these surfaces. He proved theorems on the existence of surfaces with prescribed external curvature when the curvature has singularities at a finite number of points [5].

The problem of determining the class of regularity, given the known regularity of the prescribed external curvature function, remains unsolved.

References

- [1] A.D.Aleksandrov. *Intrinsic geometry of convex surfaces*, Russian, Taylor and Francis Group, 430.(2006).
- [2] I.Y. Bakelman, A.L.Venger, B.E.Kantor. *Introduction to Global Differential Geometry* Demand Book, Science, (2012).
- [3] A.V.Pogorelov *On the regularity of generalised solutions of the equation*, DAN. USSR. 200 (197). 534-537.
- [4] A.Artykbaev, N.Ibodullayeva. Generalized External Curvature of a Surface, in: *AIP Conference Proceedings*, (2024).
- [5] A.Artykbaev, D.Tillayev. Properties of External Curvature of Surfaces with Vertices. in: *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Vol.4.*, (2023)

Identification of vortex wake parameters using lidar measurement data

N.A. BARANOV

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia

barnik.al@gmail.com

Lidar measurement data represents a field of values for the radial component of airflow velocity in a plane perpendicular to the aircraft's flight direction, specified in a polar coordinate system. Wake vortex parameters are defined as the coordinates of the centers of vortex ropes and their circulation in the plane under consideration. The problem of identifying wake vortex parameters is solved in two stages. In the first, the coordinates of the centers of the vortex ropes are determined, and in the second, their intensity is calculated. The paper proposes considering the vortex detection procedure using lidar scanning data as a process of searching for points of sharp brightness changes in a digital image. Since the image is discrete and the derivative does not exist in the classical sense, an approximate derivative value is calculated. To approximate the gradient, it is proposed to use the Scharr discrete differential operator. Since the source data is specified in a polar coordinate system, it is converted to a Cartesian grid using bilinear interpolation.

If V is an array of measured radial velocities interpolated onto a Cartesian grid, then the matrices G_z and G_y , whose elements are approximate derivatives of the field V along the lateral and vertical axes, are calculated as follows:

$$G_z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} * V, \quad G_y = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & -3 \end{pmatrix} * V, \quad (1)$$

where $*$ denotes a two-dimensional convolution operation.

The regions corresponding to the position of the wake vortex can be identified by the condition:

$$\sqrt{G_z^2 + G_y^2} > G_{lim}, \quad (2)$$

where G_{lim} is the specified limit value.

After selecting points that satisfy condition (2), the procedure of their automatic clustering is performed using the DBSCAN algorithm. The DBSCAN method uses the concept of data density by grouping data points located at a close distance from each other into one cluster. For each cluster identified by the DBSCAN algorithm, its center is calculated as the simple geometric center of its constituent points. Cluster centers are considered as the centers of vortex cores.

In the second stage, it is assumed that the coordinates of the centers of the vortex cores r_{w1} and r_{w2} are known. It is also assumed that the measured radial velocity V'_j at each point r_j can be approximated as follows:

$$V'_j \approx \Gamma_1 \cdot Q(r_j, r_{w1}) + \Gamma_2 \cdot Q(r_j, r_{w2}) + w_0 \cdot \cos \epsilon_j + \alpha \cdot d_j, \quad (3)$$

where Γ_i is the circulation of the i -th vortex, $Q(r_j, r_{wi})$ is the theoretical analytical relationship for the radial velocity of the i -th vortex at the j -th point, w_0 is the average wind speed in the region where the vortices are located, α is the vertical wind speed gradient, ϵ_j is the measuring direction angle at the j -th point and d_j is the projection of the vertical distance between points r_j and r_{w1} onto the measuring direction. Based on approximation (3), the wake vortex parameter Γ_1 , Γ_2 and wind characteristics w_0 , α are calculated by minimizing a functional of the form

$$\sum_j (V'_j - \Gamma_1 \cdot Q(r_j, r_{w1}) - \Gamma_2 \cdot Q(r_j, r_{w2}) - w_0 \cdot \cos \epsilon_j - \alpha \cdot d_j)^2. \quad (4)$$

Here the summation is carried out over measurement points that satisfy one of the conditions

$$R_1 \leq |r_j - r_{w1}| \leq R_2, \quad R_1 \leq |r_j - r_{w2}| \leq R_2. \quad (5)$$

Here $R_1 = 5\text{m}$, $R_2 = 15\text{m}$. The problem of minimizing functional (4) is reduced to solving a system of linear algebraic equations. As a bonus, the proposed approach yields not only wake vortex parameters - the coordinates of the vortex core centers and their circulation - but also the average wind speed and vertical wind gradient.

Keywords: wake vortex parameters, Scharr operator, DBSCAN algorithm, parameter identification.

2020 Mathematics Subject Classification: 65Z05

References

- [1] Baranov N. Differential Approach to Detecting Wake Vortices by Lidar Remote Sensing Data, in: *Current Problems of Applied Mathematics and Computer Systems. CPAMCS 2024. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1585*, Springer, Cham (2025), 70–78.
- [2] Scharr H. *Optimal operators in digital image processing*, Dissertation for the degree of Doctor of Natural Sciences (2000).
- [3] Ester M., Kriegel H.-P., Sander J., Xu X. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise, *Proc. of the Second Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD'96)*. AAAI Press., (1996), 226–231.
- [4] Ahmad N.N., Proctor F.H., Duparcmeur F.M., Jacob D. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise, *Review of Idealized Aircraft Wake Vortex Models, 2014–0927* (2014).

A chemotaxis-competition system with free boundary

M.S. RASULOV¹, B.M. KHOLBOEV²

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

²Kimyo International University, Tashkent, Uzbekistan

¹rasulovms@bk.ru, ²bakhodir.kholboev@gmail.com

Chemotaxis is the movement of species (cells) towards or back towards certain chemical substances and can be found in many real biological models, such as tumor growth, immune system response, and population dynamics [1, 2].

In this work, we investigate the following free boundary problem for two-species chemotaxis-

competition system with two chemicals

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = d_1 u_{xx} - \chi_1 (uv_x)_x + u(a_1 - b_1 u - c_1 w), & t > 0, \quad 0 < x < s(t), \\ v_{xx} = \lambda_1 v - m_1 w, & t > 0, \quad 0 < x < s(t), \\ w_t = d_2 w_{xx} - \chi_2 (vz_x)_x + w(a_2 - b_2 w - c_2 u), & t > 0, \quad 0 < x < s(t), \\ z_{xx} = \lambda_2 z - m_2 u, & t > 0, \quad 0 < x < s(t), \\ u_x(t, 0) = v_x(t, 0) = w_x(t, 0) = z_x(t, 0) = 0, & t > 0, \\ u(t, s(t)) = v(t, s(t)) = w(t, s(t)) = z(t, s(t)) = 0, & t > 0, \\ s'(t) = -\mu[u_x(t, s(t)) + \rho w_x(t, s(t))], & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad w(0, x) = w_0(x) & 0 \leq x \leq s(0) \equiv s_0, \end{array} \right. \quad (1)$$

where $s(t)$ is a free boundary to be determined. The functions $u(t, x)$ and $w(t, x)$ denote the densities of the two species and the corresponding chemicals produced by the species are $z(t, x)$ and $v(t, x)$, respectively. That is, besides diffusions of the two species themselves, one species produces a chemical signal to affect the motion of the other. All parameters d_i , χ_i , λ_i , m_i , a_i , b_i , c_i ($i = 1, 2$), μ and ρ are all positive and the initial condition (u_0, w_0, s_0) satisfies

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 > 0, \quad u_0, w_0 \in C^2([0, s_0]), \\ u_0(x), w_0(x) > 0 \text{ for } x \in [0, s_0), \\ u_0(s_0) = w_0(s_0) = u'_0(0) = w'_0(0) = 0. \end{array} \right.$$

In this work, a priori estimates of the Schauder type are established. Based on the established estimates, the behavior of the free boundary is studied. The uniqueness theorem and the existence of a solution to problem (1) are proved. Some qualitative properties of the solution for $t \rightarrow +\infty$ are also investigated.

Keywords: chemotaxis-competition system, free boundary, a priori estimates.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K15, 35K51, 35K57.

References

- [1] Evelyn F. Keller, Lee A. Segel. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis. *J. Theor. Biol.*, **30**:2 (1971), 235–248.
- [2] Weiyi Zh. Global existence, boundedness and asymptotic behavior of classical solutions of a two-species chemotaxis-competition system with two chemicals on $\mathbb{R}^N$. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, **30**:8 (2025), 2894–2919.

Algorithmic Construction of Homogeneous Fixed-Point Cards in Six-Species Discrete Lotka–Volterra Systems

D.B. ESHMAMATOVA¹, M.A. TADZHIEVA²

^{1,2}Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Uzbekistan

^{1,2}V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Uzbekistan

¹24dil@mail.ru, ²mohbonut@mail.ru

Models of interacting species under pairwise competition or cooperation have motivated the development of discrete Lotka–Volterra-type operators acting on the standard simplex. These mappings integrate probabilistic inheritance mechanisms with algebraic and combinatorial structures, establishing them as central objects in modern nonlinear discrete dynamical systems. Within this framework, the present study is devoted to a theoretical investigation of a special class of quadratic stochastic operators (QSOs) generated by homogeneous tournaments. We introduce the notion

of a homogeneous tournament and analyze its implications for the dynamics of the corresponding Volterra-type operators, with particular emphasis on the structure and location of fixed points, asymptotic behavior of trajectories, and related combinatorial properties in low-dimensional simplices.

Let $I = \{1, \dots, m\}$ and consider the standard $(m - 1)$ -dimensional simplex

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}.$$

A quadratic stochastic operator $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ is called a Lotka-Volterra type operator if it has the form

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = 1, \dots, m,$$

where the interaction matrix $A = (a_{ki})$ is skew-symmetric ($A = -A^T$) and satisfies $|a_{ki}| \leq 1$.

Each such operator is uniquely determined by its skew-symmetric interaction matrix A . If A is in general position (i.e., all even-order principal minors are nonzero), then it induces a complete oriented graph - a tournament T_m on the vertex set $\{1, \dots, m\}$, where an arc $i \rightarrow k$ is present if and only if $a_{ik} > 0$. A particularly important class is formed by homogeneous tournaments, in which every subtournament is either strong or transitive. These tournaments possess a highly regular combinatorial structure, which allows for a transparent dynamical interpretation of the corresponding operator.

We recall the notion of the card of fixed points and the concept of homogeneity introduced, which will serve as the main combinatorial tool in our analysis.

Let $\alpha \subset I$ and denote by $x(\alpha)$ a fixed point of V with support α . We define

$$X = \{x(\alpha) : \alpha \subset I\}$$

as the set of all fixed points of V .

Two fixed points $x(\alpha)$ and $x(\beta)$ are said to form a (ρ, q) -pair if there exists a face Γ_γ with $\gamma \supset \alpha \cup \beta$ such that

$$A_\gamma x(\alpha) \geq 0, \quad A_\gamma x(\beta) \leq 0.$$

In this case, we draw a directed arc from $x(\alpha)$ to $x(\beta)$. The resulting directed graph is called the *card of fixed points* of V and is denoted by G_V .

Definition 1. The card G_V is called *homogeneous* if the associated tournament T_m is homogeneous.

We present a complete combinatorial-dynamical characterization of the fixed-point card G_V for six-species discrete Lotka-Volterra operators acting on the five-dimensional simplex S^5 . The interaction matrix A is skew-symmetric and generated by a homogeneous tournament on six vertices.

The main results can be summarized as follows.

1. We introduce and characterize homogeneous cards of fixed points, defined as oriented tournaments in which every directed arc connects fixed points with the same support cardinality.

2. It was proved that every homogeneous card decomposes into three disjoint connected components $G_V^{(1)} \cup G_V^{(3)} \cup G_V^{(5)}$, where each $G_V^{(2k+1)}$ consists of all fixed points with exactly $2k+1$ nonzero coordinates.

3. The orientation of every directed arc in G_V is uniquely determined by the sign of a corresponding fourth-order principal minor of A (equivalently, the sign of the associated Pfaffian). These minors appear as correction terms in discrete inequalities derived from weighted power Lyapunov functions

$$\varphi_{ijk}(x) = (x_i^{a_{jk}} x_j^{a_{ki}} x_k^{a_{ij}})^{1/\Delta_{ijk}}, \quad \Delta_{ijk} = a_{ij}a_{jk} + a_{jk}a_{ki} + a_{ki}a_{ij},$$

where Δ_{ijk} denotes the cyclic determinant associated with the triple (i, j, k) . These functions are constructed via Young's inequality for cyclic triples such as $\overline{126}$, $\overline{136}$, $\overline{146}$, and $\overline{156}$.

Remark 2. As a consequence of homogeneity, if G_V is a homogeneous card, then the number of arcs incident to a vertex $z(\alpha)$ is not less than $m - |\alpha|$.

The obtained determinantal criteria provide an algorithmic procedure for constructing fixed-point cards and determining arc orientations in six-species systems. This creates a computational framework for analyzing the qualitative dynamics of high-dimensional discrete Lotka–Volterra models.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (No. BR 27100483 «Development of predictive exploration technologies for identifying ore-prospective areas based on data analysis from the unified subsurface user platform «Minerals.gov.kz» using artificial intelligence and remote sensing methods»)

Keywords: skew-symmetric matrix, discrete Lotka–Volterra operator, homogeneous tournament, fixed-point card, Pfaffian, fourth-order principal minors, weighted Lyapunov function, five-dimensional simplex

2020 Mathematics Subject Classification: 37B25, 37C25, 37C27

References

- [1] Murray, J.D. *Mathematical biology, Third Edition*, Springer, Berlin, (2022).
- [2] Tadzhieva M.A., Eshmamatova, D.B., Ganikhodzhaev, R.N. *Volterra-type quadratic stochastic operators*, Journal of Mathematical Sciences (United States), 278(3), (2024), 546-556.
- [3] Eshmamatova D.B., Tadzhieva, M.A., Ganikhodzhaev, R.N. *Criteria for the existence of internal fixed points of Lotka–Volterra quadratic stochastic mappings with homogeneous tournaments acting in an $(m - 1)$ -dimensional simplex*, Journal of Applied Nonlinear Dynamics, 12(4), (2023), 679-688.
- [4] Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B, Tadzhieva M.A & Zakirov, B.S. *Some degenerate cases of discrete Lotka–Volterra dynamical systems and their applications in epidemiology*, Journal of Mathematical Sciences (United States), (2024).
- [5] Eshmamatova D.B, Tadzhieva M.A., Temirbekov N.M. *Construction of fixed point cards for degenerate Lotka–Volterra mappings*, Journal of Mathematical Sciences (United States), (2025).

Computation and Analysis of Weak Solutions for Nonlinear Degenerate Elliptic Equations

D.B. ESHMAMATOVA¹, N.K. OCHILOVA²

^{1,2}Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Uzbekistan

¹V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Uzbekistan

¹24dil@mail.ru, ²nozima@tstu.uz

In this work, we consider the boundary value problem for the nonlinear degenerate elliptic equation

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(y^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\beta_0}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = f(u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded domain, $m > 0$ and $\beta_0 > 0$.

The equation degenerates along the line $y = 0$ due to the vanishing weight y^m and contains a singular lower-order term $\frac{\beta_0}{y} u_y$. Because of this degeneracy, classical Sobolev spaces are not appropriate. Therefore, the problem is formulated in the weighted Sobolev space

$$H_0^1(\Omega, y^m) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : y^{m/2} u_x, u_y \in L^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

The corresponding variational formulation reads:

$$\int_{\Omega} \left(y^m u_x v_x + u_y v_y + \frac{\beta_0}{y} u_y v \right) dx dy = \int_{\Omega} f(u) v dx dy, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, y^m). \quad (3)$$

Definition 1. A function $u \in H_0^1(\Omega, y^m)$ is called a weak solution of problem (1)–(2) if it satisfies the above variational identity for all $v \in H_0^1(\Omega, y^m)$.

The singular term is well defined due to a weighted Hardy inequality:

$$\int_{\Omega} \frac{|v|^2}{y^2} dx dy \leq C \int_{\Omega} |v_y|^2 dx dy, \quad v \in H_0^1(\Omega, y^m),$$

which guarantees integrability near $y = 0$.

The nonlinearity $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is assumed to be globally Lipschitz continuous, monotone, and of at most linear growth.

Results

1. **Existence and Uniqueness.** For globally Lipschitz and monotone $f(u)$, there exists a unique weak solution

$$u \in H_0^1(\Omega, y^m).$$

The proof is based on the Galerkin approximation, uniform energy estimates, Banach-Alaoglu theorem, and monotonicity arguments.

2. **Energy Estimate.**

$$\int_{\Omega} (y^m |u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy \leq C \left(\|f(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \right).$$

3. **Interior Regularity.** For every subdomain $\Omega' \Subset \Omega$ with $\overline{\Omega'} \cap \{y = 0\} = \emptyset$,

$$u \in H^2(\Omega').$$

Here $H^2(\Omega, y^m)$ denotes the weighted Sobolev space of functions whose derivatives up to second order are square integrable with weight y^m .

4. **Global Weighted H^2 -Regularity (for $m \geq 1$).** Assume additionally that:

- $\partial\Omega$ is of class C^2 ,
- $f(u) \in L^2(\Omega)$.

Then the weak solution satisfies

$$u \in H^2(\Omega, y^m),$$

together with the a priori estimate

$$\|u\|_{H^2(\Omega, y^m)} \leq C \left(\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega, y^m)} \right).$$

The proof relies on weighted Hardy inequalities and global regularity theory for degenerate elliptic operators.

Examples of admissible nonlinearities:

- $f(u) = \lambda u$, $\lambda \geq 0$;
- $f(u) = \frac{u}{1 + |u|}$;

- $f(u) = |u|^{p-2}u$, $1 \leq p \leq 2$.

Funding: The research was supported by national scientific research programs of Uzbekistan and Kazakhstan.

Keywords: degenerate elliptic equations, weighted Sobolev spaces, Hardy inequality, weak solutions, weighted regularity, Muckenhoupt weights

2020 Mathematics Subject Classification: 35J70, 35J75, 35B65.

References

- [1] Evans L.C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence (2010).
- [2] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207-226.
- [3] Fabes E., Kenig C., Serapioni R. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations, *Communications in Partial Differential Equations* **7**:(1) (1982), 77–116.
- [4] Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin–Heidelberg, 2001.

Machine Learning and Deep Learning Methods for Decision-Making in Educational Non-Player Characters on Cardiovascular Disease

R.I. EYNIYEV

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan

rustam.eyniyev@gmail.com

Introduction. The goal of this work is to use various machine learning and deep learning methods to create a game environment that will help medical students better understand cardiovascular disease field by using medical doctor non-player character (NPC) to provide their verdicts on various cases from real life.

Methodology. When students talk with medical doctor NPC, students receive from him the form shown in Figure 1, after filling it out and pressing the "Predict" button, this medical doctor NPC gives his verdict based on the verdicts of the 7 models.

Students must enter the following parameters: Age (18–90), Gender (Female, Male), Height (cm) (140–210), Weight (kg) (40–180), Systolic BP (ap_hi) (60–250), Diastolic BP (ap_lo) (40–150), Cholesterol (Normal, Above Normal, Well Above Normal), Glucose (Normal, Above Normal, Well Above Normal), Smoker (Yes, No), Alcohol (Yes, No), Physically Active (Yes, No).

These data were taken from the Cardiovascular Disease dataset by Svetlana Ulianova on Kaggle to train models. For better results additional parameters were added using feature engineering to improve the results: BMI (1), Pulse Pressure (2), MAP (3).

$$\text{BMI} = \frac{\text{Weight}}{(\text{Height}/100)^2} \quad (1)$$

$$\text{Pulse Pressure} = BP_{sys} - BP_{dia} \quad (2)$$

$$\text{MAP} = BP_{dia} + \frac{BP_{sys} - BP_{dia}}{3} \quad (3)$$

The following models were used to train NPC: Logistic Regression [1], Random Forest [2], XGBoost [3], Multilayer Perceptron (MLP) [4], ResNet for tabular data [5, 6], TabNet[7], Ensemble (ResNet and TabNet) (4).

$$\hat{y}_{\text{Ensemble}} = \frac{\hat{y}_{\text{ResNet}} + \hat{y}_{\text{TabNet}}}{2} \quad (4)$$

Cardiovascular Disease

Age: 55
 Gender: Female
 Height (cm): 156
 Weight (kg): 85
 Systolic BP (ap_hi): 140
 Diastolic BP (ap_lo): 90
 Cholesterol: Well Above Normal
 Glucose: Normal
 Smoker: No
 Alcohol: No
 Physically Active: Yes

Predict

BMI: 34.9 | Pulse Pressure: 50 | MAP: 106.7

Model	Risk %	Verdict
Logistic Regression	87.4%	HIGH RISK
Random Forest	85.3%	HIGH RISK
XGBoost	87.8%	HIGH RISK
MLP	89.6%	HIGH RISK
ResNet	82.6%	HIGH RISK
TabNet	84.6%	HIGH RISK
Ensemble	83.6%	HIGH RISK

Majority vote (7/7): HIGH RISK

Figure 1: Prediction Form of Medical Doctor NPC for Cardiovascular Disease Risk

Hyperparameter optimization was performed on all models using the Optuna framework [8].

Results. ROC-AUC and Accuracy were used as main metrics for result. ROC-AUC is more informative for medical tasks than standard Accuracy. Accuracy evaluates the number of correct diagnoses relative to all results, and ROC-AUC evaluates not only the number of correct diagnoses, but also True Positive, True Negative, False Positive and False Negative diagnoses. The training results are shown in Table 1.

Name	ROC-AUC	Accuracy
Logistic Regression	0.799	73.0%
ResNet	0.804	74.0%
Random Forest	0.807	74.0%
TabNet	0.808	74.0%
Ensemble	0.808	74.0%
XGBoost	0.809	74.0%
MLP	0.809	74.0%

Table 1: Performance of Machine Learning and Deep Learning Models

The results show almost no difference in Accuracy between the models, but there is a difference in ROC-AUC values. In this study, even a 0.001 improvement in ROC-AUC is very significant. In real life, it affects the health of 100 real people out of 100000 patients whose diagnoses may be incorrect.

Conclusion. The study shows that the ROC-AUC performance is as follows: 1) MLP and XGBoost, 2) TabNet and Ensemble, 3) Random Forest, 4) ResNet, 5) Logistic Regression. The accuracy performance is as follows: 1) Random Forest, XGBoost, MLP, ResNet, TabNet, Ensemble, 2) Logistic Regression. The most effective methods for this problem (in ROC-AUC and Accuracy metrics together) are MLP and XGBoost and the least effective (in ROC-AUC and Accuracy metrics together) is Logistic Regression. Further work in this direction could include other medical-related problems, which would make medical doctor NPC even more relevant in education and medicine. These NPCs are very useful in teaching students, adding interactivity to the learning process and, most importantly, allowing students to test and study changes in which specific parameters may be critical for various diseases and how which parameters influence the increase or decrease in risk.

Keywords: non-player character, machine learning, deep learning, xgboost, resnet, tabnet.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 68T07, 92C50

References

- [1] Cox, D. R. The regression analysis of binary sequences., *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 20(2) (1958), 215–232.
- [2] Breiman, L. Random forests., *Machine learning*, 45(1) (2001), 5–32.
- [3] Chen, T., & Guestrin, C. Xgboost: A scalable tree boosting system., *Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining*, (2016), 785–794.
- [4] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. Learning representations by back-propagating errors., *nature*, 323(6088) (1986), 533–536.
- [5] He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. Deep residual learning for image recognition., *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, (2016), 770–778.
- [6] Gorishniy, Y., Rubachev, I., Khrulkov, V., & Babenko, A. Revisiting deep learning models for tabular data., *Advances in neural information processing systems*, 34 (2021), 18932–18943.
- [7] Arik, S. Ö., & Pfister, T. Tabnet: Attentive interpretable tabular learning., *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, 35(8) (2021), 6679–6687.
- [8] Akiba, T., Sano, S., Yanase, T., Ohta, T., & Koyama, M. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework., *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining*, (2019), 2623–2631.

The Black–Scholes Mathematical Model in Option Pricing Problems

S.N. IZEYEV¹, D.B. ZHAKEBAYEV²

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

same010581@gmail.com

Modern financial markets are characterized by a high degree of uncertainty and dynamics, which requires the application of rigorous mathematical methods for the analysis and valuation of financial instruments. To determine the fair value of such instruments, mathematical models based on stochastic processes are widely used.

One of the most well-known and fundamental models in option pricing theory is the Black–Scholes model, proposed by Fischer Black, Myron Scholes, and Robert Merton in the 1970s [1]. This model made it possible to obtain an analytical solution for the price of a European option and became the foundation for the development of modern financial mathematics.

The central element of the model is a partial differential equation known as the Black–Scholes equation, which describes the dynamics of the option value depending on time and the price of the underlying asset [2].

To derive the Black–Scholes equation, the apparatus of stochastic analysis is used, the key tool of which is Itô’s lemma [3]. This lemma allows determining the stochastic differential of a function of a random process described by a stochastic differential equation.

Itô’s Lemma. Let X_t be a stochastic process satisfying the stochastic differential equation

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t \quad (1)$$

where W_t is a Wiener process. Let $F(t, x)$ be a function of class $C^{1,2}$ on $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Then the process $F(t, X_t)$ satisfies the relation

$$dF(t, X_t) = \left(\partial_t F + a(t, X_t) \partial_x F + \frac{1}{2} b^2(t, X_t) \partial_{xx} F \right) dt + b(t, X_t) \partial_x F dW_t. \quad (2)$$

To simplify further analysis, it is necessary to eliminate the stochastic component of the equation. This is achieved by constructing the so-called delta-neutral portfolio.

Consider a portfolio Π consisting of a position in the underlying asset and a position in the option. Then the value of the portfolio can be represented as

$$\Pi = \Delta S - C(S, t), \quad (3)$$

where $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ is the option delta, i.e., the first derivative of the option value with respect to the underlying asset price S .

Assume that the option delta does not change significantly over a small time interval. Then the differential form of the delta-neutral portfolio can be written as follows:

$$d\Pi = \Delta dS - dC. \quad (4)$$

It is known that the dynamics of the underlying asset price are described by geometric Brownian motion, therefore

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t. \quad (5)$$

Substituting this expression into the portfolio differential and using Itô's lemma for the function $C(S, t)$, one can obtain an expression for the change in the portfolio value.

$$d\Pi = - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt. \quad (6)$$

Introduce a new variable τ , defined by

$$\tau = T - t \quad (7)$$

where T is the option expiration time. The variable τ is interpreted as the time remaining until the option expires. With this substitution, the time derivative transforms as follows:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial C}{\partial \tau}. \quad (8)$$

Substituting this relation into the obtained expression, one can proceed to further transformation of the equation and obtain the classical form of the Black-Scholes equation.

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + rC = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + rx \frac{\partial C}{\partial x} \quad (9)$$

For further simplification of the equation, we perform a logarithmic change of variable

$$x = e^y,$$

and also introduce the transformation of the solution function

$$C(x, \tau) = e^{\alpha y + \beta \tau} U(y, \tau), \quad (10)$$

where the parameters α and β are chosen in such a way as to eliminate the linear terms of the equation.

Let us find the required partial derivatives. Collecting like terms, we obtain the equation

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (11)$$

The obtained equation is the classical non-stationary heat equation.

Thus, the Black-Scholes model is one of the fundamental mathematical models in the theory of pricing derivative financial instruments and retains its significance both in theoretical research and in practical applications.

Funding: This research is carried out on a self-financing basis.

Keywords: stochastic process, options, partial derivatives, Black–Scholes equation, heat equation, boundary conditions.

2026 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**:3 (1973), 637–679.
- [2] Zabelin B.F., Konnikov E.A. Analysis of the effectiveness of using the model Black–Scholes, binomial model, and Monte Carlo model for determining the theoretical price of options, *Bulletin of Scientific conferences*, **1–2** (2016), 47–49.
- [3] Paul C. Bressloff Generalized Itô’s lemma and the stochastic thermodynamics of diffusion with resetting, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **57** (2024).

An Operator-Spline Approach for the Numerical Solution of Boundary Value Problems for the Euler–Poisson–Darboux Equation with Singular Coefficients

Sh.T. KARIMOV¹, E.R. ISLAMOV²

^{1,2}Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

¹shaxkarimov@gmail.com, ²e.islamov1986@gmail.com

In the domain $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, let us consider the following hyperbolic equation with a singular coefficient:

$$Lu \equiv u_{tt} + \frac{2\beta}{t}u_t - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

where $0 < \beta < 1/2$ is a given constant. For equation (1), we investigate the problem of finding a regular solution that satisfies the following weighted initial conditions:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\beta} u_t(x, t) = \psi(x), \quad (2)$$

and the homogeneous boundary conditions:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3)$$

To this end, we consider the following auxiliary problems. The first problem consists of finding a function $u_1(x, t)$ satisfying:

$$Lu_1 \equiv u_{1tt} + \frac{2\beta}{t}u_{1t} - u_{1xx} = 0, \quad (4)$$

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_{1t}(x, t)|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

$$u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0, \quad (6)$$

and the second problem for $u_2(x, t)$ is defined by:

$$Lu_2 \equiv u_{2tt} + \frac{2\beta}{t}u_{2t} - u_{2xx} = 0, \quad (7)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\beta} u_{2t}(x, t) = \psi(x), \quad (8)$$

$$u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0. \quad (9)$$

Theorem 1. Let $\alpha > 0$, $\eta > -1/2$, and $f(x) \in C^2(0, b)$ for $b > 0$. If the function $x^{2\eta+1}f(x)$ is integrable at the origin and satisfies the condition $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1}f'(x) = 0$, then the following commutativity relation holds:

$$B_{\eta+\alpha}^x I_{\eta,\alpha}^x f(x) = I_{\eta,\alpha}^x B_{\eta}^x f(x),$$

where B_{η}^t is the Bessel operator and $I_{\eta,\alpha}f(x)$ is the Erdélyi–Kober operator defined respectively as:

$$B_{\eta}^t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\eta+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} = t^{-(2\eta+1)} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{2\eta+1} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

$$I_{\eta,\alpha}f(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} f(t) dt,$$

where $\alpha > 0$ and $\eta > -1$. The proof of this theorem can be found in [1].

In problem (4)–(6) we seek the unknown function $u_1(x, t)$ in the form $u_1(x, t) \equiv I_{-1/2, \beta}^t v_1(x, t)$, which reduces the original singular problem to the following regular problem:

$$v_{1tt} - v_{1xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (10)$$

$$v_1(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad v_{1t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (11)$$

$$v_1(0, t) = v_1(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

where $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1/2)}{\sqrt{\pi}} \varphi(x)$.

The regular problem (10)–(12) is solved numerically on a discrete grid $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n; t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, k\}$. Utilizing the numerical results and the cubic spline-based approximation of the Erdélyi–Kober operator developed in [2], we construct the approximate solution $y_1(x, t)$ for the auxiliary problem (4)–(6) on the grid $\omega_{h\tau}$.

Theorem 2. Let $u_1(x, t)$ be the solution to problem (4)–(6), and let $y_1(x, t)$ be its approximate solution on the grid $\omega_{h\tau}$. Furthermore, let $v_1(x, t)$ be the exact solution to the regular problem (10)–(12). Then, the following inequality holds:

$$\|u_1(x, t) - y_1(x, t)\| \leq \frac{5\sqrt{\pi}}{384\Gamma(\beta+1/2)} \left(\|v_1^{(4)}(x, \tau)\| \tau^4 + M_1(\tau^2 + h^2) \right),$$

where M_1 is a constant independent of the grid steps h and τ .

To solve Problem (7)–(9), we employ the following lemma, whose proof is given in [3].

Lemma 3. If a function $u_1(x, t; 1 - \beta)$ satisfies the equation $L_{1-\beta}(u_1(x, t)) = 0$ and the initial condition (5), then the function $u_2(x, t) = t^{1-2\beta}u_1(x, t; 1 - \beta)$ for $\beta < 1/2$ satisfies the equation $L_{\beta}(u_2(x, t)) = 0$ and the following conditions:

$$u_2(x, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{2\beta} u_{2t}(x, t) = (1 - 2\beta)\varphi(x).$$

According to Lemma 1, the approximate solution $\tilde{u}_1(x, t)$ for the auxiliary problem (4)–(6) is obtained by replacing $\varphi(x)$ with $\frac{\psi(x)}{1-2\beta}$ and substituting β with $1 - \beta$. Consequently, the approximate solution to problem (7)–(9) is determined as: $y_2(x, t) \approx t^{1-2\beta}\tilde{u}_1(x, t)$.

By utilizing the approximate solutions $y_1(x, t)$ and $y_2(x, t)$ of the auxiliary problems (4)–(6) and (7)–(9), the final solution to the original problem (1)–(3) is constructed as:

$$u(x, t) \approx y_1(x, t) + y_2(x, t).$$

Numerical results indicate that the proposed operator-spline approach increases the computational accuracy by more than 1000 times (up to the fourth order of magnitude) compared to direct finite-difference methods applied to the singular equation without regularization transformations.

Funding: This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Keywords: Euler–Poisson–Darboux equation, singular coefficients, boundary value problem, Erdélyi–Kober operator, Bessel operator, operator-spline approach, numerical solution.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Urinov A.K., Sitnik S.M., Shishkina E.L., Karimov Sh.T. *Fractional integrals and derivatives (generalizations and applications)*, Farg’ona, (2022). (in Russian)
- [2] Karimov Sh.T., Islamov E.R. Approximation of the Erdélyi–Kober Operator Using Cubic Spline Interpolation, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:9 (2024), 4534–4547.
- [3] Urinov A.K., Karimov Sh.T. *Erdélyi–Kober operators and their applications to partial differential equations*, Farg’ona, (2021). (in Russian)

Spatial Generalization of Machine Learning in Mineral Prospectivity Modeling

B.B. KHUDAIBERGEN¹, A.N. TEMIRBEKOV², S.E. KASENOV³

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

¹secdet29@gmail.com, ²almastemir86@gmail.com, ³syrym.kasenov@gmail.com

Abstract. Recent advances in mineral prospectivity modeling demonstrate that machine learning algorithms significantly outperform conventional statistical approaches when integrating multisource geospatial datasets. In particular, ensemble-based methods such as Random Forest and regression trees have shown strong predictive capability in complex geological environments [1]. Furthermore, gradient boosting frameworks, especially XGBoost, provide improved accuracy and scalability for high-dimensional geospatial problems [2]. However, despite high reported prediction metrics, many studies rely on random cross-validation schemes that may overestimate model performance due to spatial autocorrelation.

To address this limitation, we propose a spatially explicit evaluation framework for mineral prospectivity prediction across four geological subzones using integrated geochemical, geophysical, and morphometric predictors. Model performance is assessed using a Leave-One-Subzone-Out (LOSO) validation strategy, which explicitly tests spatial generalization by training models on three subzones and evaluating them on the unseen fourth subzone. This approach follows recommendations for spatial cross-validation in geographically structured datasets [3].

We compare XGBoost, Random Forest, Decision Tree Regressor, Linear Regression, Ridge, and Elastic Net models. Results demonstrate that ensemble-based methods consistently achieve superior predictive accuracy and improved spatial transferability across subzones, while regularized linear models provide enhanced interpretability and stability. The proposed LOSO framework enables robust assessment of model generalization to new geological areas and reduces the risk of overly optimistic accuracy estimates.

These findings highlight the importance of spatially structured validation in mineral exploration studies and provide a transferable methodological framework for geospatial machine learning applications in mineral prospectivity mapping.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (No. BR 27100483 “Development of predictive exploration technologies for identifying ore-prospective areas based on data analysis from the unified subsurface user platform ”Minerals.gov.kz” using artificial intelligence and remote sensing methods”).

Key words: Mineral prospectivity mapping; spatial generalization; leave-one-subzone-out validation; multisource geospatial data; machine learning; XGBoost; Random Forest; spatial cross-validation; model transferability; geochemical and geophysical predictors.

2020 Mathematics Subject Classification: 62M30, 68T07, 86A32

References

- [1] Rodríguez-Galiano V.F., Sánchez-Castillo M., Chica-Olmo M., Chica-Rivas M. Machine learning predictive models for mineral prospectivity: An evaluation of neural networks, random forest, regression trees and support vector machines, *Ore Geology Reviews*, 71 (2015), 804–818.
- [2] Carranza E.J.M., Laborte A.G. Random forest predictive modeling of mineral prospectivity, *Ore Geology Reviews*, 71 (2015), 804–818.
- [3] Roberts D.R., Bahn V., Ciuti S., Boyce M.S., Elith J., Guillerá-Arroita G., Hauenstein S., Lahoz-Monfort J.J., Schröder B., Thuiller W., Warton D.I., Wintle B.A., Hartig F., Dormann C.F. Cross-validation strategies for data with temporal, spatial, hierarchical, or phylogenetic structure, *Ecography*, 40 (2017), 913–929.

Multidimensional Markov Modeling of Investment Effects in the Kazakhstan Economy

S. KERIMKHULLE¹, A. ADALBEK²

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

kerimkul_sye@enu.kz, adalbek_a@enu.kz

We present an applied stochastic-computational framework for forecasting intersectoral effects of investments in the Kazakhstan economy using multidimensional Markov chains. The empirical basis consists of annual input–output time series (1995–2018) aggregated to key sectors relevant for investment propagation (agriculture; food products; chemicals; wholesale and retail trade). Multivariate Markov chain models for categorical sequences provide a natural tool for such data-driven forecasting tasks [1,3].

Data discretization and state construction. Let $y_t^{(r)}$ denote the observed output (in current USD, million) of sector $r \in \{1, \dots, d\}$ at year t . Since the Markov model in [1] operates on categorical states, each sectoral series is discretized into m ordered levels. For each sector r , define thresholds $\tau_0^{(r)} < \tau_1^{(r)} < \dots < \tau_m^{(r)}$ (e.g., based on empirical quantiles or equal-frequency bins) and encode

$$X_t^{(r)} = \ell \iff \tau_{\ell-1}^{(r)} \leq y_t^{(r)} < \tau_\ell^{(r)}, \quad \ell = 1, \dots, m. \quad (1)$$

The multidimensional categorical state is then

$$\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}) \in \{1, \dots, m\}^d.$$

First-order model (applied estimation). We model the dynamics by a multivariate first-order Markov chain

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} = j \mid \mathbf{X}_t = i) = p_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}^d, \quad (2)$$

where $P = (p_{ij})$ is estimated from the observed transitions of $\mathbf{X}_t$. Let n_{ij} be the number of transitions $i \rightarrow j$ in the sample; the maximum-likelihood estimator is

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}, \quad \hat{p}_{ij} \geq 0, \quad \sum_j \hat{p}_{ij} = 1. \quad (3)$$

Denote by $\boldsymbol{\pi}_t$ the distribution of $\mathbf{X}_t$. Forecasting in categorical space is performed via

$$\boldsymbol{\pi}_{t+h} = \boldsymbol{\pi}_t \hat{P}^h, \quad h \geq 1, \quad (4)$$

which yields multi-step probabilities of sectoral regimes (low/medium/high, etc.).

Higher-order (delayed) dependence used in the article. To capture delayed investment effects, we use a k -th order Markov specification (in the spirit of higher-order constructions [2]):

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} = x \mid \mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_0) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} = x \mid \mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_{t-k+1}). \quad (5)$$

Computationally, (5) is converted to a first-order chain on the expanded state space

$$\mathbf{Z}_t = (\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_{t-k+1}),$$

so that standard matrix-based forecasting (4) applies.

Mapping categorical forecasts to economic magnitudes. To obtain forecasts in original units, we attach to each categorical level ℓ a representative value, e.g.,

$$c_\ell^{(r)} = \mathbb{E}\left[y_t^{(r)} \mid X_t^{(r)} = \ell\right] \quad (\text{estimated by sample means within bins}).$$

Hence, the h -step-ahead expected output of sector r is approximated by

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[y_{t+h}^{(r)}\right] = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}^d} (c_{j_r}^{(r)}) \pi_{t+h}(j), \quad (6)$$

where j_r denotes the r -th component of the multidimensional state j .

Applied evaluation protocol. Predictive performance is assessed by a rolling one-step scheme. Let $\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}$ be the most probable predicted state under (2) or (5). The categorical accuracy is

$$\text{Acc} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{1}\left\{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1} = \mathbf{X}_{t+1}\right\}. \quad (7)$$

In our experiments, higher-order models (notably $k = 5$) better reproduce delayed responses of downstream sectors, consistent with multivariate economic forecasting applications [3].

Results (Kazakhstan case). The estimated transitions demonstrate pronounced propagation from agriculture-related investment regimes to downstream production regimes. In particular, an increase in agricultural investment is associated with a higher probability of moving to medium/high output states in food production, chemicals, and trade in subsequent years. These applied findings align with our earlier input–output analyses of Kazakhstan sectors [4] and support the use of multi-dimensional Markov modeling as a practical computational tool for decision-making in investment planning and sectoral policy.

Funding: This research was funded by the L.N. Gumilyov Eurasian National University (Project No. AP26196337).

Keywords: multidimensional Markov chain, higher-order Markov model, input–output data, investment effects, Kazakhstan economy.

2020 Mathematics Subject Classification: 60J10, 91B84, 62M10

References

- [1] Ching W.K., Fung E.S., Ng M.K. A multivariate Markov chain model for categorical data sequences and its applications in demand predictions, *IMA Journal of Management Mathematics*, **13**(3) (2002), 187–199.
- [2] Ching W.K. et al. A Higher-Order Markov Model for the Newsboy’s Problem, *Journal of the Operational Research Society*, **54**(3) (2003), 291–298.
- [3] Gjika E., Basha L., Allka X., Ferrja A. Predicting the Albanian economic development using multivariate Markov chain model, *Business and Management* 2020 (2020).
- [4] Kerimkhulle S., Aitkozha Z., Saliyeva A., Kerimkulov Z., Adalbek A., Taberkhan R. Agriculture, hunting, forestry, and fishing industry of Kazakhstan economy: Input-output analysis, in: *Computational Methods in Systems and Software*, Springer (2023), 786–797.

Numerical solution of computational hydrodynamics problems using the FEniCS software package

B.B. KHUDAIBERGEN¹, A.N. TEMIRBEKOV²

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

¹secdet29@gmail.com, ²almastemir86@gmail.com

Unsteady incompressible viscous flows in curved pipe geometries play a significant role in engineering applications due to the development of secondary motions and asymmetric flow structures. Experimental and CFD investigations of 45° and 90° elbows with different curvature radii have demonstrated the strong influence of bend geometry on erosion patterns and flow redistribution [1]. These studies highlight the importance of accurately modeling flow behavior downstream of sharp bends.

The propagation of asymmetry in pipe flows downstream of a 90° sharp elbow bend has been analyzed in detail in [2], where the evolution of non-uniform velocity profiles and secondary structures was investigated. The results confirm that sharp curvature induces persistent asymmetric flow patterns that extend significantly downstream of the bend.

Furthermore, experimental studies of Dean-vortex oscillations downstream of a 90° bend [3] have revealed complex unsteady secondary flow dynamics and swirl-switching phenomena in turbulent regimes. These findings provide physical motivation for numerical investigation of transient incompressible flow in bent channel geometries.

In this work, the mathematical model is formulated using the unsteady incompressible Navier–Stokes equations

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot (2\mu \varepsilon(u)) + \nabla p = f,$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

where u denotes the velocity field and p the pressure. A parabolic inflow profile is prescribed, no-slip conditions are imposed on the walls, and pressure is fixed at the outlet to remove the constant indeterminacy. The Reynolds number is defined as

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu},$$

where U and L denote characteristic velocity and length scales of the flow.

For the numerical approximation, the Chorin–Temam incremental pressure correction scheme (IPCS) is applied. The convective term is discretized in skew-symmetric form to enhance discrete energy stability, and spatial approximation is performed using the Taylor–Hood finite element pair P_2 – P_1 , satisfying the Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi condition.

Computational experiments are carried out for Reynolds numbers $Re = 2000, 6000, 10000$, and 14000. The evolution of the temporal residual norm $\|u^{n+1} - u^n\|$ and the divergence norm $\|\nabla \cdot u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$ is analyzed to evaluate numerical stability and preservation of incompressibility. The results demonstrate the robustness of the projection scheme and reproduce qualitatively the asymmetric and secondary flow behavior observed in experimental investigations of bent pipe flows.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490027).

Keywords: Navier–Stokes, unsteady viscous flow, projection method (IPCS), finite element method, reynolds number effects.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Faris S.B., Thiana A.S., Siamack A.S. Experimental and CFD investigations of 45 and 90 degrees bends and various elbow curvature radii effects on solid particle erosion, *Wear*, **476** (2021), 203646.
- [2] Blaž M., Klemen C., Iztok T. Asymmetry Propagation in a Pipe Flow Downstream of a 90° Sharp Elbow Bend, *Applied Sciences*, **14** (2024), 7895.
- [3] Bilal B.H., Julie A., Pierre B., Sébastien G., Didier B., Emmanuel T., Romain M. Experimental investigation of Dean-vortices oscillation downstream of a 90° Bend, *Experimental Thermal and Fluid Science*, **163** (2025), 111402.

Probabilistic Modeling of Gold Mineralization Using Deep Learning: A Case Study of the Western Kalba Region

B.B. KHUDAIBERGEN¹, N.M. TEMIRBEKOV², A.N. TEMIRBEKOV³,
S.E. KASENOV⁴

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

¹secdet29@gmail.com, ²temirbekov@rambler.ru, ³almastemir86@gmail.com,

⁴syrym.kasenov@gmail.com

Abstract. This study develops a probabilistic deep learning framework for modeling the spatial distribution of gold mineralization within the Western Kalba region. The problem is formulated as a spatial binary classification task, where the target variable represents the presence or absence of mineralization at a given location.

The input data consist of a structured geospatial dataset integrating geochemical indicators, geophysical measurements, morphometric terrain parameters, and remote sensing-derived variables. Similar multilayer geospatial integration strategies have been successfully applied in deep learning-based mineral prospectivity mapping [1]. In the present study, each spatial observation is represented by a multidimensional feature vector constructed from heterogeneous geological predictors.

To capture nonlinear relationships among predictors, a deep fully connected neural network (multilayer perceptron) is employed to estimate the conditional probability of mineralization occurrence. Deep learning architectures have demonstrated strong predictive capability in mineral prospectivity assessment, particularly when modeling complex geological systems [2]. The model is trained on known mineralized locations and validated using independent spatial subsets to evaluate robustness and generalization performance.

The trained network produces a continuous probability surface $\mathbb{P}(\text{ore} \mid X_1, \dots, X_N)$, enabling the construction of a mineral prospectivity map with values ranging from 0 to 1 across the study area. High-probability zones are delineated through threshold-based classification and spatial aggregation procedures. Comparable probabilistic mapping approaches using deep neural networks have been reported to improve spatial prediction accuracy over traditional statistical models [3].

The results demonstrate that deep learning applied to tabular geospatial datasets provides an effective and scalable framework for objective mineral prospectivity modeling and exploration target delineation in structurally controlled gold-bearing regions.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (No. BR 27100483 “Development of predictive exploration technologies for identifying ore-prospective areas based on data analysis from the unified subsurface user platform ”Minerals.gov.kz” using artificial intelligence and remote sensing methods”).

Key words: Deep learning, multilayer perceptron, mineral prospectivity mapping, probabilistic modeling, tabular geospatial data, gold mineralization, spatial classification, western kalba region.

2020 Mathematics Subject Classification: 62M30, 68T07, 86A32

References

- [1] Zuo R., Carranza E.J.M., Wang J. Deep learning and its application in mineral prospectivity mapping, *Natural Resources Research*, (2019) 28, 1–18.
- [2] Li S., Zuo R., Carranza E.J.M. Convolutional neural networks for mineral prospectivity mapping using multisource geospatial data, *Computers & Geosciences*, (2022) 160, 105048.
- [3] Chen Y., Ma X., Li H. Deep convolutional neural network-based mineral prospectivity mapping. *Ore Geology Reviews*, (2023) 156, 105689.

Mathematical Modeling of Adaptive Processes in High-Load Educational Environments Based on Aqyl Battle

A.A. KULATAY¹, D.S. ZHAISANOVA²

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹aibolat.kulatay@gmail.com, ²zhaisanova.dinara@kaznu.kz

Introduction. The digitalization of education necessitates a transition from static models to dynamic systems capable of adapting to the latent characteristics of learners in real-time. Modern research confirms that the mathematical precision of adaptation algorithms directly correlates with long-term user engagement [2, 4, 7]. However, the integration of game mechanics into the educational process faces challenges such as statistical bias and risks of demotivation, which are detailed in several recent studies [1, 5, 9].

Formalization of the Adaptive Model (IRT). To estimate the user's latent ability θ and item difficulty b within the Aqyl Battle system ($N > 500,000$), a stochastic three-parameter logistic model (3PL) is applied. The probability of a successful response from user i to item j is defined as follows:

$$P(X_{ij} = 1|\theta_i, a_j, b_j, c_j) = c_j + \frac{1 - c_j}{1 + e^{-a_j(\theta_i - b_j)}} \quad (1)$$

where a_j is the discrimination parameter, b_j is the difficulty level, and c_j is the pseudo-guessing parameter.

Mathematical optimization of the system involves maximizing the Test Information Function $I(\theta)$, which determines the precision of the ability estimation:

$$I(\theta, \text{test}) = \sum_{j=1}^n \frac{[P'_j(\theta)]^2}{P_j(\theta)Q_j(\theta)} \quad (2)$$

Cognitive Load and Entropy Analysis. From the perspective of information theory, the interaction between a user and the content can be represented as signal transmission in a noisy channel. According to modern learning analytics approaches [6, 10], the maximum learning rate is achieved when the entropy of choice is balanced. We introduce the definition of the optimal system state:

Definition 1. The state of stochastic resonance (or "flow") in an educational environment is defined as a state where the mathematical expectation of success $E[P(\theta)] \approx 0.5$. This minimizes the probability of cognitive failure.

Predictive Churn Modeling (XGBoost). To manage the user life cycle on large-scale data, we implemented a gradient boosting decision tree model. The loss function, accounting for regularization, is expressed as:

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_i l(\hat{y}_i, y_i) + \sum_k \Omega(f_k), \quad \Omega(f) = \gamma T + \frac{1}{2} \lambda \|w\|^2 \quad (3)$$

where T is the number of leaves and w is the leaf weights. This framework allows for predicting the risk of system abandonment with an accuracy of $AUC = 0.89$, consistent with ensemble methods in intelligent tutoring systems [4].

Empirical Results and Causal Analysis. To verify the hypotheses, the Difference-in-Differences (DiD) method was utilized on a dataset of 100 million interactions.

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot Group_i + \beta_2 \cdot Time_t + \beta_3 \cdot (Group_i \times Time_t) + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

The implementation of these algorithms demonstrated a statistically significant increase in key metrics (Table 1).

Table 1: Statistical performance indicators of the Aqyl Battle system

Metric	Value (Before/After)	Net Effect	p-value
Retention (Day 30)	11.4% → 38.7%	+12.4%	$p < 0.01$
Learning Accuracy	52.0% → 67.0%	+15.0%	$p < 0.05$
Win Rate Balance	0.32 → 0.51	$\mu = 0.50$	—
STEM Engagement	19.0% → 47.0%	+28.0%	$p < 0.01$

Conclusion. The developed model proves that transitioning from empirical gamification to stochastic modeling (IRT, DiD, XGBoost) enables effective scaling of educational outcomes. The application of these methods ensures the scientific validity of personalization, as confirmed by results from recent studies in high-load educational systems [5, 8, 10].

Keywords: stochastic models, big data, causal inference, gamification, gradient boosting.

Classification (MSC 2020): 62P15, 91E45, 68T09, 62J05

References

- [1] Almeida C., et al. Negative Effects of Gamification in Education Software, *Systematic Mapping*, (2023).
- [2] Hebebcı M.T., Alan S. *Gamification in education: An overview of the literature*, ISRES Publishing, (2021), 174–194.
- [3] Kalogiannakis M., et al. Gamification in Science Education: A Systematic Review, *Education Sciences*, **11**:1 (2021).
- [4] Chen X., et al. Predictive Analytics in Higher Education, *Journal of Educational Data Mining*, **15**:2 (2024).
- [5] Zainuddin Z., et al. The dark side of gamification: A systematic review, *Information and Management*, **61**:1 (2024).
- [6] Baker R.S., et al. Stochastic models in Learning Analytics, *Computers and Education: AI*, **5** (2023).
- [7] Liu M., et al. Bayesian Knowledge Tracing and IRT Analysis, *Int. Journal of AI in Education*, **34**:2 (2024).
- [8] Wang S., et al. Scalable Causal Inference in Educational Platforms, *Proc. ACM Learning at Scale*, (2025), 112–125.
- [9] Deterding S., et al. From Game Design Elements to Gamefulness, *MindTrek*, (2011), 9–15.
- [10] Zhang L., et al. Mathematical optimization of adaptive learning paths, *Expert Systems with Applications*, **238** (2024).

A neural network method for solving the fractional Lane-Emden equation based on orthogonal Laguerre polynomials

R.I. PAROVIK

*Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
Paratunka, Russia*

parovik@ikir.ru

The classical nonlinear singular Lane-Emden ordinary differential equation with initial conditions (the Cauchy problem) arises in problems describing the temperature field changes of a spherical gas cloud under the influence of mutual attraction in stars. It was introduced by Jonathan Lane [1] to model the temperature of the Sun and later studied by Robert Emden in the context of the theory of polytropic gas spheres [2].

However, this equation did not take into account the memory effect of the process, which may correspond, for example, to the viscoelastic properties of stellar matter, when the reaction of the medium to changes in density or pressure occurs not instantaneously, but with a delay. When memory effects are taken into account, we proceed to the following Cauchy problem:

$$\partial_{0x}^{\alpha} y(x) + \frac{2}{x} y'(x) + 4 \left(2e^{y(x)} + e^{y(x)/2} \right) = 0, y(0) = A, y'(0) = B, \quad (1)$$

where $y(x)$ is the dimensionless density (temperature or pressure related to density through the equations of state), $x > 0$ is the dimensionless radius, the distance from the center of the star, A and B are given constants, and the fractional derivative is understood in the Gerasimov-Caputo sense

$$\partial_{0x}^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{y''(s) ds}{(x-s)^{\alpha-1}}, 1 < \alpha < 2,$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the Euler gamma function.

The Cauchy problem (1), when $\alpha = 2$ and $A = B = 0$, transforms into the classical Cauchy problem for the Lane-Emden equation, for which an analytical solution is known [3]:

$$y(x) = -2 \ln(1 + x^2).$$

However, in the general case, the solution is sought using numerical methods [4,5].

In our view, the most promising method for solving such problems is neural network methods. In particular, the author's work [6] examines neural network methods based on orthogonal polynomials. Therefore, in this paper, we investigate the Cauchy problem (1) using a neural network method based on Laguerre orthogonal polynomials, which yields good results for solving singular equations. The neural network algorithm was implemented in the Python programming environment using the PyTorch library [7]. The paper also compares the obtained results with test examples that have an exact solution, as well as with the numerical algorithm of the implicit Grunwald-Letnikov method for the Cauchy problem (1).

It is shown that as the order of the fractional derivative decreases, the neural network becomes more complex. This complexity leads to an increase in the order of the Laguerre orthogonal polynomial, as well as the number of collocation points. Therefore, the algorithm's execution time increases. However, this overhead can be reduced by parallelizing the neural network algorithm on a CPU or GPU.

Funding: The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS (reg. No. 124012300245-2).

Keywords: Lane-Emden fractional equation, Gerasimov-Caputo derivative, Laguerre orthogonal polynomial, neural network, hyperparameters, Python.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A08, 65L60, 34A34, 33C45, 68T07

References

- [1] Lane J. H. On the Theoretical Temperature of the Sun; under the Hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its Internal Heat, and depending on the Laws of Gases as known to Terrestrial Experiment, *American Journal of Science and Arts*, **50**: 148 (1870). 57.
- [2] Emden R. *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Warmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme*, BG Teubner (1907).
- [3] Parand K., Dehghan M., Rezaei A. R., Ghaderi S. An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane–Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method, *Computer Physics Communications*, **181**:6 (2010), 1096-1108.
- [4] Nasab A.K., Atabakan Z.P., Ismail A.I., Ibrahim R. W. A numerical method for solving singular fractional Lane–Emden type equations, *Journal of King Saud University-Science*, **30**:1 (2018), 120-130.
- [5] Saadatmandi A., Ghasemi-Nasrabady A., Eftekhari A. Numerical study of singular fractional Lane–Emden type equations arising in astrophysics, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, **40**:3 (2019), 27.
- [6] Parovik R. Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations Based on Orthogonal Polynomial Neural Networks. *Algorithms*. **19**:1 (2026), 82.
- [7] Shaw Z.A. *Learn Python the Hard Way*, Addison-Wesley Professional, Boston, MA, USA, (2024).

Numerical Solving a Dynamic Coupled Thermoelasticity Problem

A.M. POLATOV¹, A.M. IKRAMOV², U. ADAMBAEV³, G. WEI⁴,
S. P. JUMANIYOZOV⁵

^{1,2,3,4}National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent,
Uzbekistan

⁵Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan
asad3@yandex.com

A finite element approach is proposed for the numerical solution of a one dimensional dynamic coupled thermoelasticity problem under transient thermal loading. The formulation is based on the classical theory of thermoelasticity and accounts for the interaction between mechanical and thermal fields. The mechanical behavior of the rod is governed by the dynamic equilibrium equation, while the thermal field evolution is described by the heat conduction equation with thermoelastic coupling.

The coupled problem is formulated as follows. The displacement field satisfies the dynamic equilibrium equation

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2)$$

where λ and μ - are the Lamé constants, and ρ , K and c are the mass density, thermal conductivity and specific heat capacity of the rod. Initial conditions of the rod are:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_0 \quad (3)$$

and boundary conditions are:

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_x(L, t) = 0, \quad T(0, t) = T_0, \quad T(L, t) = T_0 e^{-t/t_0} \quad (4)$$

where σ_{xx} – is the axial stress of the rod, defined as

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) \quad (5)$$

The thermal field is governed by the transient heat conduction equation with coupling to the mechanical field. Appropriate initial and boundary conditions corresponding to a fixed–free rod subjected to non stationary thermal loading are imposed.

Since the coupled system admits no closed form analytical solution, a numerical solution is obtained using the finite element method based on the Galerkin approach. The spatial domain is discretized into a finite number of elements, resulting in a system of ordinary differential equations for the temperature field and a system of second order differential equations for the displacement field.

Time integration of the mechanical equations is performed using the implicit Newmark method, which ensures unconditional stability for appropriate parameter selection. The transient heat conduction equation is integrated in time using the Crank–Nicolson scheme, providing second order accuracy and numerical stability. At each time step, the temperature field is first updated, after which the mechanical response is computed using the updated thermal load.

Numerical experiments demonstrate physically consistent thermomechanical behavior under transient thermal loading. Temperature gradients induce thermal strains, leading to a redistribution of stresses along the rod. Maximum stresses are observed near the fixed boundary, while thermal elongation occurs at the free end. As time progresses, the temperature field becomes more uniform and the stress level decreases, indicating convergence toward a new equilibrium state. The obtained results are in good agreement with the classical theory of thermoelasticity, confirming the reliability of the proposed numerical approach.

References

- [1] Biot M. A. *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, Applied Physics, vol. 27, no. 3, pp. 240–253, 1956.
- [2] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 6th ed., St. Petersburg: Piter, 2008.

Development of an AI Agent for Navigation of Academic Policy Documents: Case Study of Al-Farabi Kazakh National University

T.S. SARSEMBAYEVA¹, A.A. OSKENBAYEVA²

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹sarsembayeva.talshyn@gmail.com, ²oskenbaeva2003@gmail.com

The rapid digital transformation of higher education institutions has significantly increased the volume, structural heterogeneity, and semantic complexity of academic regulatory documentation. Universities operate under multilayered systems of academic policies regulating student mobility, academic leave procedures, credit transfer, thesis defense regulations, scholarship allocation, and quality assurance mechanisms.

Let us formally define the institutional document space as a corpus:

$$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

where each document d_i consists of structured clauses, normative constraints, and procedural descriptions. Given a user query q , the objective of the AI agent is to generate an optimal response y grounded in institutional regulations:

$$y^* = \arg \max_y P(y \mid q, \mathcal{D}),$$

subject to the regulatory consistency constraint: $\mathcal{C}(y, \mathcal{D}) = 1$, where $\mathcal{C}$ is a verification function ensuring alignment with official policy documents.

The transformer architecture introduced in [1] established the foundation for modern natural language processing systems. Its core mechanism is scaled dot-product attention:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V,$$

where Q , K , and V denote query, key, and value matrices. This mechanism enables modeling of long-range dependencies, which is essential for interpreting complex regulatory clauses.

Large language models approximate the conditional probability distribution over token sequences [2]:

$$P(y | q) = \prod_{t=1}^T P(y_t | y_{<t}, q).$$

The broader theoretical framework of foundation models and their cross-domain impact is discussed in [3]. Advanced generative systems such as GPT-4 demonstrate high-level reasoning capabilities suitable for complex institutional tasks [4]. Bidirectional encoder representations such as BERT significantly improved contextual semantic modeling of textual data [5].

However, purely parametric language models may generate ungrounded responses. To enhance factual reliability, retrieval-augmented generation (RAG) was proposed [6]. This hybrid architecture integrates external document retrieval:

$$P(y | q, \mathcal{D}) = \sum_{d \in \mathcal{D}_k} P(y | q, d)P(d | q),$$

where $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ represents the top- k retrieved documents selected via dense semantic search [7]. Document embeddings are obtained through transformer-based encoders:

$$e(d_i) = f_\theta(d_i), \quad e(q) = f_\theta(q),$$

and semantic similarity is computed using cosine similarity:

$$\text{sim}(q, d_i) = \frac{e(q) \cdot e(d_i)}{\|e(q)\| \|e(d_i)\|}.$$

Conversational AI systems such as LaMDA demonstrate structured dialogue modeling capabilities [8]. Document-level question answering approaches further enable effective processing of long and structured texts [9], which is particularly relevant for academic regulatory documentation.

The training objective of the proposed AI agent can be formulated as a composite optimization problem: $\mathcal{L} = \lambda_1 \mathcal{L}_{gen} + \lambda_2 \mathcal{L}_{retr} + \lambda_3 \mathcal{L}_{cons}$, where $\mathcal{L}_{gen}$ is the language modeling loss, $\mathcal{L}_{retr}$ is the retrieval relevance loss, and $\mathcal{L}_{cons}$ penalizes regulatory inconsistencies.

System performance is evaluated using standard information retrieval and generation metrics:

$$\text{Precision@k} = \frac{\text{Relevant documents in top } k}{k},$$

$$F1 = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}},$$

as well as Exact Match and grounded response consistency rates. Comprehensive experimental analyses of advanced language models highlight both reasoning strengths and practical limitations in real-world deployment [10].

This research proposes the development of a domain-adapted artificial intelligence agent for intelligent navigation and interpretation of academic policy documents at Al-Farabi Kazakh National University. The methodological framework integrates transformer-based semantic encoding,

dense passage retrieval, retrieval-enhanced generation mechanisms, and constraint-based validation strategies.

The expected results demonstrate that mathematically grounded, domain-constrained AI systems can significantly enhance accessibility of academic information, reduce administrative workload, improve regulatory transparency, and support digital governance transformation within higher education institutions.

The obtained results confirm that the proposed AI agent ensures stable semantic retrieval performance, improved response grounding, and reduced hallucination frequency in comparison with purely generative baseline models. Quantitative evaluation demonstrates an increase of Precision@5 from 0.68 to 0.87 and F1-score from 0.72 to 0.89. The hallucination rate decreased from 21% to 7%. Qualitative analysis further shows stronger regulatory consistency and improved interpretability of generated answers. These findings validate the effectiveness of integrating transformer-based architectures with retrieval-enhanced generation and constraint-based verification for institutional policy navigation tasks.

Keywords: artificial intelligence agent, academic policy documents, large language model, retrieval-augmented generation, digital governance.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 68T50, 68P20

References

- [1] Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., et al. Attention Is All You Need, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30 (2017), 5998–6008.
- [2] Brown T., Mann B., Ryder N., et al. Language Models are Few-Shot Learners, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33 (2020), 1877–1901.
- [3] Bommasani R., Hudson D., Adeli E., et al. On the Opportunities and Risks of Foundation Models, *arXiv preprint*, arXiv:2108.07258 (2021).
- [4] OpenAI. GPT-4 Technical Report, *arXiv preprint*, arXiv:2303.08774 (2023).
- [5] Devlin J., Chang M.-W., Lee K., Toutanova K. BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding, *NAACL-HLT* (2019), 4171–4186.
- [6] Lewis P., Perez E., Piktus A., et al. Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33 (2020), 9459–9474.
- [7] Karpukhin V., Oguz B., Min S., et al. Dense Passage Retrieval for Open-Domain Question Answering, *EMNLP* (2020), 6769–6781.
- [8] Thoppilan R., De Freitas D., Hall J., et al. LaMDA: Language Models for Dialog Applications, *arXiv preprint*, arXiv:2201.08239 (2022).
- [9] Guo Z., Pasunuru R., Bansal M. Document-Level Question Answering via Hierarchical Graph Representation, *ACL* (2021), 1313–1324.
- [10] Bubeck S., Chandrasekaran V., Eldan R., et al. Sparks of Artificial General Intelligence: Early Experiments with GPT-4, *arXiv preprint*, arXiv:2303.12712 (2023).

R_2^1 — The parabola and similar properties of a cycle in the semi-Euclidean plane

A. SHAMSHIEV

Jizzakh State Pedagogical University, Uzbekistan
abduvalishamshiev@gmail.com

In this work, using the properties of a circle in the Euclidean plane, the equation of a cycle in the semi-Euclidean plane is derived. This study focuses on extending classical geometric methods to semi-Euclidean spaces, which provides new insights into the properties of curves and cycles in non-standard geometries. In particular, it is shown that the geometric locus of the midpoints of chords passing through an arbitrary point located inside or outside the cycle is also a cycle.

Historically, in ancient Greece, the cube was considered the mother of all polyhedral surfaces. Euclidean geometry, being the foundation of classical geometry, served as the origin of all non-Euclidean geometries. After Euclidean geometry on the plane was fully developed and studied, its principles were extended to surfaces with positive and negative curvature. This led first to the emergence of spherical geometry and subsequently to Riemannian and Lobachevskian geometries. The continuation of these methods ultimately resulted in the development of new geometries semi-Euclidean geometries.

Definition 1. If in an affine plane A_2 for vectors $\vec{a}(a_1, a_2)$ and $\vec{b}(b_1, b_2)$ the scalar product is defined as: $(\vec{a}, \vec{b})_1 = a_1b_1$ if $a_1b_1 = 0$, then $(\vec{a}, \vec{b})_2 = a_2b_2$ the affine plane A_2 is called a semi-Euclidean plane.

From the introduced scalar product, it is clear that R_2^1 is a metric plane, partitioned into a semi-Euclidean plane.

Theorem 2. R_2^1 in the semi-Euclidean plane $|AB| = a$ the set of points from which a segment of length a is seen at a constant angle forms a parabola (a cycle).

Proof. Let $M(x, y)$ the point of the desired geometric locus have the coordinates of an arbitrary point, and the endpoints of the segment be $A(a_1, a_2)$ and $B(b_1, b_2)$ – points with coordinates. In this case, the slopes of the lines (MA) and (MB) are equal: Then the slopes of the lines connecting this point with the ends of the segment are equal to:

$$k_1 = \frac{y - a_2}{x - a_1}, \quad k_2 = \frac{y - b_2}{x - b_1}$$

If the constant angle between these lines is denoted as d , the set of points $M(x, y)$ is ultimately described by an equation of the form:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

Here

$$a = \frac{d}{b_1 - a_1}, \quad b = \frac{b_2 - a_2 - d(b_1 + a_1)}{2(b_1 - a_1)}, \quad c = \frac{da_1b_1 - a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 - a_1}.$$

The theorem is proved.

Theorem 3. The geometric locus of points $M(x, y)$ that are the midpoints of all chords of the first cycle (1) passing through the point $A(a, b)$ forms the same cycle.

Proof. For convenience, let us take the cycle equation in the form $y = ax^2$. Through an arbitrary point $M(x, y)$, let us draw a line parallel to the axis (Ox) ; this line intersects the Oy -axis (ordinate axis) at the point $N(0, b)$. It follows that (MA) and (MB) the slopes of the lines are equal: $k_1 = \frac{y-b}{x-a}$, $k_2 = \frac{y-b}{x}$ From the given definition of the cycle: $k_1 - k_2 = \text{const}$. Therefore, we get $y = mx^2 + nx + 1$.

Here: $m = \frac{d}{a}$, $n = -d$, $l = -b$.

The theorem is proved.

Keywords: semi-Euclidean plane, cycle, angle of view, affine plane.

2020 Mathematics Subject Classification: 53A35, 53A04, 53B30

References

- [1] Dolgarev A.I. *Classical Methods in the Differential Geometry of Modular Spaces*, Publishing and Printing Center of Penza State University, Penza (2005).
- [2] Dolgarev A.I. Galilean natural equations of a Euclidean curve. Affine and Galilean concepts, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 14:2 (2010), 20–31.

[3] Yaglom I.M. *The Galilean Principle of Relativity and Non-Euclidean Geometry*, Nauka Publishers, Moscow (1969).

[4] Khachatryan A.V. *Galilean Geometry*, Moscow Center for Continuous Mathematical Education Press, Moscow (2005).

Development of a business process model for university educational activities

A. SMAKHANOVA¹, A. KASSYMOVA², Zh. DZHALBIROVA³,
A. MADELKHANOVA⁴

^{1,3,4}*Kazakh National Technical Research University named after K.I. Satbayev, Almaty, Kazakhstan*

²*Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan*

¹Smakhanova84@mail.ru, ²a.kassymova@satbayev.university, ³Jainagan_1975@mail.ru,
⁴naziko-2009@mail.ru

Modern trends in the digitalization of education require the transformation of university management systems and optimization of internal business processes. Traditional hierarchical models are being replaced by digital ecosystems that improve transparency and efficiency.

This study is devoted to the development of a business process model for university educational activities using BPMN 2.0 notation. Two models are considered: AS-IS (current state) and TO-BE (target state after digitalization). The modeling was carried out using Bizagi Modeler and Camunda Modeler, which allowed visualization of interactions between departments.

The university system is represented as a set of processes:

$$U = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

where P_i – is an individual process such as student admission, organization of classes, or knowledge assessment.

Each process can be described by a transformation function:

$$P_i = (R_i, T_i, J_i) \rightarrow Q_i$$

where R_i – resources (human, material, and informational), T_i – lead time, J_i – input information, Q_i – result (for example, report, assessment, knowledge, diploma, etc.)

The efficiency of each process can be expressed as:

$$E_i = \frac{Q_i}{C_i + T_i}$$

where T_i – time costs, C_i – the cost of implementing the process, Q_i – the quality of the result. The overall effectiveness of the university's educational activities is determined as the weighted average:

$$E_{\text{total}} = \frac{\sum_{i=1}^n W_i E_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$$

If $E_{\text{TO-BE}} > E_{\text{AS-IS}}$, digitalization leads to increased efficiency of educational processes.

Comparative analysis of AS-IS and TO-BE models shows that digitalization significantly reduces process time and improves coordination between departments. The integration of digital tools increases transparency and efficiency of resource allocation.

The results confirm that process and mathematical modeling is an effective tool for improving educational activities and supports the transition to a digital university environment.

Keywords: university, business processes, BPMN, digitalization, efficiency.

References

- [1] Hammer M., Champy J. *Reengineering the Corporation: A Manifesto for Business Revolution*. Alpina Publisher, Moscow (2018).
- [2] Repin V.V., Eliferov V.G. *Process Approach to Management: Business Process Modeling*. Mann, Ivanov & Ferber, Moscow (2020).
- [3] Dumas M., La Rosa M., Mendling J., Reijers H.A. *Fundamentals of Business Process Management*. Springer (2022).
- [4] Object Management Group (OMG). *Business Process Model and Notation (BPMN)*, Version 2.0.2. (2013).

Degenerate Dynamics and Stability Analysis of a Discrete Lotka–Volterra Model on S^4

K.A. SOLIJANOVA

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

kamolasolijanov@gmail.com

Discrete Lotka–Volterra operators on simplices provide a natural framework for modeling competitive interactions in evolutionary dynamics. In the skew-symmetric case, the interaction matrix induces a tournament structure that determines the qualitative behavior of the system [1]. Understanding how algebraic invariants of the interaction matrix determine the local and global dynamics remains a central problem in the theory.

We consider the discrete Lotka–Volterra operator $V : S^4 \rightarrow S^4$ defined by a skew-symmetric matrix $A = (a_{ij})$, where $a_{ij} = -a_{ji}$, given explicitly by

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x'_4 = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x'_5 = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4). \end{cases}$$

We focus on the invariant faces corresponding to the triples $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 5)$, and $(1, 4, 5)$. Each of these triples forms a cyclic triple in the tournament associated with the operator. In this case, each such face admits a unique interior fixed point given by

$$\begin{aligned} C_{125} &= \left(\frac{a_{25}}{\sigma_{125}}, \frac{a_{15}}{\sigma_{125}}, 0, 0, \frac{a_{12}}{\sigma_{125}} \right), & \sigma_{125} &= a_{12} + a_{15} + a_{25}, \\ C_{135} &= \left(\frac{a_{35}}{\sigma_{135}}, 0, \frac{a_{15}}{\sigma_{135}}, 0, \frac{a_{13}}{\sigma_{135}} \right), & \sigma_{135} &= a_{13} + a_{15} + a_{35}, \\ C_{145} &= \left(\frac{a_{45}}{\sigma_{145}}, 0, 0, \frac{a_{15}}{\sigma_{145}}, \frac{a_{14}}{\sigma_{145}} \right), & \sigma_{145} &= a_{14} + a_{15} + a_{45}. \end{aligned}$$

These equilibria form the vertices of the fixed-point card. The orientation of its edges is determined by the principal Pfaffians $\theta_1, \dots, \theta_5$ of the matrix A . In the generic situation, when all Pfaffians are nonzero, the card is fully oriented and all equilibria are isolated. In previous works [2,3], the possible configurations of the fixed-point card, including both fully oriented and partially unoriented (degenerate) cases, were classified according to the signs of the principal Pfaffians. However, this classification was primarily structural and combinatorial, being limited to the description of the graph configuration itself. A complete local dynamical analysis was obtained

only in the fully oriented case. In particular, hyperbolicity of equilibria and their stability type are entirely determined by the signs of the principal Pfaffians.

In contrast, we provide a complete local spectral and dynamical description of a non-generic configuration in which one Pfaffian vanishes and an edge of the fixed-point card loses its orientation. In this situation the previous hyperbolic analysis is no longer sufficient, since a continuum of equilibria appears and non-hyperbolic phenomena arise. We therefore investigate the local dynamics along such a degenerate edge.

We consider the configuration

$$\theta_2 = 0, \quad \theta_3 < 0, \quad \theta_4 < 0.$$

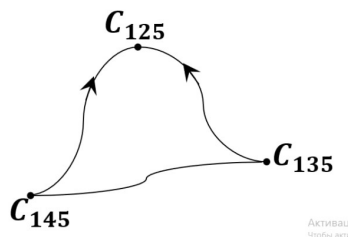


Figure 1: $\theta_2 = 0$, $\theta_3 < 0$, $\theta_4 < 0$

In this case, the edge connecting C_{135} and C_{145} becomes unoriented, and the whole convex hull $\text{conv}\{C_{145}, C_{135}\}$ consists of fixed points (see Fig. 1).

For a point on the degenerate edge we write

$$x = \alpha C_{145} + \beta C_{135}, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Each such point is a fixed point. We analyze the Jacobian matrix $DV(x)$ at points lying on this degenerate edge.

Its spectrum consists of five eigenvalues. Two eigenvalues satisfy

$$\lambda_{1,2} = 1,$$

one corresponding to the tangent direction of the equilibrium manifold inside the simplex and the other arising from the invariance of the simplex constraint $\sum_{i=1}^5 x_i = 1$.

The remaining eigenvalues are given by

$$\lambda_3 = 1 - \alpha \frac{\theta_3}{\sigma_{145}} - \beta \frac{\theta_4}{\sigma_{135}}, \quad \lambda_{4,5} = 1 \pm i\sqrt{Q(\alpha, \beta)},$$

where $Q(\alpha, \beta) > 0$. Since $\theta_3 < 0$ and $\theta_4 < 0$, it follows that

$$\lambda_3 > 1$$

for all α, β satisfying $\alpha, \beta \geq 0$ and $\alpha + \beta = 1$. Moreover,

$$|\lambda_{4,5}| = \sqrt{1 + Q(\alpha, \beta)} > 1.$$

Theorem 1. *Let*

$$\theta_2 = 0, \quad \theta_3 < 0, \quad \theta_4 < 0.$$

Then the edge connecting C_{135} and C_{145} forms a one-dimensional manifold of fixed points. For every point on this manifold the Jacobian matrix has two neutral eigenvalues $\lambda = 1$ and three expanding directions, namely

$$\lambda_3 > 1, \quad |\lambda_{4,5}| > 1.$$

Consequently, each equilibrium on the degenerate edge is non-hyperbolic and normally repelling.

Thus, the vanishing Pfaffian θ_2 produces an equilibrium continuum, while the inequalities $\theta_3 < 0$ and $\theta_4 < 0$ ensure transversal instability of this manifold.

Funding: This research received no external funding.

Keywords: discrete Lotka–Volterra operator, skew-symmetric matrix, principal Pfaffian, fixed-point card, non-hyperbolic equilibrium.

2020 Mathematics Subject Classification: 37B25, 37C25, 37C35

References

- [1] Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [2] Eshmamatova D., Tadzhieva M., Temirbekov N. Construction of Fixed Point Cards for Degenerate Lotka–Volterra Mappings, *Journal of Mathematical Sciences*, **294**:2 (2025), 287–300.
- [3] Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A. Analysis and classification of fixed points of operators on a simplex, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **120**:4 (2025), 107–124.

Image analysis–based approach for plant condition monitoring

M.K. SOLTANGELDINOVA¹, M.E. MANSUROVA², M.ZH. SAKYPBEKOVA³

^{1,2,3}*Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*

¹msoltangeldynova@gmail.com, ²mansurova.madina@gmail.com,

³sakypbekova.meruyert@gmail.com

Monitoring the condition of plants plays an important role in organizing the care of agricultural and ornamental crops, since it allows you to timely identify signs of deterioration in their condition. Early detection of changes in the monitoring process helps to prevent the development of diseases, reduce crop losses and minimize the negative impact of adverse environmental factors. At the same time, traditional monitoring methods based on visual inspection require considerable time and constant involvement of a specialist, which limits their effectiveness when scaling.

This paper considers the use of image analysis to monitor plant health as an alternative and promising approach. The use of computer vision methods makes it possible to automate the process of analyzing visual information, reduce the influence of subjective factors and increase the objectivity of the obtained assessments of the state of plants. Analysis of plant images is based on the identification of characteristic visual signs reflecting changes in the state of leaves and stems, which can serve as indicators of the general condition of plants.

The approach under consideration involves sequential steps of obtaining plant images, pre-processing them and analyzing visual characteristics. Pre-processing of data is aimed at improving the quality of images and bringing them to a single format, which helps to increase the stability of subsequent analysis. The visual data analysis stage is focused on identifying signs associated with changes in the color, shape and structure of plants.

Particular attention is paid to the possibility of using visual data to identify general trends in plant health as part of the monitoring process. This approach allows you to track the dynamics of plant health and identify potential deviations without reference to specific models or algorithms, which ensures the versatility and flexibility of the proposed solution.

The analysis shows that the use of images is a promising direction for monitoring the state of plants and can be used in various tasks of automated observation. The presented approach can serve as the basis for further research and development of automated solutions in the field of plant monitoring, as well as for expanding functionality by including time analysis and adaptive data processing mechanisms.

Keywords: image analysis, plant monitoring, computer vision, visual evaluation, automation.

References

- [1] FAO. *The State of Food and Agriculture 2020: Overcoming Water Challenges in Agriculture*. Food and Agriculture Organization of the United Nations. (2020). <https://doi.org/10.4060/cb1447en>
- [2] Kunduracioglu M. A review of visual and automated methods for plant disease detection, *International Journal of Agricultural Science and Technology*, **6**:2 (2018), 34–41.
- [3] Sunil C., Rao G., Yadav V.K. Deep learning for sustainable agriculture: a critical review, *Computers and Electronics in Agriculture*, (2023), 204, 107633.
- [4] Rahman M.A., Akhter A., Rahman M.M. Detection and Identification of Plant Leaf Diseases Using YOLOv4, in: *Frontiers in Plant Science*, (2024), 15, 112345
- [5] Ferentinos K.P. Deep learning models for plant disease detection and diagnosis, in: *Computers and Electronics in Agriculture*, (2018), 145, 311-318

The Inverse Heat Conduction Problem in a Multilayer Cylindrical System

A.S. SRAZH¹, B. RYSBAIULY², A.N. SATYBALDINA³

^{1,3}International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

²Astana Information Technology University, Astana, Kazakhstan

³Eurasian National University named by L.N.Gumilyev, Astana, Kazakhstan

¹a.srazh@iitu.edu.kz, ²rysbaiuly.b@gmail.com, ³aigul1191@gmail.com

This study examines steady-state heat transfer in a three-layer cylindrical system characterized by angular non-uniformity of the temperature field:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r_0 < r < r_3, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (1)$$

A cylindrical domain consisting of three concentric layers bounded by specified radii is considered. On the inner boundary of the cylindrical region, $r = r_0$, the temperature is prescribed, where the function $f(\varphi)$ is determined by experimental conditions. In the present study, the temperature at the inner boundary is assumed to be constant.

At the interfaces between the layers, $r = r_1$ and $r = r_2$, standard transmission conditions are imposed, reflecting the physical requirements of continuity of temperature and heat flux. On the outer boundary, $r = r_3$, a Robin boundary condition is applied to model heat exchange with the surrounding environment.

The temperature field is assumed to be periodic with respect to the angular coordinate:

$$T(r, \varphi) = T(r, \varphi + 2\pi).$$

Based on long-term experimental temperature measurements performed for various soil-layer configurations, an inverse problem is formulated and solved to reconstruct the thermal conductivity coefficients of the individual layers as well as the heat transfer coefficient at the outer boundary. To stabilize the solution, a regularized least-squares method is employed. A convergence analysis of the reconstructed parameters with respect to the harmonic number is carried out, and the averaged reconstructed values are compared with the exact parameters used in the corresponding direct problem.

Keywords: heat transfer equation, multilayer, cylindrical system, Fourier series, boundary conditions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Rysbaiuly B. *Obratnye zadachi nelineinoy teploperedachi*, Kazakh university, Almaty (2022).

- [2] Rysbaiuly B. *Koefficientnye obratnye zadachi perenosa vlagi i tepla*, Daryn, Almaty (2025).
- [3] Berger J., Dutykh D., Mendes N., Rysbaiuly B. A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **1:2** (2019), 1041–1060.
- [4] Alpar S., Rysbaiuly B. Determination of thermophysical characteristics in a nonlinear inverse heat transfer problem, *Applied Mathematics and Computation*, **1:2** (2023), 440.
- [5] Rysbaiuly B., Sinita A., Capsoni A. Analytical Inverse Analysis Methodological Approach for Thermo-Physical Parameters Estimation of Multilayered Medium Terrain with Homogenized Sampled Measurements, *Symmetry*, **1:2** (2022), 2248.

Numerical modeling of Taylor-Green vortex decay using the lattice Boltzmann method

A. SHYNGGYSKYZY¹, K.K. KARZHAUBAYEV²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*International Engineering Technological University, Almaty, Kazakhstan*

¹anarashyngyskyzy3004@gmail.com, ²kairzhan.k@gmail.com

This work considers the problem of numerical simulation of Taylor–Green vortex decay [1] based on the lattice Boltzmann method (LBM). The study of such flows is an important problem in fluid dynamics, as it represents simplified model turbulence, where vortex decay process may introduce many scales of motion, and most of the flows in engineering and environment are turbulent.

The motion of the incompressible flow can be described using the Navier—Stokes equations, which in two-dimensions take the form of mass and momentum conservation equations:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

where u, v are the velocity components, Re – Reynolds number, p – pressure.

For the Taylor–Green vortex decay problem, the initial velocity field, where $2\pi/a$ is the domain size, is given as follows:

$$u(x, y, 0) = A \cos(ax) \sin(ay) \quad (4)$$

$$v(x, y, 0) = -A \sin(ax) \cos(ay). \quad (5)$$

Due to non-zero initial motion and the action of the viscosity, such flow progresses, developing smaller scales of motion. Taking the divergence of the Navier—Stokes equations, the Poisson equation for pressure is obtained, whose solution shows that the pressure field varies harmonically in space.

In this work, alternative to traditional finite-difference and finite-volume methods, the kinetic method LBM is employed to model fluid dynamics. Analysis of single-point and spectral interpolated statistics shows that LBM is capable of performing numerical simulation using the second order of accuracy. In addition, in LBM the non-linear term is treated along the characteristics, which also reduces numerical dissipation.

Overall, the obtained results demonstrate the correctness of the numerical algorithm and the stability of the model. The parallel code implemented using the domain-decomposition technique in the MPI library achieves 80% of efficiency. This confirms that LBM is an effective tool for modeling complex flows, and can be used for turbulent flows simulations.

Keywords: lattice Boltzmann method, turbulent flow, Taylor–Green problem, Navier–Stokes equations.

2020 Mathematics Subject Classification: 76M28, 76F65, 65Y05

References

- [1] Taylor G.I., Green A.E. Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **158**:895 (1937), 499–521.
- [2] He X., Luo L.-S. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier–Stokes Equation, *Journal of Statistical Physics*, **88**:3/4 (1997), 927–944.

Mathematical Modeling of Surface Geochemical Fields via Fredholm Integral Equations

D.O. TAMABAY¹, A.S. SEITOVA², A.S. SEITOVA³

^{1,2,3}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2,3}*National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

¹dtamabay@gmail.com, ²aruzhanseitova55@gmail.com, ³aiauzhanseitova77@gmail.com

A two-dimensional inverse geochemical problem of reconstructing the depth distribution of a valuable component from surface measurements is considered. The spatial structure of observations is defined by the coordinates (x, y) , whereas the unknown function describes the variation of concentration with depth. The mathematical model is formulated as a Fredholm integral equation of the first kind [1]:

$$f(x, y) = \int_{\Omega} K(x, y, s) u(s) ds, \quad (1)$$

where $f(x, y)$ represents the measured surface values, $u(s)$ denotes the sought depth distribution, and $K(x, y, s)$ is the smoothing kernel of the integral operator.

The kernel $K(x, y, s)$ is chosen as a modified Poisson function to account for the two-dimensional geometry and spatial attenuation of the signal from deep sources [3]. The depth parameter controls the smoothing and influences the spectral properties of the operator.

The integral operator is compact, making the problem ill-posed in the sense of Hadamard [1]: small errors in surface data can lead to large distortions in the reconstructed solution. In the discrete formulation, this results in a poorly conditioned system of linear equations with rapidly decaying singular spectrum [3].

To stabilize the inversion, three regularization techniques are employed: truncated singular value decomposition (TSVD), Lavrentiev regularization, and Galerkin method with Tikhonov regularization [2,3]. All methods are used to suppress unstable components and balance the trade-off between data approximation accuracy and stability.

Numerical experiments on two-dimensional noisy data confirm the smoothing character of the operator and demonstrate the feasibility of stable recovery of the depth profile under proper regularization parameter selection [3].

The obtained results indicate that the Fredholm integral model of the first kind adequately describes the formation of surface geochemical anomalies and enables the solution of two-dimensional inverse problems while preserving the physical interpretability of the results [1].

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan ((BR) No. 27100483 “Development of predictive exploration technologies for identifying ore-prospective areas based on data analysis from the unified subsurface user platform ”Minerals.gov.kz” using artificial intelligence and remote sensing methods”)

Keywords: inverse problem, Fredholm integral equation, Galerkin method, Lavrentiev regularization, TSVD, geochemistry.

2020 Mathematics Subject Classification: 45B05, 65R32, 65F22

References

- [1] Kirsch, A., et al., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, New York, 2011, p. 120.
- [2] Wazwaz, A. M., The regularization method for Fredholm integral equations of the first kind, *Computers & Mathematics with Applications*, **61**(10), 2011, 2981–2986.
- [3] Hansen, P. C., Christiansen, S., An SVD analysis of linear algebraic equations derived from first kind integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **12**, 1985, 341–357.

Adaptive Wavelet Galerkin Approximation of the Burgers Equation

D.O. TAMABAY¹, T.G. MUKHANOVA², A.Y. SARSENBAEVA³

¹National Engineering Academy of RK, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³Caspian University, Almaty, Kazakhstan

¹dtamabay@gmail.com, ²tomirismukhanova04@gmail.com, ³sarsenbaeva.82@bk.ru

This research considers the numerical solution of the one-dimensional viscous Burgers equation with a source term

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is the unknown function, $\nu > 0$ is the viscosity coefficient, and $f(x, t)$ is a given right-hand side. The Burgers equation serves as a model problem in nonlinear hydrodynamics, combining convection and diffusion effects, and is widely used for testing numerical methods for nonlinear partial differential equations [1–3].

For spatial discretization, the Bubnov–Galerkin method is employed. Orthonormal compactly supported wavelets $\{\psi_k(x)\}$, possessing localization properties in both physical and frequency domains, are chosen as basis functions. The approximate solution is sought in the form

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \psi_k(x). \quad (2)$$

Substitution of this approximation into the weak formulation yields a system of nonlinear ordinary differential equations with respect to the coefficients $c_k(t)$. The nonlinear convective term generates a third-order tensor computed via integrals of products of wavelets and their derivatives. The source term is incorporated through projection of $f(x, t)$ onto the selected wavelet subspace.

Time discretization is performed using an implicit scheme to ensure stability for small values of the viscosity parameter. At each time step, a system of nonlinear algebraic equations is solved using iterative methods.

Numerical experiments demonstrate convergence of the method and high approximation accuracy with a relatively small number of basis functions. The use of wavelet bases enables an efficient representation of solutions with localized structures, making the proposed approach promising for nonlinear problems with steep gradients and source effects.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (BR27100483 “Development of predictive exploration technologies for identifying ore-prospective areas based on data analysis from the unified subsurface user platform ”Minerals.gov.kz” using artificial intelligence and remote sensing methods”).

Keywords: Wavelet basis, Galerkin method, Burgers equation, Nonlinear convection–diffusion, Numerical approximation.

2020 Mathematics Subject Classification: 65M60

References

- [1] Liu, XiaoJing, et al. Wavelet solutions of Burgers' equation with high Reynolds numbers. *Science China Technological Sciences* 57:7, (2014), 1285-1292.
- [2] Rathish Kumar, B. V., and Mani Mehra. Wavelet-Taylor Galerkin method for the Burgers equation. *BIT Numerical Mathematics* 45:3, (2005), 543-560.
- [3] Avudainayagam, A., and C. Vani. Wavelet-Galerkin method for integro-differential equations. *Applied Numerical Mathematics* 32:3, (2000), 247-254.

Data Preprocessing and Spatial Problem Formulation for Interpolation and Extrapolation of Gold Concentration

M.E. TANASHOVA

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

moldir.tanashova@bk.ru

Accurate prediction of gold concentration in geochemical studies strongly depends on the quality of the input data and the correctness of the spatial problem formulation. The prediction task is defined for generated grid points located predominantly in the northwestern direction relative to the geochemical sampling area. To formally characterize the geometry of the study region, convex hulls are constructed for both the set of observed geochemical sampling points and the set of generated prediction points. This geometric representation makes it possible to clearly identify the overlapping domain as well as the regions extending beyond the area supported by direct geochemical observations.

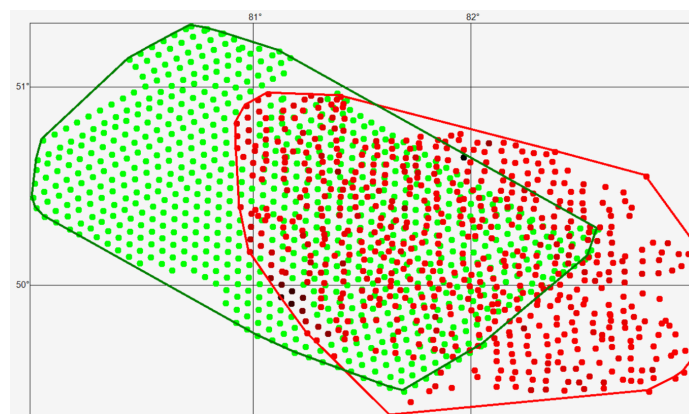


Figure 1: *

Spatial distribution of geochemical sampling locations (red) and generated grid points (green) used to construct prediction maps for the study area.

Let R denote the set of points with known geochemical sampling results, and let G denote the set of generated prediction points. Their union is defined as $C = R \cup G$, and their intersection as $S = R \cap G$. Of particular importance is the subset $G_R = G \setminus R$, which contains generated points located outside the geochemical sampling domain.

Under this formulation, the prediction of gold concentration at points from the set G is naturally decomposed into two subproblems. The first subproblem is *interpolation*, which estimates gold concentrations at locations situated within the spatial domain covered by sampling data. The second subproblem is *extrapolation*, which predicts gold concentrations at points located outside the sampled region and therefore requires the model to generalize spatial trends beyond the convex

hull of observations. In this study, a unified feature construction and prediction framework is employed for both regimes.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (BR) No. 27100483 “Development of predictive exploration technologies for identifying ore-prospective areas based on data analysis from the unified subsurface user platform ”Minerals.gov.kz” using artificial intelligence and remote sensing methods”).

Keywords: data preprocessing; geochemical anomalies; neural networks;

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Los V.L., Legonkin V.S. Development of mathematical and software tools for forecasting ore mineral deposits, *Geology and Subsoil Protection*, 1:2023, 1(86), 43–54.

Modeling of Two-Phase Nonequilibrium Filtration Using Stabilized Finite Element Methods

N.M. TEMIRBEKOV¹, B.T. ZHUMAGULOV², D.A. OMARIYEVA³

¹Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan

²National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

³D. Serikbayev East Kazakhstan technical university, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

¹temirbekov@rambler.ru, ²nia_rk@mail.ru, ³Dinara.2205@mail.ru

A method for solving the saturation equation in the problem of two-phase nonequilibrium filtration is proposed. The convection-diffusion equation contains a third-order derivative, which complicates the numerical solution. A comparison of three stabilized finite element methods has been performed: SUPG, GLS, and USFEM. The disproportionality of the parameters in the convection-diffusion equation causes boundary layers that are poorly resolved by standard methods. To eliminate them, stabilized approaches with artificial viscosity are used. The nonequilibrium flow model [1] is based on thermodynamics and averaging of microscopic equations, which led to the inclusion of additional terms. In [1], the dynamic capillary pressure was introduced, related to the static one by the corresponding relation:

$$P_c^{\text{dyn}} \equiv p_o - p_c = P_c^{\text{stat}} - \tau_H(s) \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (1)$$

where p_o - the phase pressure of oil, τ_H - the phenomenological coefficient, which takes on positive values, and s - water saturation. Dynamic capillary pressure has been the subject of many experimental [2] and theoretical [3] studies.

Stabilized methods are sensitive to the choice of parameters that affect stability and accuracy. The paper compares SUPG, GLS, and USFEM for the saturation equation. In $Q_T = \Omega \times (0, T)$, where $\Omega \subset R^2$ with a boundary $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, the equation is considered

$$\frac{\partial s}{\partial t} + As + B \frac{\partial s}{\partial t} = f, \quad (x, t) \in Q_T \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} As &= \nabla \cdot \nabla s - k_1 \nabla^2 s, \\ Bs &= -k_2 \nabla^2 s, \end{aligned}$$

Initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} s(x, 0) &= s_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ s &= g_D, \quad x \in \Gamma_D; \quad \nabla s \cdot \vec{n} = g_N, \quad x \in \Gamma_N, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$\vec{n}$ - external normal to Γ_N , $\vec{V}$ - known vector, f, g_D, g_N - given functions.

It is assumed that there is a single smooth solution. Space is introduced

$$V = \{v \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) : v|_{\Gamma_D} = g_D\}$$

and, of course, the elementary subspace $V_h \subseteq V$ on the triangulation Ω . The stabilized FEM are formulated variationally: to find $s_h \in V_h$, such that:

$$(s_h^n - s_h^{n-1}, w_h) + \tau a(s_h^n, w_h) + b(s_h^n - s_h^{n-1}, w_h) + \tau S(s_h^n, w_h) = \tau \varphi(w_h), \quad \forall w_h \in V_h \quad (4)$$

where a and b - bilinear forms corresponding to the operators A and B , $S(\cdot, \cdot)$ - is the stabilizing term:

$$S(s_h, w_h) = \sum_K \tau_K (As_h - \varphi, \tilde{A}w_h)_K \quad (5)$$

Operator selection $\tilde{A}$ defines the method:

$$\begin{aligned} \text{SUPG} : \quad \tilde{A}v_h &= \vec{v} \cdot \nabla v_h \\ \text{GLS} : \quad \tilde{A}v_h &= -k\Delta v_h + \vec{v} \cdot \nabla v_h \\ \text{USFEM} : \quad \tilde{A}v_h &= k\Delta v_h + \vec{v} \cdot \nabla v_h \end{aligned} \quad (6)$$

An important point is the choice of the stabilization parameter τ_K , which depends on the properties of the task. Examples of parameters:

$$\begin{aligned} \tau_K^c &= \left(\frac{4k_1}{h_K^2} + \frac{2|\bar{u}_K|}{h_K} \right)^{-1}, \\ \tau_K^s &= \left(9 \left(\frac{4k_1}{h_K^2} \right)^2 + \left(\frac{2|\bar{u}_K|}{h_K} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \tau_K^a &= \left(\frac{12k_1}{h_K^2} + \frac{2|\bar{u}_K|}{h_K} \right)^{-1}, \\ \tau_K^{av} &= \left(\frac{6k_1}{h_K^2} \zeta \left(\frac{|\bar{u}_K|}{3k_1} \right) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

where h_K is the diameter of the triangle K , $\zeta(x) = \{1, 0 \leq x \leq 1; x, x \geq 1\}$. Methods (6) and parameters (7) are compared in two computational experiments. The results confirmed their effectiveness and will be used in further research.

Keywords: finite element method, stabilized methods, nonequilibrium filtration.

References

- [1] Hassanizadeh S. M., Celia M. A., Dahle H. K. Dynamic effects in the capillary pressure-saturation relationship and its impact on unsaturated flow // Vadose Zone Journal. 2002. — Vol. 1, No. 1. — P. 38–57.
- [2] O'Carroll D. M., Phelan T. J., Abriola L. M. Exploring dynamic effects in capillary pressure in multistep outflow experiments // Water Resour. Res. 2005. — Vol. 41, No. 11. — P. W11419.
- [3] Cuesta C., van Duijn C. J., Hulshof J. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves // EurJ Appl Math. 2000. — Vol. 11. — P. 381–397.

Computational Analysis of Invariant Sets and Stability in a Discrete Lotka–Volterra SI_1I_2V Epidemic Model

D.A. XAKIMOVA

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

xakimovadildora47@gmail.com

Quadratic stochastic operators, and particularly Lotka–Volterra (LV) operators, naturally appear in population genetics, ecology and epidemiology. Their dynamics on a simplex preserve the total population and generate invariant manifolds and non-isolated stationary states, which makes them convenient for modelling epidemic processes.

We study the dynamics on the simplex $S^3 = \{x_i \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$, where the coordinates describe proportions of interacting epidemiological groups: $x_1 = S$ (susceptible), $x_2 = I_1$ (infected type 1), $x_3 = I_2$ (infected type 2), $x_4 = V$ (infection carriers/vectors).

Each equation has a natural epidemiological interpretation.

The first equation $x'_1 = x_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4)$ describes the susceptible population. The term ax_2 corresponds to infection transmission caused by contacts with the primary infected class I_1 . The positive terms bx_3 and cx_4 reflect indirect feedback interactions within the population and do not correspond to classical recovery mechanisms.

The second equation $x'_2 = x_2(1 + ax_1)$ represents the first infected group. The term ax_1 describes infection transmission after contacts between susceptible and infected individuals. Thus susceptible individuals generate new infected individuals and this term corresponds to disease transmission rather than recovery.

The third equation $x'_3 = x_3(1 - bx_1 - fx_4)$ describes the second infected group corresponding to a later infectious stage. Interaction with susceptible individuals and carriers decreases this group due to transition to other epidemiological states.

Finally, $x'_4 = x_4(1 - ex_1 + fx_3)$ characterizes the dynamics of carriers (vectors). Carriers are generated through interaction with infected individuals of the second type and decrease due to interaction with susceptible individuals.

Therefore the model describes a vector-borne epidemic process with two infectious stages (SIIV model), where infection persists due to circulation between infected individuals and carriers.

On S^3 we consider the discrete Lotka–Volterra operator

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1), \\ x'_3 = x_3(1 - bx_1 - fx_4), \\ x'_4 = x_4(1 - ex_1 + fx_3), \end{cases}$$

where $a, b, c, e, f > 0$.

The simplex S^3 is invariant and the condition $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ represents conservation of the total population.

We interpret the variables as $(S, I_1, I_2, V) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, where S is susceptible, I_1, I_2 are infected classes and V denotes carriers.

Susceptible individuals become infected after contacts with infected individuals and carriers. The class I_1 represents newly infected individuals generated by interaction with susceptibles. The class I_2 corresponds to a later infectious stage which still participates in disease transmission and therefore does not represent a removed population. Carriers V model latent or vector transmission and sustain the circulation of infection in the population.

Hence the operator describes a discrete SI_1I_2V **epidemic model** (susceptible–two infectious classes–carriers) rather than a classical SEIR or SIR epidemic structure.

Solving the fixed point equation $V(x) = x$ we obtain the boundary stationary states $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $M = \left(0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\right)$ and $N = \left(0, \frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}\right)$.

Hence the set of fixed points of V_1 consists of the boundary faces Γ_{23}, Γ_{24} and the points e_1, M, N .

For Lotka-Volterra operators generated by a skew-symmetric matrix, the sign structure of the vector Ax determines invariant regions. We define $P = \{x \in S^3 : Ax \geq 0\}$ and $Q = \{x \in S^3 : Ax \leq 0\}$.

Theorem 1. *For the discrete Lotka-Volterra operator V_1 generated by the skew-symmetric matrix A , the sets P and Q are invariant under V_1 .*

Proof. For Lotka-Volterra operators $x'_i - x_i = x_i(Ax)_i$. Hence the sign of $(Ax)_i$ determines the monotonicity of the coordinate x_i . If $x \in P$ then $(Ax)_i \geq 0$ and therefore $x'_i \geq x_i$, so the trajectory cannot leave P . The same argument holds for Q . $\square$

Solving the inequalities together with the simplex constraint, we obtain $P = [e_3, M]$, $Q = [e_2, N]$, where $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $M = \left(0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\right)$, $N = \left(0, \frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}\right)$.

Stability of the fixed points is determined by the spectrum of the Jacobian matrix.

At the disease-free equilibrium $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ the characteristic equation gives the eigenvalues $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + a$, $\lambda_3 = 1 - b$, $\lambda_4 = 1 - e$. Hence e_1 is a saddle point.

At the boundary point $M = \left(0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\right)$ the transverse eigenvalue satisfies $\lambda = 1 + \frac{af}{a+b} > 1$, therefore M is repelling.

At the boundary point $N = \left(0, \frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}\right)$ we obtain $\lambda = 1 - \frac{af}{a+c} < 1$, hence N is locally attracting.

To determine epidemic persistence we linearize the system near the disease-free equilibrium $e_1 = (1, 0, 0, 0)$. For the infectious variables we obtain $x'_2 \approx (1 + a)x_2$, $x'_3 \approx (1 - b)x_3$, and $x'_4 \approx (1 - e)x_4$.

Hence the eigenvalues of the infection block of the Jacobian matrix are $\lambda_2 = 1 + a$, $\lambda_3 = 1 - b$, and $\lambda_4 = 1 - e$. The spectral radius is therefore $R_0 = \rho(J_I(e_1)) = 1 + a$.

If $R_0 > 1$ the disease-free equilibrium is unstable and the infection persists in the population; if $R_0 \leq 1$ the infection dies out.

Thus the discrete Lotka-Volterra system describes a vector-borne SIIV epidemic process in a closed population. Invariant sets P and Q determine the admissible evolution of trajectories, while the boundary equilibria M and N represent possible epidemic states. The stability of the disease-free equilibrium e_1 depends on the threshold parameter R_0 , which separates extinction and persistence of infection.

Funding: This research received no external funding.

Keywords: Discrete Lotka-Volterra operator, SI_1I_2V epidemic model, invariant sets, stability analysis, spectral radius.

2020 Mathematics Subject Classification: 37B25, 37C25, 37C35

References

- [1] R. N. Ganikhodzhaev, D. B. Eshmatova, M. A. Tadzhieva, B. S. Zakirov, Some degenerate cases of discrete Lotka-Volterra dynamical systems and their applications in epidemiology, *Journal of Mathematical Sciences*, **289**:5 (2025), 755–769.
- [2] R. N. Ganikhodzhaev, D. B. Eshmatova, U. R. Muminov, S. I. Masharipov, Degenerate cases in discrete Lotka-Volterra dynamical systems, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika*, **33**:2 (2025), 165–183.
- [3] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, New York (2012).

Finite-difference model of the two-dimensional filtration equation by the Samarskii method

B.X. XAMRAKULOV

Tashkent University of Information Technologies named after Al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan

khamrakulovbobur35@gmail.com

Groundwater flow in porous media is one of the classical problems of mathematical physics and hydrogeology. The hydraulic head $h(x, y, t)$ satisfies Darcy's law $\mathbf{v} = -k\nabla h$, where $k > 0$ is the filtration coefficient. Combining Darcy's law with the mass conservation principle leads to the two-dimensional filtration equation

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t).$$

Here $\mu > 0$ is the storage coefficient and $f(x, y, t)$ describes external sources such as wells, drainage or infiltration.

In practical hydrogeological problems analytic solutions of this partial differential equation are usually unavailable due to heterogeneous media and complex boundary conditions. Therefore numerical modelling is required. The main objective of this work is to transform the continuous boundary-value problem into a computationally convenient algebraic system using the Samarskii finite-difference methodology.

Let the spatial domain be covered by a rectangular grid $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, and the time variable be discretized as $t^n = n\Delta t$. The unknown function is replaced by a grid function $h(x_i, y_j, t^n) = h_{i,j}^n$ defined only at the nodes. Thus the continuous operator problem is replaced by a discrete operator equation.

According to the Samarskii principle, derivatives are approximated by neighboring node differences. The time derivative is written as $\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t}$. The second spatial derivatives are approximated by central differences

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &\approx \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &\approx \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}. \end{aligned}$$

Substituting these relations into the filtration equation gives the finite-difference scheme

$$\mu \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = k \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + k \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + f_{i,j}^n.$$

After rearranging terms we obtain a linear algebraic equation for each node:

$$ah_{i-1,j} + bh_{i+1,j} + ch_{i,j-1} + dh_{i,j+1} + eh_{i,j} = g,$$

where

$$a = b = \frac{k}{\Delta x^2}, \quad c = d = \frac{k}{\Delta y^2},$$

$$e = -2k \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \frac{\mu}{\Delta t}, \quad g = -\frac{\mu}{\Delta t} h_{i,j}^n - f_{i,j}^n.$$

Thus, every grid node produces one linear equation and the whole discrete model can be written in operator form $Ah = b$, where A is the coefficient matrix, h is the vector of unknown hydraulic heads and b represents external influences. The differential problem is therefore reduced to a system of linear algebraic equations.

The obtained matrix is sparse and corresponds to a five-point stencil discretization of the Laplace operator with a time term. Such systems are efficiently solved by iterative methods. In particular, Jacobi, Gauss-Seidel and successive over-relaxation (SOR) schemes can be applied to compute the hydraulic head distribution at each time layer.

The proposed reduction justifies the applicability of difference schemes to hydrogeological filtration processes and provides a computational framework for numerical simulation of groundwater motion. The obtained finite-difference approximation reduces the two-dimensional filtration equation to a system of linear algebraic equations with a sparse five-point stencil structure. It is shown that each grid node generates one algebraic relation and the whole problem can be written in the operator form $Ah = b$. Therefore the continuous boundary-value filtration problem becomes computationally solvable and suitable for numerical simulation of groundwater flow. The Samarskii approach thus provides a mathematically justified transition from the differential model to a stable discrete scheme applicable in hydrogeological calculations.

Funding: No external funding was received.

Keywords: filtration equation, finite difference scheme, porous media, Samarskii method, numerical modelling.

2020 Mathematics Subject Classification: 65M06, 65M12, 76S05

References

- [1] Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes* (2001).
- [2] Smith G. D. *Numerical Solution of PDEs* (1985).
- [3] Bear M. *Dynamics of Fluids in Porous Media* (1988).

Numerical simulation of convective heat transfer in flows laden with finite-size buoyant particles

A.S. ZHUMALI¹, K.K. KARZHAUBAYEV², D.B. ZHAKEBAYEV³

^{1,2}*International Engineering Technological University, Almaty, Kazakhstan*
^{1,2,3}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹ainura.z89@gmail.com, ²kairzhan.k@gmail.com, ³zhakebayev@kaznu.kz

Particle-laden flows with heat transfer arise in a wide range of natural and industrial processes, including fluidized beds, sediment transport, geophysical flows, and particulate heat exchangers. In such systems, the presence of dispersed solid particles strongly modifies the momentum and thermal transport mechanisms of the carrier fluid. Finite-size particles can alter the local flow structures, induce additional mixing, and affect the distribution of temperature through particle–fluid and particle–particle interactions.

In this work, numerical simulations are used to study convective heat transfer in a fluid–solid multiphase system. In addition, when the particle size is larger than or comparable to the Kolmogorov length scale, the presence of particles introduces significant computational overhead to properly resolve momentum and heat transfer at the solid–fluid interfaces.

The incompressible fluid is governed by the Navier-Stokes and energy equations with Boussinesq approximation for thermal body force:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta(T - T_{ref})\mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T, \quad (3)$$

where $\mathbf{u}$ – fluid velocity, T – temperature, T_{ref} – reference temperature, ν – fluid kinematic viscosity, α – thermal diffusivity, p – pressure, β – thermal expansion coefficient. The motion of finite-size particles is governed by the Newton–Euler equations, while heat transfer between the solid and fluid phases is treated explicitly. Equations (1)–(3) are solved numerically using the kinetic method of the Lattice Boltzmann Method (LBM) [1], in which the evolution of the particle distribution function is resolved on a cubic mesh. The fully explicit nature of LBM allows high computational performance on modern computer systems [2]. The accuracy of the proposed method is validated using several benchmark cases. Following the validation, numerical simulations at different solid-phase volume fractions demonstrate variations in the Nusselt number due to the presence of solid particles. Overall, the LBM combined with the heat transfer model enables the use of a second-order numerical scheme to study the dynamics of heat transfer modulation in convective flows.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22787050).

Keywords: Lattice-Boltzmann Method, thermal flows, particle-laden, heat transfer, parallel computing.

2020 Mathematics Subject Classification: 76M28, 65Y05

References

- [1] Rosemann, T., Kravets, B., Reinecke, S.R., Kruggel-Emden, H., Wu, M. and Peters, B. Comparison of numerical schemes for 3D lattice Boltzmann simulations of moving rigid particles in thermal fluid flows *Powder Technology*, 2019, 356, 528–546
- [2] Wu, H., Karzhaubayev, K., Shen, J. and Wang, L.P. Direct numerical simulation of three-dimensional particle-laden thermal convection using the Lattice Boltzmann Method *Computers & Fluids*, 2024, 276–106268

Fundamentals of using modern information technologies in cyber systems

I.Z. ZAFARLI

OilGasScientificResearchProject Institute, SOCAR, Baku, Azerbaijan

Axmedova_Ilaxa@mail.ru

Digital transformation has significantly increased the role of information technologies in cyber-physical systems (CPS). These systems integrate physical infrastructure, computing resources, and communication networks to collect, process, and analyze large volumes of data. Technologies such as artificial intelligence, machine learning, cloud computing, and big data analytics enable intelligent monitoring and optimization of industrial processes.

CPS acquire real-time data using sensors and Internet of Things (IoT) technologies. The collected information is processed with advanced algorithms to detect anomalies and support decision-making. Within Industry 4.0, CPS enable interaction between physical devices and digital platforms, facilitating automation, predictive analytics, and efficient resource management.

Big data technologies process large heterogeneous datasets from industrial equipment. Machine learning detects patterns, predicts failures, and improves operational efficiency [6].

Cybersecurity is essential to protect data confidentiality, integrity, and availability. Mechanisms such as encryption, authentication protocols, and biometric systems prevent unauthorized access and cyber threats.

The integration of AI and information technologies enhances industrial efficiency and decision-making. Future CPS developments will expand their applications across the digital economy.

Cyber-physical systems (CPS) integrate physical processes with computational intelligence, enabling interaction between the physical and virtual environments [1]. Data collection, processing, and analysis are critical for real-time monitoring and control. Modern CPS utilize sensors, controllers, and communication networks to ensure efficient operation and decision support.

Core Technologies

Internet of Things (IoT)

IoT enables physical devices to communicate and be monitored remotely, providing real-time visibility into system performance [2].

Artificial Intelligence and Machine Learning

AI and ML algorithms analyze large datasets, detect anomalies, and support automated decision-making, optimizing industrial operations [3].

Big Data Analytics

Big Data technologies process heterogeneous datasets to extract insights, improve predictive maintenance, and enhance operational efficiency.

Cloud Computing

Cloud platforms offer scalable computational and storage resources, supporting distributed analytics and real-time data processing [4].

Ensuring data confidentiality, integrity, and availability is essential [5]. Techniques such as encryption, authentication, and biometric verification secure cyber systems against threats. Cybersecurity

Alongside the development of cyber-physical systems, information security has gained significant importance. Cybersecurity systems ensure the confidentiality, integrity, and availability of data.

Threats in cyber-physical systems include unauthorized data modification, identity forgery, data disclosure, and service disruption. Therefore, the implementation of security mechanisms plays a critical role in ensuring the reliable operation of these systems.

Conclusion

Research indicates that the integration of modern information technologies into cyber-physical systems is essential for the development of contemporary industrial and management systems. Technologies such as artificial intelligence, big data, cloud computing, and other innovative solutions enable the optimization of production and management processes.

The application of these technologies accelerates information processing, enhances the efficiency of decision-making, and improves the competitiveness of organizations. In the future, the development of cyber-physical systems will further expand through the adoption of new technologies, leading to the emergence of innovative solutions across various sectors.

Keywords: cyber systems, artificial intelligence, Industry 4.0, big data, cloud technologies

References

- [1] Cyber-physical system (Wikipedia) — overview of CPS and integration of physical and computational elements.
- [2] Cyber-physical systems: basic concepts and security issues — Alguliyev et al., security and core concepts of CPS.
- [3] Fog Computing Technology Application in Cyber-Physical Systems and Analysis of Cyber-security Problems — Alakbarov & Hashimov (2022).
- [4] The Role of Cyber-Physical Systems in Industry 4.0 — Alakbarova (2020), CPS and IoT integration.
- [5] Artificial intelligence in cyber physical systems — Radanliev et al. (2021), AI applications in CPS.
- [6] Big Data Meet Cyber-Physical Systems: A Panoramic Survey — Atat et al. (2018).

Кері және қисынды емес есептер: теория, қолданыстар және жасанды интеллект

Обратные и некорректные задачи: теория, приложения и ИИ

Inverse and Ill-Posed Problems: Theory, Applications and AI

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: М.А. Бектемесов

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: С.И. Кабанихин

Ұйымдастыру комитетінің тең төрағасы: Ж.М. Бектемесов

Ұйымдастыру комитетінің тең төрағасы: С.Е. Касенов

Конференция хатшысы: Ұ.Қ. Социалова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ МЕМБРАНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Ж.А. АБДИРАМАНОВ¹, А.А. МУКАНБЕТКАЛИЕВА²

^{1,2}КазНПУ имени Абая, Алматы, Казахстан

a.janars@gmail.com

В работе рассматривается начально-краевая задача для двумерного волнового уравнения, описывающего колебания плоской упругой мембраны, закреплённой по контуру. Приведена математическая постановка задачи. Построена явная конечно-разностная схема второго порядка точности по времени и пространству. Проанализировано условие устойчивости типа Куранта–Фридрихса–Леви. Проведено сравнение численного решения с аналитическим решением тестовой задачи.

1. Поставленная задача

Рассматривается начально-краевая задача для двумерного волнового уравнения, описывающего поперечные колебания однородной упругой мембраны, закреплённой по контуру. Математическая модель имеет вид [2, 4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

где $u(x, y, t)$ — функция смещения мембраны, c — скорость распространения возмущений, Ω — ограниченная область.

Задаются начальные условия:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y),$$

и однородные граничные условия первого рода:

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Требуется определить функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению и указанным условиям. Данная задача относится к классу гиперболических задач математической физики [2].

2. Численный метод решения

Для построения приближённого решения используется метод конечных разностей [1]. Область дискретизируется равномерной прямоугольной сеткой:

$$x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad t^n = n\tau.$$

Вторая производная по времени аппроксимируется центральной разностью второго порядка точности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\tau^2}.$$

Оператор Лапласа аппроксимируется пятиточечной разностной схемой [1]:

$$\Delta u \approx \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n}{h^2}.$$

В результате получаем явную разностную схему:

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + r^2 (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n),$$

где

$$r = \frac{c\tau}{h}.$$

Устойчивость схемы определяется условием Куранта–Фридрихса–Леви [3]:

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Проведён вычислительный эксперимент при различных шагах сетки. Численные результаты демонстрируют корректное воспроизведение колебательного процесса и уменьшение погрешности при сгущении сетки.

Ключевые слова: волновое уравнение, плоская мембрана, метод конечных разностей, устойчивость, условие Куранта, численное моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 65M06, 35L05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самарский А.А. *Теория разностных схем*, Наука, Москва (1989).
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1977).
- [3] Courant R., Friedrichs K., Lewy H. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics, *IBM Journal* (1967).
- [4] Evans L.C. *Partial Differential Equations*, AMS (2010).

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ DtN-ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Ж.А. АБДИРАМАНОВ¹, Д.Ж. ДИХАНБАЕВА²

^{1,2}КазНПУ имени Абая, Алматы, Казахстан

dinara.dikhanbayeva@mail.ru

Моделирование нелинейных волн в неограниченных пространствах требует постановки неотражающих граничных условий на искусственной границе [1]. Наиболее точными являются условия типа Дирихле–Нейман (DtN), обеспечивающие соответствие решения в усеченной области решению на бесконечности [1, 2]. Цель работы – разработка конечно-элементной схемы для полулинейного волнового уравнения во внешности препятствия с DtN-условием.

Рассмотрим полулинейное волновое уравнение в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (внешность компактного множества Ω_0 с границей Γ_0):

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

где $f(u)$ — гладкая нелинейность (например, $f(u) = u^3$), допускающая существование решений, которые могут "взрываться" за конечное время (blow-up) [1].

Начальные условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

с финитными носителями начальных данных. На Γ_0 задано условие Дирихле $u = 0$. Вводится искусственная граница Γ_R (окружность радиуса R), ограничивающая расчетную область Ω_{int} — кольцо между Γ_0 и Γ_R .

Используется схема Ньюмарка, сводящая задачу к последовательности эллиптических задач [1, 3]:

$$u^{n+1} - \alpha \Delta u^{n+1} + \alpha f(u^{n+1}) = g^n, \quad \text{в } \Omega_{int}, \quad (3)$$

где $\alpha = \gamma\tau^2$ (параметр схемы), а g^n включает значения с предыдущих слоев. На Γ_R строится точное DtN-условие, связывающее значение функции с её нормальной производной. Во внешней области Ω_{ext} нелинейность отсутствует, поэтому решение допускает представление в виде разложения по цилиндрическим функциям [1]:

$$\frac{\partial u_m}{\partial r}(R, \theta) = -\frac{kH_m^{(1)'}(kR)}{H_m^{(1)}(kR)}u_m(R, \theta) \quad (4)$$

где $H_m^{(1)}$ — функция Ханкеля. Суммирование по модам дает оператор $\frac{\partial u}{\partial r} = Mu$.

Слабая формулировка: найти $u^h \in V^h \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega_{int})$ такую, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{int}} (u^{n+1}v + \alpha \nabla u^{n+1} \nabla v) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_R} (Mu^{n+1})v d\Gamma + \\ + \alpha \int_{\Omega_{int}} f(u^{n+1})v d\Omega = \int_{\Omega_{int}} g^n v d\Omega, \quad \forall v \in V^h. \end{aligned} \quad (5)$$

Нелинейность обрабатывается методом Ньютона. Априорная оценка погрешности [3, 4]:

$$\|u - u^h\| \leq C_1 h^p + C_2 \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (6)$$

где h — шаг сетки, p — порядок базисных функций, M — число удерживаемых мод.

Подобные оценки детально исследованы в контексте нелокальных задач [4]. Тестовые расчеты (рассеяние плоской волны на жестком круге) показывают: - высокую точность DtN-условия (отражения от Γ_R на уровне машинной погрешности); - возможность моделирования blow-up без влияния отраженной энергии от границы [5].

Предложен подход, сочетающий дискретизацию по времени, МКЭ и точное DtN-условие, позволяющий эффективно решать полулинейные волновые уравнения во внешних областях. Отсутствие ложных отражений от искусственной границы обеспечивает высокую точность моделирования. Дальнейшие исследования – адаптация для трехмерных задач и переменных коэффициентов.

Ключевые слова: Полулинейное волновое уравнение, DtN – граничные условия (условия типа Дирихле-Нейман), функция Ханкеля, метод конечных элементов, схема Ньюмарка.

2020 Mathematics Subject Classification: MSC 2020, 35L20, 35B40, 65M60, 65M12, 65M15

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Givoli D., Patlashenko I. Finite-element solution of nonlinear time-dependent exterior wave problems, *Journal of Computational Physics*, **143**:1 (1998), 241–258.
- [2] Wang J., Yang J. Z., Zhang J. On the stability and convergence of high-order numerical approximations for nonlocal wave equations with DtN-type absorbing boundary conditions, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **43**:1 (2023), 604–632.
- [3] Hochbruck M., Leibold J. Finite element discretization of semilinear acoustic wave equations with kinetic boundary conditions, *ETNA - Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **53** (2020), 522–540.
- [4] Pang G., Ji S., Zhang J., Qian D. Numerical analysis of fully discrete peridynamics with artificial boundary conditions, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **57**:5 (2023), 3029–3059.
- [5] Romanov V., Hasanov A. Recovering a potential in damped wave equation from Neumann-to-Dirichlet operator, *Inverse Problems*, **36**:11 (2020), 115011.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Э.И. АЗИЗБЕКОВ¹, Я.Т. МЕГРАЛИЕВ²

¹Академия Государственного Управления при Президенте АР, Баку, Азербайджан

²Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

¹eazizbayov@dia.edu.az, ²yashar_aze@mail.ru

Обратные задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка играют важную роль в моделировании процессов с эффектами памяти и аномальной диффузией. Дробные дифференциальные уравнения обобщают классические модели и находят широкое применение в современной прикладной науке и технике. В последние годы значительный интерес вызывают прямые и обратные краевые задачи для параболических уравнений с дробной производной по времени, поскольку они позволяют восстанавливать неизвестные параметры системы по косвенным данным.

Особое место среди таких задач занимают нелокальные краевые задачи, в которых дополнительные условия связывают значения решения или его производных в различных точках области. Нелокальные интегральные условия естественным образом возникают при моделировании тепломассопереноса, диффузионных процессов, турбулентной плазмы и ряда технологических процессов, когда информация о системе доступна лишь в усреднённой форме.

Пусть $T > 0$ — фиксированный момент времени, а

$$D_T := \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$$

— прямоугольная область. Рассмотрим задачу нахождения тройки функций $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$, удовлетворяющей уравнению:

$${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + a(t)u(x, t) + b(t)g(x, t) + f(x, t) \quad (x, t) \in D_T \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

$$\int_0^1 (x-1)u(x, t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

$$u(x_i, t) = h_i(t) \quad (i = 1, 2; 0 < x_1, x_2 < 1, x_1 \neq x_2, 0 \leq t \leq T) \quad (5)$$

где

$$f(x, t), g(x, t), \varphi(x), h_1(t) \text{ и } h_2(t) —$$

заданные функции, а $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$ — искомые функции.

В уравнении (1) оператор

$${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \alpha \in (0, 1),$$

обозначает дробную производную в смысле Капуто, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 1. Тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$ будем называть классическим решением задачи (1)-(5), если выполняются следующие условия:

i) функция $u(x, t)$ и производные ${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ непрерывны в D_T ;

- ii) функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на интервале $[0, T]$;
 iii) уравнение (1) и условия (2)-(5) удовлетворяются в обычном (классическом) смысле.

Имеет место следующее предложение.

Предположим, что $\varphi(x) \in C[0, 1]$, $f(x, t), g(x, t) \in C(D_T)$,

$$\int_0^1 (x-1)f(x, t)dx = \int_0^1 (x-1)g(x, t)dx = 0,$$

$$h_i(t), {}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) \in C^1[0, T] \quad (i = 1, 2),$$

$$h(t) \equiv h_2(t)g(x_1, t) - h_1(t)g(x_2, t) \neq 0,$$

где $0 \leq t \leq T$. Кроме того, пусть выполняются условия согласования

$$\int_0^1 (x-1)\varphi(x)dx = 0, \quad \varphi(x_i) = h_i(0) \quad (i = 1, 2).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t) \in C^{2,1}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$ и $b(t) \in C[0, T]$, из соотношений (1)-(3) и

$$u(0, t) = u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$${}^C D_{0t}^\alpha h_i(t) = u_{xx}(x_i, t) + a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) \quad (i = 1, 2; \quad 0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6), (7) удовлетворяют следующим условиям:

$$C_1) \quad \varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi'''(x) \in L_2(0, 1) \text{ и } \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(1);$$

$$C_2) \quad f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T), \quad f_{xxx}(x, t) \in C([0, T]; L_2(0, 1)), \\ f(0, t) = f(1, t), f_x(0, t) = 0, \quad f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T);$$

$$C_3) \quad g(x, t), g_x(x, t), g_{xx}(x, t) \in C(D_T), \quad g_{xxx}(x, t) \in C([0, T]; L_2(0, 1)), \\ g(0, t) = g(1, t), g_x(0, t) = 0, \quad g_{xx}(0, t) = g_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T);$$

$$C_4) \quad h_i(t), {}^C D_{0t}^\alpha h_i(t) \in C[0, T] \quad (i = 1, 2), \quad h(t) \equiv h_2(t)g(x_1, t) - h_1(t)g(x_2, t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия $C_1) - C_4)$, тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(3), (6), (7) имеет единственное решение.

Теорема 4. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и

$$\int_0^1 (x-1)f(x, t)dx = \int_0^1 (x-1)g(x, t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\int_0^1 (x-1)\varphi(x)dx = 0, \quad \varphi(x_i) = h_i(0) \quad (i = 1, 2).$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(5) имеет единственное классическое решение.

Следует отметить, что в работах [1–3] авторами исследованы вопросы существования и единственности классических решений соответствующих обратных краевых задач.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение с дробной производной по времени, существование, единственность, классическое решение.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35R11, 35A01, 35A02, 35A09

ЛИТЕРАТУРА

[1] Azizbayov E.I., Mehraliyev Y.T. Determination of source terms in a time-fractional parabolic equation via nonlocal measurements, *J. Contemp. Appl. Math.*, **16**:1 (2026), 198–214.

[2] Azizbayov E.I., Mehraliyev Y.T. Solvability of nonlocal inverse boundary-value problem for a second-order parabolic equation with integral conditions, *Electron. J. Differ. Equ.*, **2017**:125 (2017), 1–14.

[3] Azizbayov E.I., Safarova A.N. An inverse problem for a parabolic equation with nonlocal boundary and two-point overdetermination conditions, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **18**:4 (2025), 1–19.

НЕОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ГЛИОМЫ

С.А. АЛДАШЕВ¹, С.И. КАБАНИХИН², М.А. БЕКТЕМЕСОВ³

^{1,3}Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

maktagali@mail.ru

Математическое моделирование пространственно-временной динамики злокачественных опухолей, в частности глиом головного мозга, является одной из актуальных задач современной прикладной математики и биомедицины. В математических моделях такие процессы часто описываются системами уравнений в частных производных смешанного типа, например, смешанные задачи для класса вырождающихся трёхмерных гиперболо-эллиптических уравнений, возникающих в моделях инфильтративного роста глиомы. Эволюция плотности опухолевых клеток описывается уравнением баланса гиперболического типа, тогда как распределение факторов микроокружения (например, лактата или кислорода) задается эллиптическим уравнением. Зависимость коэффициентов переноса и диффузии от клеточной плотности приводит к вырождению эллиптического оператора в областях низкой концентрации клеток, характерных для периферии опухоли. В цилиндрической геометрии возникает дополнительное геометрическое вырождение на оси симметрии, и усиливает чувствительность решения. При исследовании прямых и обратных задач моделирования опухолевого роста данное свойство приводит к некорректности задачи в смысле Адамара. В связи с этим исследование корректности для вырождающихся трёхмерных гиперболо-эллиптических уравнений представляет интерес как с точки зрения теории уравнений в частных производных, так и в контексте математического моделирования процессов опухолевого роста [1–4].

В данной работе показана неоднозначная разрешимость смешанной задачи в цилиндрической области [5], и получен явный вид классического решения задачи для вырождающихся трёхмерных гиперболо-эллиптических уравнений.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – конечная область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t) , ограниченная при $t > 0$ цилиндром $\Gamma_\alpha = \{(x, t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = \alpha > 0$, а при $t < 0$ цилиндром $\Gamma_\beta = \{(x, t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим через Ω_α^+ и Ω_β^- части области $\Omega_{\alpha\beta}$, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее основание области Ω_α^+ , а σ_β – нижнее основание области Ω_β^- . Нам удобно перейти

от декартовых координат x_1, x_2, t к полярным $r, \theta, t : x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, r \geq 0$. В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающееся гиперболо-эллиптическое уравнение:

$$0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 p_i(t) u_{x_i x_i} + u_{tt}, t > 0, \\ \sum_{i=1}^2 g_i(t) u_{x_i x_i} - u_{tt}, t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$p_i(t) > 0 \text{ при } t > 0, \quad p_i(0) = 0, \quad p_i(t) \in C([0, \alpha]) \cap C^2((0, \alpha)), \\ g_i(t) > 0 \text{ при } t < 0, \quad g_i(0) = 0, \quad g_i(t) \in C([\beta, 0]) \cap C^2((\beta, 0)), \quad i = 1, 2.$$

В качестве смешанной задачи рассмотрим следующую

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha^+ \cup \Omega_\beta^-)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta),$$

при этом $\varphi(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta), \psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(r, \theta) \in C(\overline{\sigma}_\alpha) \cap C^2(\sigma_\alpha), \psi_1(t, \theta) \in C(\overline{\Gamma}_\alpha) \cap C^2(\Gamma_\alpha), \psi_2(t, \theta) \in C(\overline{\Gamma}_\beta) \cap C^2(\Gamma_\beta)$. Тогда задача 1 разрешима неоднозначно, если выполняется соотношение:

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функции Бесселя первого рода $J_n(z)$

$$\beta' = \int_{\beta}^0 \sqrt{\frac{g_1(\xi) + g_2(\xi)}{2}} d\xi, \quad n = 0, 1, \dots$$

Финансирование: Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP26103465).

Ключевые слова: некорректность, уравнения смешанного типа, гиперболо-эллиптическое уравнения, цилиндрическая область, моделирование роста глиомы.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35A01, 35A02; 92C50.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Miranville A. Mathematical analysis of a parabolic-elliptic model for brain lactate kinetics, in: *Solvability, Regularity, and Optimal Control of Boundary Value Problems for PDEs*, Springer INdAM Series, **22** (2017), 379–403.
- [2] Cherfils L., Gatti S., Miranville A., Guillemin R. Analysis of a tumor growth model and lactate metabolism in glioma, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, **14**:8 (2021), 2729–2749.
- [3] Obert A., Costalat R., Magistretti P.J., Pellerin L. Brain lactate kinetics: modeling neuronal lactate uptake data during activation, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **102** (2005), 16448–16453.
- [4] Aldashev S., Kabanikhin S., Bektemessov M. The ill-posedness of the mixed problem in the cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **128**:4 (2025), 25–34.
- [5] Bektemessov Z., Cherfils L., et al. On a data-driven mathematical model for prostate cancer bone metastasis, *AIMS Mathematics*, **9**:12 (2024), 34785–34805.

ЗАДАЧА С НЕПОЛНЫМ УСЛОВИЕМ СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

Б.Б. АМОНОВ

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

amonovbobur91@mail.ru

Постановка задачи FN. (Франкля Нахушева). Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup J$ – неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где Ω^+ – полуплоскость $y > 0$, Ω^- – конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(\text{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = (-1, 1)$ – интервал оси $y = 0$. В уравнении (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$m > 0, \quad 0 \leq \alpha_0 < (m+2)/2, \quad -m/2 < \beta_0 < 1.$$

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависят от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах (1). На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$, ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2, \quad B_0^* C_0^* : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2, \quad A_0^* B_0^* : \beta_0 = 1$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta E_0^* C_0^* B_0^* \cup E_0^* C_0^*$, где $E_0^* = E_0^*(0, 1)$.

Пусть Ω_R^+ – конечная область, отсекаемая от области Ω_R^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R, 0)$, $B_R = B_R(R, 0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2, \quad -R \leq x \leq R, \quad 0 \leq y \leq ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I &= \{(x, y) : -1 < x < 1, \quad y = 0\}, \\ I_1 &= \{(x, y) : -\infty < x < -1, \quad y = 0\}, \\ I_2 &= \{(x, y) : 1 < x < \infty, \quad y = 0\}, \\ \Omega_R &= \Omega_R^+ \cup \Omega^- \cup I, \end{aligned}$$

Ω_R – подобласть неограниченной области Ω .

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 – обозначим точку пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in J = AB = (-1, 1)$ – интервал оси $y = 0$.

В задачах со смещением [1] в отличие от задачи Трикоми ([2], с.29), характеристики AC и BC были равноправны в смысле носителей краевых данных, т.е. все точки характеристик AC и BC были охвачены краевым условием. В данной работе в области Ω для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом исследуется корректность задачи, где условия смещения задается на части граничной характеристике AC_0 и на характеристике BC , а части C_0C характеристики AC освобождены от краевых условий, и это недостающие условие смещения заменено аналогом условия Франкля [3] на отрезке вырождения AB .

Задача FN. Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1. Функция $u(x, y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{\Omega_R}$ неограниченной области Ω ;
2. Функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3. Функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса $R_1[4]$ в области Ω^- ;
4. На интервале вырождения AB выполняется условия сопряжения [4]

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{c\}, \quad (2)$$

причём пределы в (2) при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/(2(m + 2))$, $\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/(2(m + 2))$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$;

5. В области Ω^+ выполняется равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad y > 0, \quad (3)$$

где $R^2 = x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{m+2}$;

5. Выполнены условия

$$u(x, +0) = \varphi_1(x), \quad x \in \overline{I_1}; \quad u(x, +0) = \varphi_2(x), \quad x \in \overline{I_2}, \quad (4)$$

$$(1 + x)^\alpha D_{-1, x}^{1-\beta} u[\theta_0(p(x))] = \mu(x)(1 - x)^\beta D_{x, 1}^{1-\alpha} u[\theta_1(x)] + \rho(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (5)$$

$$u(p(x), 0) - u(x, 0) = f(x), \quad x \in [-1, 1]; \quad (6)$$

где

$\theta_0(p(x_0))$, $\theta_1(x_0)$ —аффиксы точек пересечения граничных характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in I$, $D_{-1, x}^l$ и $D_{x, 1}^l$, где $l > 0$ — операторы дробного дифференцирования Римана-Лиувилля [4]. Заданные функции

$$\varphi_i \in C(\overline{I_i}) \cap C^2(\overline{I_i}), \quad i = 1, 2,$$

$$\rho(x) \in C(\overline{I}) \cap C^{1, \gamma_0}(I),$$

$$f(x) \in C(\overline{I}) \cap C^{1, \gamma_0}(I), \text{ причем } \varphi_1(-1) = 0, \varphi_2(1) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_1(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x) = 0.$$

Отметим, что условие (5) является недостающим условием смещения так как она задается на часть $AC_0 \subset AC$ и BC граничных характеристик, а условие (6) является аналогом условия Франкля на отрезке вырождения уравнения (1).

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; задача со смещением; нормальной кривой.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35L81

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа., *Дифференц. уравнения.*, **Т.5.№1**: (1969), 4—59.
- [2] Трикоми, Ф О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, *М-Л Гос.тех.издат*, (1947), 192 с.
- [3] Франкль Ф.И Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, *ПММ*, **20 (2)**: (1956), 196—202.
- [4] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, *"унив. " "янгил полиграф сервис."*, Ташкент, (12005), 223 с.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

А.Ж. АШИРБАЕВА¹, Г.А. КАРИМОВА²

¹Ошский технологический университет им. М.М. Адышева, Ош, Кыргызстан

²Кыргызский национальный университет им. Дж. Баласагына, Ош, Кыргызстан

aijarkyn.osh@mail.ru

В работе рассмотрена обратная задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка со степенными особенностями. При исследовании решения поставленной задачи Коши использовался метод дополнительного аргумента. Данный метод ранее использовался для изучения решения прямых задач. Применение метода дополнительного аргумента к обратным задачам, а тем более к задачам со степенными особенностями, определяет актуальность работы. В задаче наряду с неизвестной функцией некоторые функции из начальных условий рассматриваются как неизвестные.

Применения метода дополнительного аргумента для нелинейных уравнений в частных производных, в том числе для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений рассмотрены в работах [1-4].

В данной работе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение с частными производными вида:

$$D^2[t^m, -x^n]D^2[t^m, x^n]u(t, x) = f(t, x, u) + \int_0^t K(t, s)u(s, x)ds, \quad (1)$$

$(t, x) \in G_2(T = [0, T] \times R)$, где $D[\omega, v] = \omega \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$, m и n — действительные числа, и где $M = \|K(t, x)\|_{G_2(T)}$,

$$f(t, x, u) \in \bar{C}^{(4)}(G_2(T)) \times R \cap Lip(L).$$

В данной работе использовали классы функций, введенные в работе [2].

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \varphi_k(x), k = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, пока неизвестные функции, которые определим в ходе решения задачи, $\varphi_0(x)$ заданная непрерывная функция.

Ключевые слова: Обратная задача, метод дополнительного аргумента, задача Коши, интегро-дифференциальное, четвертый порядок.

2020 Mathematics Subject Classification: 35C15

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аширбаева А.Ж. Исследование решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка типа Уизема, *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям*, 28 (1999), 159–165.

[2] Аширбаева А.Ж. *Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента*, Илим, Бишкек (2013).

[3] Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема, *Доклады Российской АН*, 323:3 (1992), 410–414.

[4] Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема, *Доклады Российской АН*, 325:6 (1992), 1111–1115.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А.Ж. АШИРБАЕВА¹, Р.А. ТУЛЕНБАЕВА², Д.Д. ДЫЙКАНОВ³

^{1,3}Ошский технологический университет им. М.М. Адышева, Ош, Кыргызстан

²Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

aijarkyn.osh@mail.ru

Расширяются области применения метода дополнительного аргумента, разработанного известными учеными Кыргызской Республики. Если ранее данный метод применялся в прямых задачах, предусмотренных для уравнений в частных производных различного порядка, то в настоящее время рассматривается возможность применения и для обратных задач. В статье рассматривается обратная задача для уравнения в частных производных второго порядка. В частности, наряду с неизвестной функцией функция в начальном условии также рассматривается как неизвестная. Доказано существование и единственность решения поставленной обратной задачи.

В данной статье метод дополнительного аргумента распространен для нелинейного уравнения второго порядка относительно неизвестной функции вида:

$$b^2(t, x)u_{tt}(t, x) - a^2(t, x)u_{xx}(t, x) = c(t, x)u_t(t, x) + d(t, x)u_x(t, x) + f(t, x, u), \quad (1)$$

$$(t, x) \in G_2(T) = [0, T] \times R.$$

Опубликован ряд статей посвященных применению метода дополнительного аргумента к прямым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных различного порядка и системам уравнений [1 – 4].

Рассмотрено гиперболическое уравнение (1) со следующими начальными условиями:

$$u(0, x) = \psi_0(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi_1(x). \quad (3)$$

где $\psi_0(x)$ заданная достаточно непрерывная функция, а $\psi_1(x)$ неизвестная функция.

Ключевые слова: Частная производная, обратная задача, дополнительный аргумент, метод, начальное условие, неизвестная функция, второй порядок

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аширбаева А.Ж., *Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента*, Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

[2] М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко *К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема*, Доклады Российской АН. – 1992. – Т. 323. – №3. – С. 410–414.

[3] А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева, *Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа*, Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. – С. 27–32.

[4] А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов, *Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными*, Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – №5. – С. 87–90.

АБЕЛЬ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІН ҚОЛДАНУ АРҚЫЛЫ ПРОЕКЦИЯЛЫҚ ДЕРЕКТЕР БОЙЫНША ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПІШІНДІ ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ ЕСЕБІ

А.Б. ЕСЕНӘЛІ¹, А.А. ПАПЫШЕВ²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан

¹altynay.yessenali@gmail.com, ²darap57@mail.ru

Интегралдық теңдеулер теориясында Абель теңдеуі классикалық және практикалық тұрғыдан маңызды орын алады. Жұмыста проекциялық деректер бойынша геометриялық пішінді қалпына келтіру есебі қарастырылады, ол Абель интегралдық теңдеуінің нақты шешімі арқылы табылады. Есептің негізгі ерекшелігі оның шешімінің эстетикалық қасиеттерінде: алынған пішін гүл жапырағына ұқсас және максимум нүктесі $x = \frac{1}{3}$ -те орналасады, бұл өнерде белгілі «үштен бір ережесімен» сәйкес келеді.

Ox осіне қатысты симметриялы жазық фигураны қарастырамыз, оның шекарасы $y = \pm\varphi(x)$, $x \in [0, 1]$ теңдеулерімен беріледі, мұнда $\varphi(x) \geq 0$. Фигураны вертикаль жарықпен шамдағанда x нүктесіндегі көлеңке ені келесі теңдеумен сипатталады:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = C \cdot x(4-3x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

мұнда $C > 0$ — белгісіз тұрақты шама. Қосымша шарт ретінде фигураның ең үлкен биіктігі берілген:

$$\max_{x \in [0, 1]} \varphi(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (2)$$

(1) теңдеуін шешіп, C тұрақтысын және $\varphi(x)$ функциясының нақты түрін табу керек.

Анықтама 1. (1) түріндегі теңдеу *Абель интегралдық теңдеуі* деп аталады, мұнда ядро $K(x, t) = (x - t)^{-1/2}$ әлсіз ерекшелікке ие ($t \rightarrow x$ болғанда).

Теорема 2 (Н.Г. Абель, 1826). *Егер $f \in C[0, 1]$ және $f(0) = 0$ болса, онда*

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x)$$

теңдеуінің $[0, 1]$ аралығында жалғыз шешімі бар және ол келесі формула арқылы беріледі:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt. \quad (3)$$

Ескерту 3. (3) формуласы кері есепті шешеді: көлеңке профилі $f(x)$ бойынша бастапқы геометриялық пішін $\varphi(x)$ толық қалпына келтіріледі. Бұл компьютерлік томографияның математикалық негізі болып табылады.

Қадам 1. $f(t) = C(4t - 3t^2)$ функциясын (3) формуласына қоямыз:

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{4t - 3t^2}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Қадам 2. Интегралды есептеу үшін $t = xu$ алмастыруын жасаймыз ($u \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{4t - 3t^2}{\sqrt{x-t}} dt &= 4x^{3/2} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du - 3x^{5/2} \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du = \\ &= 4x^{3/2} \cdot \frac{4}{3} - 3x^{5/2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15} x^{3/2} (5 - 3x). \end{aligned} \quad (4)$$

Қадам 3. (4) нәтижесін дифференциалдаймыз:

$$\frac{d}{dx} [x^{3/2}(5 - 3x)] = \frac{15}{2} \sqrt{x}(1 - x),$$

сондықтан

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{15}{2} \sqrt{x}(1 - x) = \frac{8C}{\pi} \sqrt{x}(1 - x). \quad (5)$$

Қадам 4. (2) шартын қолданып, C тұрақтысын анықтаймыз. $\varphi(x) = k\sqrt{x}(1 - x)$ функциясының туындысы:

$$\varphi'(x) = k \cdot \frac{1 - 3x}{2\sqrt{x}}.$$

$\varphi'(x) = 0$ шартынан $x_{\max} = 1/3$. Максимум мәні:

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = k \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \implies k = 1.$$

Демек, $\frac{8C}{\pi} = 1$, яғни

$$C = \frac{\pi}{8}.$$

Есептің толық шешімі:

$$\varphi(x) = \sqrt{x}(1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad C = \frac{\pi}{8}. \quad (6)$$

Фигураның толық ауданы:

$$S = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x}(1 - x) dx = \frac{8}{15}.$$

Абель интегралдық теңдеуінің нақты шешімі арқылы табиғи пішіндерді математикалық тұрғыдан модельдеуге болатыны көрсетілді. Алынған $\varphi(x) = \sqrt{x}(1 - x)$ функциясы гүл жапырағына ұқсас биоморфты пішін береді, ал оның максимумының $x = \frac{1}{3}$ нүктесінде орналасуы математика мен өнердің гармониялық байланысын бейнелейді. Бұл есеп интегралдық теңдеулер теориясының кері есептерге қолданылуын және оның практикалық маңыздылығын (томография, стереология) көрсетеді.

Кілтті сөздер: Абель теңдеуі, интегралдық теңдеу, кері есеп, максимум нүкте, математикалық модельдеу.

2020 Mathematics Subject Classification: 45D05, 45E10, 65R32

ӘДЕБИЕТ

[1] Смирнов В.И. *Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1: Интегральные уравнения. Вариационное исчисление*, Наука, Москва. (1974).

[2] Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям*, Физматгиз, Москва. (1959).

[3] Gorenflo R., Vessella S. *Abel Integral Equations: Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics, 1461* (1991), Springer-Verlag, Berlin.

[4] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Integral Equations*, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2008).

ПСЕВДОГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕРІ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Ж. БАЙКЕН¹, С.Е. АЙТЖАНОВ²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

¹baikenzhuldyzmm@gmail.com, ²aitzhanov.serik81@gmail.com

Бұл жұмыста локалдік емес қосымша шартпен берілген сызықты емес псевдогипербола-лық теңдеу үшін кері есептің шешімділігі зерттеледі. Кері есеп шешімінің бар және жалғыздығы дәлелденеді. Алдымен кері есепті тура есепке келтіріледі, яғни берілген кері есеппен локалді емес псевдогиперболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің эквиваленттілігі көрсетіледі. Содан соң, тура есептің регулярлы жалпылама (яғни теңдеуге қатысатын барлық дербес туындыларының $L_2(Q_T)$ кеңістіктен болатын) шешімділігі дәлелденеді.

Дифференциалдық теңдеулерге қойылған кері есептер математикалық зерттеулердің маңызды саласы болып табылады [1-7]. Дифференциалдық теңдеулер үшін кері есептер теориясы математикалық физиканың қарқынды дамып келе жатқан саласы болып табылады. Осы саладағы зерттеулердің қарқындылығы маңызды деп танылатын қолданбалы келелі мәселелерді кең тұрғыда шешудің математикалық әдістерін жетілдіру қажеттілігімен тығыз байланысты. Аталған мәселелерге ғылымның әр түрлі салаларындағы, соның ішінде қазіргі математиканың көкейтесті мәселелерінің қатарында саналатын сейсмология, геофизика, биология, медицина, өндірістік өнімдердің сапасын бақылау, экология, қоршаған ортаны қорғау мен термоядерлік синтезді басқаруда, тағы сол сияқты салалардағы сан алуан құбылыстарды шешу жатады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP26199323) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: диффузия теңдеуі, біртекті дене, бастапқы күй, жергілікті біртекті емес, мөлдір шекаралық шарттар.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35L82

ӘДЕБИЕТ

- [1] Asanov, A., Atamanov, E.R. *Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations*, De Gruyter, Inverse and Ill-posed Problems Series, Utrecht, The Netherlands (1997).
- [2] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Volume 231*, Marcel Dekker, New York (2000).
- [3] Dekhkonov F.N., Turmetov B.K. On the control problem for a pseudo-parabolic equation with involution in a bounded domain, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 322-337.
- [4] Turmetov B., Koshanova M., Muratbekova M. Direct and inverse problems for a fractional parabolic equation with multiple involution, *Fractional Differential Calculus*, **14**:2 (2024), 213–233.
- [5] Kozhanov, A. I., Dyuzheva A.V. Solvability of a nonlocal problem with integral conditions for third-order Sobolev-type equations, *Mathematical Notes of NEFU*, **27**:4 (2020), 30–42.
- [6] Ismailov M.I., Erkovan S. Inverse Problem of Finding the Coefficient of the Lowest Term in Two-Dimensional Heat Equation with Ionkin-Type Boundary Condition, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:5 (2019), 791–808.
- [7] Antontsev S. N., Aitzhanov S. E., Ashurova G.R. An inverse problem for the pseudo-parabolic equation with p-Laplacian, *Evolution equation and control theory*, **11**:2 (2022), 399–414.
- [8] Khompysh Kh., Shakir A. An inverse source problem for a nonlinear pseudoparabolic equation with p-Laplacian diffusion and damping term, *Quaestiones Mathematicae*, **46**:9 (2022), 1889–1914.

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г.Б. БАКАНОВ¹, С.К. МЕЛДЕБЕКОВА²

^{1,2}Международный казахско-турецкий университет им.Х.А. Ясави, Туркестан,
Казахстан

²Южно-Казахстанский Университет им.М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

¹galitdin.bakanov@ayu.edu.kz, ²saule.meldebekova@auuezov.edu.kz

Задача интегральной геометрии заключается в нахождении функций, определенных на определенном многообразии, через его интегралы на определенном множестве подмногообразий с меньшей размерностью. При достаточно общих предположениях относительно семейства кривых и весовой функции задача интегральной геометрии сводится к граничной задаче для уравнения смешанного типа. В результате исследований получены оценки устойчивости и единственности решения дискретных аналогов задач интегральной геометрии на пространстве достаточно гладких функций. В связи с отсутствием теоремы о существовании решения в работе используется понятие условной корректности задачи, а именно, предполагается, что решения дифференциально-разностной и конечно-разностной задач существуют. Доказательство проводится с помощью метода, предложенного в работах [1-3]. Полученные результаты способствуют развитию теории и практической реализации задач интегральной геометрии в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: интегральная геометрия, оценка условной устойчивости, дифференциально-разностная задача, конечно-разностная задача.

2020 Mathematics Subject Classification: 53C65, 35R30

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kabanikhin S. I., Bakanov G. B. Stability of a finite-difference analogue of a two-dimensional problem of integral geometry, *Doklady Akademii Nauk – Russian Academy of Sciences*, **292**:1 (1987), 25–29.
- [2] Bakanov G. On the stability of a differential- difference analogue of a two dimensional problem of integral geometry, *Filomat*, **32**:3 (2018), 933–938, doi:10.2298/FIL1803933B.
- [3] Bakanov G. B., Meldebekova S. K. Investigation of the Difference Problem for a Mixed Type Equation, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:7 (2024), 3246–3255.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1- ПОРЯДКА

Т.О. БЕКЕШОВ¹, А.М. ТОКТОРБАЕВ²

^{1,2}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

¹bekeshov61@mail.ru, ²ain7@list.ru

Как известно, многие прикладные задачи описываются в виде дифференциальных уравнений первого порядка. Развитием компьютерных технологий разработаны многочисленные методы решения таких задач. В связи с этим, важным является качественное исследование решений уравнений. К этим относятся вопросы определения условий, при выполнении которых разрешаются единственность и существование решения задачи. В некоторых случаях очень сложно доказать существование классического решения. Тогда используется понятие обобщенного решения. В данной работе исследуется вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных с двумя независимыми переменными. При этом

допускается, что коэффициенты уравнения могут обращаться в нуль в рассматриваемой области. Используя метод регуляризации Лаврентьева и свойства норм, выведены достаточные условия, при выполнении которых, существует обобщенное решение уравнения.

Так как случай неоднородных краевых задач легко сводится к случаю однородных, не ограничивая общности будем рассматривать задачу

$$\alpha(t, x)u_x + b(t, x)u_t + c(t, x)u = f(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = 0 \quad x \in [0, X];$$

$$u(t, 0) = 0 \quad t \in [0, T]; \quad (2)$$

где $a(t, x)b(t, x), c(t, x)$ и $f(t, x)$ - заданные функции, $u(t, x)$ - неизвестная функция в области $G = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$, Обозначим $Z_2(G)$ пространство функций $u(t, x)$, таких что $u(t, x), u_x(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x) \in L_2(G)$.

Определение 1. Функция $u(t, x) \in L_2(G)$ называется обобщенным решением задачи (1) – (2) при $f(t, x) \in L_2(G)$, если она удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^X \left\{ \left((c(s, y) - a_y(s, y) - b_s(s, y))u^*(s, y) - a(s, y)u_y^*(s, y) - b(s, y)u_s^*(s, y) \right) \right\} u(s, y) dy ds = \\ & = \int_0^T \int_0^X f(s, y)u^*(s, y) dy ds. \end{aligned} \quad (3)$$

для всякой $u^*(t, x) \in Z_2(G)$, такой что $u^*(T, x) = u^*(t, X) = 0$

Предполагаем выполнение следующих условий:

а) $a(t, x), b(t, x)$ - неотрицательные, непрерывные функции и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области G , при этом $a(t, x)$ -невозрастающая по t , $b(t, x)$ -невозрастающая по x и $c(t, x)$ -непрерывна по совокупности (t, x) в области G

б) Для любых $(t, x, s, y) \in G_3 = \{(t, x, s, y) : 0 \leq s \leq t \leq T, 0 \leq y \leq x \leq X\}$ $a(s, y)b(s, y) - (x - y)(t - s)c^2(s, y) \geq 0$,

в) Для любых $(t, x, s, y) \in G_3$ справедливо $c(s, y) - (t - s)c_s(s, y) - (x - y)c_y(s, y) + (x - y)(t - s)C_{sy}(s, y) \geq K$

где K – некоторая положительная постоянная.

Теорема 2. Если выполняются условия а) - в) и $f(t, x) \in Z_2(G)$, то существует обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1) – (2).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, функциональные пространства, интегралы, обобщенное решение.

2020 Mathematics Subject Classification: 35F10

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Асанов, Т. Бекешов, *On one class of nonclassical linear Volterra integral equations of the first kind*, Ukrainian Mathematical Journal, 72, №2, 177-190 (2020).
- [2] Ф.Р.Гантмахер *Теория матриц*, Москва, Наука (1988)
- [3] В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко, *Моделирование развивающихся систем*, Москва, Наука (1983).
- [4] М. М. Лаврентьев, *Об интегральном уравнении Вольтерра первого рода*, Докл. АН СССР, 127, №1, 31-33 (1959).
- [5] М. И. Иманалиев, А. Асанов, *О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода*, Докл. АН СССР, 430, №6, 1-4 (2010).

[6] М. И. Иманалиев, А. Асанов, *Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода*, Докл. АН СССР, 415, №1, 14-17 (2007).

СИСТЕМА НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 1- РОДА

Т.О. БЕКЕШОВ¹, А. АСАНОВ²

¹Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

²НАН КР, Бишкек, Кыргызстан

bekeshov61@mail.ru

Рассмотрим следующую систему.

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t, s) u(s) ds = f(t), \quad t \in [t_0; T] \quad (1)$$

где $\alpha(t)$ - известная функция, причем $\alpha(t_0) = t_0, \alpha(t) \leq t$, при $t \in [t_0, T]$, $K(t, s)$ - заданная матрица- функция размера $n \times n$ с элементами $K_{ij}(t, s)$ - определенные в области $G = \{(t, s) : t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$ и $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ - известная вектор функция в $t \in [t_0; T]$ при этом $f_i(t_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, $au(t)$ -искомая вектор функция $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ на $t \in [t_0; T]$.

Допустим, что $\det[K(t, t)]$ - может обращаться в нуль конечное или счетное число раз в $[t_0, T]$.

Пусть $\lambda_i(t)$ -собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2} [K(t, t) + K^*(t, t)]$$

где $K^*(t, t)$ - сопряженная матрица матрице $K(t, t)$ и

$$\lambda(t) = \min_i \lambda_i(t), \quad t \in [t_0; T] \quad (2)$$

Потребуем выполнение следующих условий:

a) $a(t) \in C^1[t_0, T], a'(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T], \alpha(t_0) = t_0, \alpha(t) \leq t$ при всех $t \in [t_0, T]$

b) при любых фиксированных $t \in (t_0, T]$

$\|K(t, s)\| \in L_1(\alpha(t); t), \|K(t, t)\| \in L_1(t_0; T) \quad \|K(t, t)\| \in N_0 \lambda(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$,

$\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T], \lambda(t)$ -определен по формуле (2).

c) при $t > \tau$ для всех (t, s) и $(\tau, s) \in G$, справедлива

$$\|K(t, s) - K(\tau, t)\| \leq l(s) \int_{\tau}^t \lambda(s) ds, \text{ где } l(t) \in L_1(t_0; T) \quad \lambda(t) \geq 0 \text{ при } t \in [t_0, T]$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\varepsilon \nu(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s) \nu(s, \varepsilon) ds = f(t) + \varepsilon u(t), \quad t \in [t_0; T] \quad (3)$$

где $0 \leq \varepsilon < 1$ - малый параметр, $u(t)$ -решение системы (1).

Далее, доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия a) - c) и

$$\gamma_1 = \exp \left[\sqrt{n}(2e^{-1} + N_0) \int_{\alpha(t)}^{t_0} l(s) ds \right] \gamma_0 N_0 \sqrt{n} < 1$$

где число γ_0 определено в лемме 1. Тогда

1) если система интегральных уравнений (1) имеет решение $u(t) \in C_{n,\varphi}^\gamma[t_0; T]$, $0 < \gamma \leq 1$, то решение $v(t, \varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0; T]$ к решению $u(t)$; при этом справедлива оценка

$$\|u(t) - v(t, \varepsilon)\| \leq \frac{M_2}{1 - \gamma_1} \varepsilon^\gamma \quad (4)$$

где $M_2 = C_1 M_1$ здесь C_1 определен в лемме 3, а

$$M_1 = \exp \left[\sqrt{n}(2e^{-1} + N_0) \int_{t_0}^T l(s) ds \right]$$

2) если система интегральных уравнений (1) имеет решение $u(t) \in C[t_0; T]$ то решение $v(t, \varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0; T]$ к решению $u(t)$; при этом справедлива оценка

$$\|u(t) - v(t, \varepsilon)\| \leq \frac{M_1}{1 - \gamma_1} \left[2\omega_\pi(\varepsilon : \beta) + 4\|u(t)\|_C e^{-\varepsilon\beta^{-1}} \right] : \quad (5)$$

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, функциональные пространства, интегралы, обобщенное решение, система интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. М. Лаврентьев, *Об интегральном уравнении Вольтерра первого рода*, Докл. АН СССР, 127, №1, 31-33 (1959).
- [2] А. С. Апарцин *Неклассические уравнения Вольтерра первого рода*, Теория и численные методы, Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск (1999). Электричество, №10, 69-75 (2005).
- [3] М. М. Лаврентьев, *О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода*, Докл. АН СССР, 127, №1, 31-33 (1959).
- [4] A. Asanov, T. Bekeshov, *On one class of nonclassical linear Volterra integral equations of the first kind*, Ukrainian Mathematical Journal, 72, № 2, 177-190 (2020).

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В МОДЕЛИРОВАНИИ РОСТА ОПУХОЛИ: ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ГОМПЕРТЦА

Ж.М. БЕКТЕМЕСОВ¹, Б.Б. СУЛТАН²

^{1,2}Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

¹Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан

¹zholaman.bektemessov@kaznu.kz, ²bekzat.sultan@icloud.com

Онкологические заболевания остаются одной из ведущих причин смертности во всём мире и представляют собой глобальную медико-биологическую проблему. Рост опухоли является сложным нелинейным процессом, включающим пролиферацию клеток, ограниченность ресурсов микроокружения, процессы апоптоза и пространственно-временные взаимодействия. Понимание количественной динамики роста опухоли имеет ключевое значение для прогнозирования развития заболевания, оценки эффективности терапии и построения персонализированных моделей лечения. Однако в экспериментальных и клинических исследованиях доступны

лишь дискретные наблюдения объёма опухоли, что приводит к необходимости восстановления неизвестных параметров математических моделей на основе ограниченных данных. Такая задача формулируется как обратная задача, которая является некорректной и требует применения устойчивых численных методов.

В работе авторов [1], для описания динамики роста опухоли используется логистическая модель, основанная на дифференциальном уравнении:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C \left(1 - \frac{C}{C_{\max}} \right) - gC \quad (1)$$

где $C(t)$ — объём опухоли, α — коэффициент скорости роста, $C_{\max}$ — предельная ёмкость среды. Эта модель позволяет учитывать ограниченность ресурсов и приводит к сигмоидальной кривой роста. На основе экспериментальных данных была решена обратная задача идентификации параметров путём минимизации функционала невязки между модельными и наблюдаемыми значениями. Полученные результаты показали хорошее согласование модели с экспериментальными данными, однако дальнейший анализ показал, что логистическая модель имеет ряд ограничений. В частности, её решение обладает симметричной сигмоидальной формой, тогда как реальные экспериментальные данные роста опухоли часто демонстрируют асимметричную динамику. Это приводит к появлению систематических отклонений между модельными и экспериментальными значениями, особенно на ранних и поздних стадиях роста. Кроме того, симметричная структура логистической модели ограничивает её гибкость при решении обратной задачи и может снижать точность идентификации биологических параметров. В связи с этим в данной работе для более точного описания динамики роста опухоли была использована модель Гомпертца [2], задаваемая дифференциальным уравнением:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C \ln \left(\frac{C_{\max}}{C} \right) \quad (2)$$

где параметры α и $C_{\max}$ имеют аналогичный биологический смысл, но структура уравнения обеспечивает более гибкое описание процессов замедления роста опухоли. В отличие от логистической модели, модель Гомпертца приводит к асимметричной сигмоидальной кривой, что более точно соответствует наблюдаемым экспериментальным данным роста опухоли. Для модели Гомпертца была решена обратная задача идентификации параметров на основе экспериментальных данных роста опухолевых клеток. Минимизация функционала невязки выполнялась с использованием методов численной оптимизации и методом нелинейных наименьших квадратов, включая генетический алгоритм. Численное решение прямой задачи осуществлялось методом Рунге–Кутты 4-ого и 5-ого порядка.

Полученные результаты показали, что модель Гомпертца обеспечивает более точное согласование с экспериментальными данными по сравнению с логистической моделью. На графике (1) сравнения модельных и экспериментальных данных наблюдается более высокая точность аппроксимации, особенно на ранних стадиях роста и в области насыщения. Модель Гомпертца демонстрирует более устойчивое поведение при решении обратной задачи и обеспечивает более надёжную идентификацию параметров.

Таким образом, проведённое исследование показывает, что использование модели Гомпертца позволяет повысить точность математического моделирования роста опухоли и улучшить решение обратной задачи идентификации параметров. Полученные результаты подтверждают эффективность применения гомпертцевской модели для описания динамики опухолевого роста и демонстрируют перспективность её использования в задачах математической онкологии и биомедицинского моделирования.

Финансирование: Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP26103465).

Ключевые слова: обратная задача, рост опухоли, логистическая модель, модель Гомпертца, идентификация параметров, математическое моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A55, 65L09

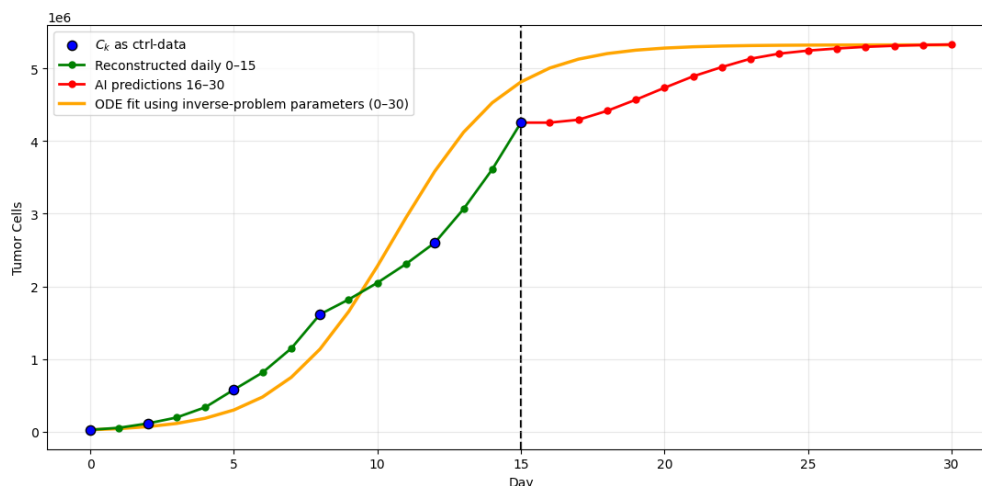


Рис. 1: Сравнение экспериментальных данных роста опухоли с логистической моделью и оптимизированной моделью Гомпертца

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bektemessov Z., Cherfils L., Allery C., Berger J., Serafini E., Dondossola E., Casarin S. On a data-driven mathematical model for prostate cancer bone metastasis, *AIMS Mathematics*, **9**:12 (2024), 34785–34805.
- [2] Taib Siti Farzana, Mansur Syahira. Mathematical Modeling in Tumor Growth Using Gompertz Model, *Enhanced Knowledge in Sciences and Technology*, **2**:1 (2022), 481–490.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.С. БЕРДЫШЕВ¹, А.Е. МАРАТ²

^{1,2}Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

¹berdyshev@mail.ru, ²marataigerim21@gmail.com

Рассматривается нелокальная краевая задача для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка

$$Lu = f(x, y), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} lu = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases}$$

Задача исследуется в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$, где $\Omega^- \subset \{y < 0\}$ ограничена характеристиками гиперболической части уравнения, а $\Omega^+ \subset \{0 < y < 1\}$ ограничена прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Требуется найти решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{AA_0 \cup A_0 B_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AA_0 \cup AC} = 0$$

$$[u_x - u_y][\theta_0(t)] + \mu(t)[u_x - u_y][\theta^*(t)] = 0$$

и условиям склеивания на линии $y = 0$

$$u_x(x, +0) = u_x(x, -0),$$

$$u_y(x, +0) = \alpha u_y(x, -0) + \beta \int_0^x u_y(t, -0) Q(x, t) dt, \quad 0 < x < 1,$$

где n – внутренняя нормаль, $\alpha, \beta = \text{const}$, такое что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, и Q – заданная функция.

Разрешимость задачи исследуется методом сведения её к интегральным и интегро-функциональным уравнениям. Получены условия существования и единственности регулярных и сильных решений сформулированных задач в областях с характеристическими и нехарактеристическими границами. Найдены достаточные условия на исходные данные задачи, обеспечивающие её однозначную разрешимость, и доказаны теоремы о свойстве Вольтерра для задач с локальными краевыми условиями, а также для задач с нелокальными условиями типа Бицадзе–Самарского.

Отметим, что вопросы однозначной разрешимости локальных и нелокальных краевых задач и их спектральных свойств, включая свойство Вольтерра и существование собственных значений, для смешанных парабола-гиперболических уравнений второго и третьего порядков рассматривались в работах [1–3].

Ключевые слова: смешанное парабола-гиперболическое уравнение, нелокальная краевая задача, условия склеивания, задача Бицадзе–Самарского, свойство Вольтерра, спектральные свойства.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35G15

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бердышев А. С. Краевые задачи и их спектральные свойства. Алматы, (2015).
- [2] Berdyshev A. S., Cabada A., Karimov E. T. Boundary Value Problems, (2013).
- [3] Berdyshev A., Cabada A., Karimov E. Mathematics, (2020).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Х.Г. ВАСИЕВА

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

vasiyeva98@gmail.com

Постановка задачи. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u - C(t)v, \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A(t), B(t), C(t)$ – матричные функции размерности которых $(n \times n), (n \times p), (n \times q)$, элементы которой являются измеримыми функциями времени; они к тому же суммируемы на каком-либо конечном интервале $[t_0, T], t_0 < T < +\infty$; u и v управляющие параметры преследующего и преследуемого соответственно, $u \in \mathbb{R}^p, p \geq 1$ и $v \in \mathbb{R}^q, q \geq 1$. Управления преследующего и убегающего игроков $u(t), v(t)$, являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям вида

$$\int_0^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt \leq 1, \quad \int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2 dt \leq 1. \quad (2)$$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ вместе с нестационарной динамической системой (1) задано цилиндрическое терминальное множество вида $M(t) = M_0 + M_1(t), t \in [t_0, +\infty)$, где M_0 – линейное подпространство из пространства $\mathbb{R}^n$, а $M_1(t)$ – измеримое компактнозначное многозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$).

Преследование начинается из начального положения $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M(t)$, $t \geq t_0$ и считается законченным, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на терминальное множество M , в момент времени $t = t(z_0)$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы максимально оттянуть окончание игры.

Отметим, что для решения $z(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$ уравнения (1) справедлива формула Коши в задаче преследования (1), которые удовлетворяющие (2) ограничениями, имеет следующее представление в силу формулы:

$$z(t) = z(t, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)[B(s)u(s) - C(s)v(s)]ds. \quad (3)$$

Здесь матрица-функция $\Phi(t, s)$ - удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi(t, s)}{ds} = \Phi(t, s)A(s), \quad t \geq t_0,$$

$\Phi(t, s) = \tilde{0}$, $t < s$, и условию $\Phi(t, t) = E$, где E — единичная матрица.

Определение 1. Будем говорить, что в игре (1)-(2) из начального положения z_0 возможно завершение преследования за время $T = T(z_0)$, $t_0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, v)$, $t_0 \leq t < +\infty$, $v \in R^q$, $u(t, v) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, $v(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $t_0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1$ и траектория $z(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, соответствующая управлению $(u(t), v(t))$ уравнения (1) попадает на терминальное множество $M(t)$ при некотором $t = t^* \in [t_0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M(t)$.

Требуется найти начальные положения z_0 из которых в игре (1)-(2) возможно завершение преследования за конечное время T .

Пусть $\tau > 0$ число и $t \in [t_0, \tau]$. Через π — обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L : $\pi: R^n \rightarrow L$.

Предложение 2. Существует такое число α , $t_0 < \alpha < 1$, $t \geq t_0$ что для всех положительных t выполняется включение

$$\pi\Phi(t, t_0)C(t)V \subset \alpha\pi\Phi(t, t_0)B(t)U,$$

где $U = \{u \in R^p : \|u\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1\}$ и $V = \{v \in R^q : \|v\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1\}$ - единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение z_0 . Положим

$$\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] = \pi\Phi(\tau, t_0)z_0 - \int_{t_0}^{\tau} \tilde{w}(\tau - t)dt, \quad (4)$$

Введем вспомогательное многозначное отображение вида:

$$\hat{W}(\tau, t, v) = \left\{ \lambda \in R : \left[\lambda \left(M_1(t) - \xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right) + \pi\Phi(\tau, t)C(t)v + \tilde{w}(t) \right] \cap \sqrt{(1 - \alpha) + \alpha\|v\|^2} \cdot \pi\Phi(\tau, t)B(t)U \neq \emptyset \right\}, \quad (5)$$

где $(\tau, t, v) \in [t_0, \infty) \times [t_0, \infty) \times R^q$.

Из предположения 1 следует, что многозначное отображение $\hat{W}(\tau, t, v)$ непусто и непрерывен на множестве $[t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \times V$, то в силу утверждения 1.3.1 [2] многозначное

отображение $\hat{W}(\tau, t, v)$ полунепрерывно сверху, значит, борелевское. Следовательно, согласно лемме 1.3.6 [2] существует хотя бы один борелевский селектор $\tilde{w}(t)$, $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(\tau, t, v)$, $t \geq t_0$. Обозначим $\Gamma^* = \{\tilde{w}(\cdot) : \tilde{w}(t) \in \hat{W}(\tau, t, v), t \geq t_0\}$, совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Теперь с помощью вспомогательного многозначного отображения (5) определим так называемую разрешающую функцию следующим образом [3]:

$$\lambda(z_0, \tau, t, v) = \sup \hat{W}(\tau, t, v), \quad (6)$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Предложение 3. Для начального положения z_0 существует момент времени $\tau = \tau_1(z_0) > 0$ такой, что: а) суперпозиция $\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, функция $\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, $v \in \mathbb{R}^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, для которой $\|v(\cdot)\| \leq 1$, является суммируемой; б) для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство

$$1 - \inf \left\{ \int_{t_0}^{\tau_1} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) dt : \int_{t_0}^{\tau_1} \|v(t)\|^2 dt \leq 1 \right\} \leq 0. \quad (7)$$

Сформулируем теперь достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1)-(2) на терминальное множество $M(t)$ из начального положения z_0 за конечное время.

Теорема 4. Если выполнены все условия предположений 1 и 2, то в игре (1) при ограничениях (2) возможно завершение преследования за конечное время $T = \tau_1(z_0)$.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, интегральное ограничение, терминальное множество, многозначное отображение, разрешающая функция, преследователь, убегающий, управлений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Понтрягин Л.С. *Избранные научные труды*, М.: Наука. Том 2. 576 с.
- [2] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы, Киев: *Наукова думка*, 1992, 384 с.
- [3] Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями, *Труды Института математики и механики УрО РАН.*, №4.: 2009. Т. 15., 290 – 301 с.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

М.Н. ДАУЛЕТБАЙ¹, С.Е. КАСЕНОВ², А.М. ТЛЕУЛЕСОВА³

¹ Южно-Казахстанский университет имени М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

^{2,3} Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

moldir.dauletbay@gmail.com

В работе рассматривается некорректная двумерная обратная задача магнитотеллурического зондирования при предположении Е-поляризации электромагнитного поля. Магнитотеллурический метод широко применяется в геофизике для исследования глубинной структуры земной коры и мантии на основе естественных электромагнитных полей Земли.

В верхней части области $z = 0$ измеряется импеданс, характеризующий отношение компонент электрического и магнитного полей. Требуется восстановить пространственное распределение электрической проводимости среды $\sigma(y, z)$ в области $\Omega = (-l, l) \times (0, H)$.

Математическая модель прямой задачи описывается уравнением Гельмгольца с комплексным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(y, z)u = 0, \quad (1)$$

где компонент u соответствует электрическому полю, а коэффициент

$$k(y, z) = i\omega\mu\sigma(y, z)$$

связан с распределением электрической проводимости среды.

На поверхности Земли измеряется магнитотеллурический импеданс

$$Z(y, \omega) = i\omega\mu \frac{u(y, 0)}{u_z(y, 0)}. \quad (2)$$

Обратная задача заключается в восстановлении распределения электрической проводимости среды по известным значениям поверхностного импеданса.

Данная задача является некорректной, поскольку малые погрешности измерений могут приводить к значительным изменениям решения. Для получения устойчивого решения используется вариационная постановка задачи.

Вводится функционал невязки

$$J(k) = \sum_{\omega} \int_{-l}^l (Z(y, \omega)u_z(y, 0) - i\omega\mu u(y, 0))^2 dy. \quad (3)$$

Минимизация данного функционала позволяет восстановить распределение коэффициента проводимости среды.

Для решения задачи используется ускоренный градиентный метод Нестерова

$$k^{(n+1)} = k^{(n)} - \alpha_n \nabla J(k^{(n)}). \quad (4)$$

Предложенный метод требует решения прямой и сопряжённой задач на каждой итерации и обеспечивает устойчивое восстановление структуры проводимости.

Полученный алгоритм может применяться при интерпретации магнитотеллурических данных в задачах геофизической разведки.

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR27100483).

Ключевые слова: обратная задача, магнитотеллурика, уравнение Гельмгольца, численные методы.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 65N12, 35Q86.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. Москва: Наука, 2009.
- [2] Simpson F., Bahr K. Practical Magnetotellurics. Cambridge University Press, 2005.
- [3] Egbert G.D., Kelbert A. Computational recipes for electromagnetic inverse problems. *Geophysical Journal International*, 189 (2012), 251–267.
- [4] Pommier A. Interpretation of magnetotelluric results using laboratory measurements. *Surveys in Geophysics*, 35 (2014), 41–84.
- [5] Tleulesova A.M., Temirbekov N.M., Dauletbay M.N., Temirbekov A.N., Turlybek Z.G., Tugenbayeva Z.S., Kasenov S.E. A variational optimization method for solving two-dimensional magnetotelluric inverse problems. *Mathematics*, 13 (2025), 2989.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С.З. ДЖАМАЛОВ

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан

siroj63@mail.ru

Как нам известно в процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами [1]. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнения математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, гидра-аэродинамики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [2].

В последние годы начаты исследования обратных задач для уравнений смешанного типа второго и четвертого порядков [3,4]. Прямые задачи с локальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа высокого порядка исследован в работе [5]. До настоящего времени прямые задачи с нелокальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа высокого порядка очень мало исследован [6,7], а обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка практически не исследованы. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках данной работы. В данной работе предлагается новые методы, который позволяет доказать однозначную разрешимость и гладкость решение некоторых прямых задач с нелокальными краевыми условиями и корректность решение некоторых обратных задач для многомерного уравнения смешанного типа высокого порядка в анизотропных пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнения в частных производных высокого порядка, смешанные уравнения, нелокальные краевые условия, анизотропные пространства Соболева.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бицадзе А.В. О нелокальных краевых задачах, *ДАН СССР*, **277**:1 (1989) 17–19.
- [2] Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г. *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск (1969).
- [3] Джамалов С.З. *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа*, Fan ziyosi, Ташкент (2021).
- [4] Dzhamalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B. On a linear inverse problem with nonlocal boundary conditions of periodic type for a three-dimensional equation of mixed type of the second kind of the fourth order in a parallelepiped, *Uzbek Mathematical Journal*, **69**:1 (2025) 57–70.
- [5] Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа, в: *Математический анализ и смежные вопросы математики*, ИМ СО АН СССР, Новосибирск (1978), 5–13.
- [6] Джамалов С.З, Пятков С.Г. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка, *Сибирский математический журнал*, **61**:4 (2020) 777–795.
- [7] Dzhamalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B. On the smoothness of a generalized solution of a semi-nonlocal boundary value problem for a fourth-order, *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, **14**:2 (2024) 107–120.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИНТЕРФЕЙСА ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Н.Н. ДЖУМАГУЛОВ¹, Қ.М. ШИЯПОВ²

¹Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

²Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

Nurken_djumagulov@mail.ru

Процессы фильтрации многофазных жидкостей в пористых средах играют важную роль в задачах гидродинамики, нефтегазовой инженерии, гидрогеологии и экологического моделирования. Особый интерес представляет исследование динамики интерфейса между двумя фазами, например водой и нефтью, при их совместном движении в пористой структуре. Корректное описание граничной поверхности между фазами позволяет более точно прогнозировать распределение жидкостей и эффективность процессов вытеснения.

Математическое описание двухфазного потока в пористой среде основано на законе Дарси и уравнениях сохранения массы для каждой фазы. Скорость фильтрации фазы i определяется выражением:

$$\mathbf{v}_i = -\frac{kk_{ri}}{\mu_i} \nabla p_i \quad (1)$$

где

k — абсолютная проницаемость пористой среды,

k_{ri} — относительная проницаемость фазы i ,

μ_i — динамическая вязкость фазы,

p_i — давление фазы.

Уравнение сохранения массы для каждой фазы имеет вид:

$$\frac{\partial(\phi S_i)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_i = q_i \quad (2)$$

где

ϕ — пористость среды,

S_i — насыщенность фазы,

q_i — источник или сток фазы.

Интерфейс между фазами определяется распределением насыщенности и капиллярного давления, которое задаётся зависимостью:

$$p_c = p_n - p_w \quad (3)$$

где p_c — капиллярное давление, p_n и p_w — давления не смачивающей и смачивающей фаз соответственно.

В работе проводится анализ математических моделей, описывающих динамику граничной поверхности двухфазного потока в пористой среде, а также рассматриваются методы численного моделирования эволюции интерфейса. Исследуется влияние физических параметров среды и свойств жидкостей на характер движения границы раздела фаз.

Полученные результаты могут быть использованы для повышения точности прогнозирования процессов фильтрации, а также для оптимизации технологических процессов добычи углеводородов и управления подземными гидродинамическими системами.

Ключевые слова: двухфазный поток, пористая среда, математическое моделирование, динамика интерфейса, закон Дарси, уравнения сохранения массы, капиллярное давление, фильтрация жидкостей, численное моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 76S05, 76T99, 35Q35, 65M60

ЕКІ КАМЕРАЛЫ МЕДИЦИНА-БИОЛОГИЯЛЫҚ КЕРІ ЕСЕБІ ҮШІН СӘЙКЕСТЕНДІРУДІ ЗЕРТТЕУ

М.К. ДОЩАНОВА¹, С.Е. КАСЕНОВ², А.М. ТЛЕУЛЕСОВА³

¹М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан

^{2,3}Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹e-mail: marjiha86@mail.ru, ²kassenov.syrym@kaznu.kz

Жұмыста екі камералы медицина-биологиялық жүйе үшін параметрлерді сәйкестендірудің кері есебі қарастырылады. Бұл бағытта С.И. Кабанихин, А.А. Романова, С.Г. Руднев, S. Cobelli, E. Carson және басқа да зерттеушілердің еңбектері белгілі. Мұндай модельдер фармакокинетикада және биологиялық заттардың ағзада таралу динамикасын сипаттауда кеңінен қолданылады. Фармакокинетикалық процестерді модельдеуге арналған камералық тәсіл шеңберінде камералар тек органдар ғана емес, сонымен қатар камера ішіндегі әртүрлі заттар да болуы мүмкін (мысалы, қандағы глюкоза және инсулин).

Глюкоза мен инсулиннің математикалық моделін қарастырайық:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -q_1x_1(t) - q_2x_1(t) + u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -q_3x_2(t) - q_4x_1(t) \\ y(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Мұнда

- $x_1(t)$, $x_2(t)$ — глюкоза массасы (глюкоза — 1-камера) және инсулин массасы (2-камера),
- $u(t) = D \cdot \delta(t)$ — доза,
- $p = \{q_1, q_2, q_3, q_4, V_1\}$ — белгісіз параметрлер векторы,
- V_2 — екінші камераның көлемі.

Бұл параметрлер әрбір нақты жағдайда жеке болады. Сондықтан ағзаға енгендегі дәрілік заттың сипаты, иммундық жауап, ағзаның белгілі бір дәрі түріне сезімталдығы, ауру эпидемиясының таралу жылдамдығы және т.б. туралы ақпарат алу үшін осы параметрлерді сәйкестендіру қажет.

Модель параметрлерін сәйкестендіру үшін кері есептерді шешу теориясында ұсынылатын тәсіл қолданылады. Ол эксперименттік деректер (бақылаулар) бойынша модельдің белгісіз параметрлерін анықтауға негізделген. Глюкоза-инсулинді бақылаудың фармакокинетикалық моделінің трансферлік функция әдісін қолдана отырып сәйкестендірілуін талдау мысалдары келтіріледі. Сонымен қатар Тейлор қатарының кеңеюін қолдана отырып, екі камералы фармакокинетикалық модельдің сәйкестендіру талдауы жасалды.

Кілтті сөздер: дифференциалдық теңдеулер, кері есеп, сәйкестендіру (идентифицируемость), сандық әдіс, концентрация.

2020 Mathematics Subject Classification: 92C45, 93D30, 65L09.

ӘДЕБИЕТ

[1] Carson E., Cobelli C. Introduction to Modelling in Physiology and Medicine. San Diego: Academic Press, 2008.

[2] Кабанихин С.И., Воронов Д.А., Гродзь А.А., Криворотько О.И. Идентифицируемость математических моделей медицинской биологии.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И МАШИННО-ОБУЧАЮЩИЕ МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ СТРЕСС-ПОДОБНЫХ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПО ДАННЫМ НОСИМЫХ СЕНСОРОВ

Н.А. ЖОЛДАС¹, М.Е. МАНСУРОВА²

Современные носимые сенсоры обеспечивают непрерывный сбор физиологических данных, включая частоту сердечных сокращений, параметры физической активности и другие биосигналы, что открывает новые возможности для исследования скрытых функциональных состояний организма в реальных условиях. Одной из актуальных задач является выявление стресс-подобных физиологических состояний, которые характеризуются активацией автономной нервной системы и изменением динамики физиологических процессов.

В данной работе рассматривается применение математических и машинно-обучающих методов для анализа мультимодальных временных рядов физиологических параметров с целью выявления стресс-подобных состояний без использования субъективных опросников или клинических аннотаций. Исходные данные представлены временными рядами частоты сердечных сокращений, показателей физической активности и динамических характеристик метаболических сигналов, агрегированных во временные окна фиксированной длительности.

Для описания физиологической динамики используются статистические и робастные характеристики, включая средние значения, стандартные отклонения, коэффициенты вариации, а также показатели скорости изменения сигналов. Такой набор признаков позволяет формализовать краткосрочные изменения физиологического состояния, связанные с возможной стрессовой реакцией организма.

В условиях отсутствия прямых меток стресса предложен прокси-подход к разметке данных, основанный на сочетании повышенной частоты сердечных сокращений, увеличенной вариабельности физиологических сигналов и низкого уровня физической активности. Данный подход позволяет математически формализовать гипотезу о стресс-подобных состояниях без привлечения психологических шкал и биохимических маркеров.

Для анализа и классификации физиологических состояний применялись методы машинного обучения, включая логистическую регрессию, метод опорных векторов и ансамблевые методы. Обобщающая способность моделей оценивалась с использованием межсубъектной схемы валидации *leave-one-subject-out*, при которой обучение выполняется на данных всех субъектов, кроме одного, а тестирование — на ранее невиданном субъекте. Такой подход позволяет оценить устойчивость выявляемых физиологических паттернов к межиндивидуальной вариабельности.

Результаты исследования показывают, что стресс-подобные состояния характеризуются не абсолютными значениями физиологических параметров, а прежде всего их динамикой и вариабельностью в сочетании с изменениями уровня активности. Полученные модели демонстрируют воспроизводимые результаты на данных разных субъектов, что свидетельствует о наличии универсальных автономных физиологических паттернов.

Предложенный подход носит исследовательский характер и ориентирован на анализ физиологических данных в условиях реальной повседневной активности. Он может быть использован в качестве методологической основы для дальнейших исследований в области мониторинга функциональных состояний человека, адаптивных носимых систем и интеллектуальных систем поддержки принятия решений.

Ключевые слова: носимые сенсоры, физиологические данные, стресс-подобные состояния, машинное обучение, анализ временных рядов.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 92C50

ҚАЛАЛАРДАҒЫ АТМОСФЕРАЛЫҚ АУАНЫҢ САПАСЫН БОЛЖАУ ҮШІН МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНУ ТИІМДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ

Е.Б. ЖҰМАБЕК¹, Ө.К. ҚАНЫБЕК², А.М. АМРЕЕВА³

^{1,2,3}Сәтбаев университеті, Алматы, Қазақстан

ernarzhumabek05@gmail.com

Қазіргі таңда өнеркәсіптік қалалардағы экологиялық ахуалды жақсарту мақсатында ауа сапасын болжаудың тиімді әдістерін әзірлеу өзекті мәселеге айналды. Бұл жұмыста ауаның ластану деңгейін болжау үшін машиналық оқытудың заманауи алгоритмдерін қолданудың нәтижелері келтірілген. Зерттеу барысында әртүрлі әдістердің салыстырмалы талдауы жүргізіліп, олардың тиімділігі бағаланды. Сонымен қатар, деректерді жинау және өңдеу процестерінің ерекшеліктері қарастырылды. Алынған нәтижелер экологиялық мониторинг жүйелерін жетілдіруге мүмкіндік береді.

Қазақстанның ірі өнеркәсіптік орталықтарында атмосфералық ауаның ластану мәселесі күннен-күнге өзекті бола түсуде. Өнеркәсіп орындары мен көлік құралдарының көптігі ауаға зиянды заттардың көп мөлшерде түсуіне әкеліп соғады. Бұл халықтың денсаулығына және қоршаған ортаға теріс әсер етеді. Статистикалық мәліметтер бойынша, соңғы жылдары Қазақстандағы өнеркәсіп өндірісінің көлемі тұрақты өсіп келеді, бұл өз кезегінде экологиялық бақылау жүйелерін жетілдіру қажеттілігін туындатады.

Атмосфералық ауаның сапасын бақылаудың дәстүрлі әдістері көбінесе ластанудың нақты деңгейін уақытылы анықтауға мүмкіндік бермейді. Сондықтан заманауи ақпараттық технологиялар мен машиналық оқыту әдістерін қолдану арқылы ауа сапасын болжаудың тиімді жүйелерін құру қажеттілігі туындайды.

Зерттеу барысында машиналық оқытудың төмендегідей негізгі әдістері қарастырылды:

1. **XGBoost** — градиенттік бустингке негізделген алгоритм. Бұл әдіс үлкен көлемді деректермен жұмыс істеуге және жетіспейтін мәндерді өңдеуге мүмкіндік береді. Шетелдік зерттеулерде XGBoost алгоритмі ауа сапасының индекcін болжауда жоғары нәтиже көрсеткен.
2. **SVR** (Support Vector Regression) — тірек векторлар әдісіне негізделген регрессиялық талдау. Бұл әдіс әсіресе радиалды базистік функцияны қолданғанда ластаушы заттардың концентрациясын болжауда тиімділігін дәлелдеген.
3. **Random Forest** — көптеген шешім ағаштарын біріктіретін ансамбльдік әдіс. Бұл алгоритм әртүрлі ластаушы заттардың арасындағы күрделі байланыстарды анықтауға қабілетті.
4. **LSTM** (Long Short-Term Memory) — уақыттық қатарларды талдауға арналған терең нейрондық желі. Атмосфералық ауаның сапасы уақытқа тікелей байланысты болғандықтан, LSTM әдісі болжамдардың дәлдігін арттыруға мүмкіндік береді.

Жүргізілген зерттеулер нәтижесінде әрбір алгоритмнің өзіндік ерекшеліктері мен артықшылықтары анықталды. XGBoost әдісі үлкен деректер жиынымен жұмыс істегенде жоғары жылдамдық пен дәлдік көрсетті. SVR әдісі аз көлемді деректермен жұмыс істегенде тиімді болды. Random Forest алгоритмі әртүрлі факторлардың өзара байланысын анықтауда жақсы нәтиже берді. LSTM желілері уақыттық қатарларды болжауда басқа әдістерден асып түсті.

Модельдердің тиімділігін бағалау үшін келесі метрикалар қолданылды:

- **RMSE** (Root Mean Square Error) — орташа квадраттық қате;
- **MAE** (Mean Absolute Error) — орташа абсолюттік қате;

- R^2 — детерминация коэффициенті.

Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, бірнеше әдісті біріктіретін гибриді модельдер жеке алгоритмдерге қарағанда жоғары дәлдік көрсетеді. Атап айтқанда, әртүрлі көздерден алынған деректерді біріктіретін агрегацияланған модельдер PM2.5 бөлшектерінің концентрациясын болжауда ең жақсы нәтиже көрсетті.

Машиналық оқыту әдістерін қолдану атмосфералық ауаның сапасын болжауда тиімді екенін көрсетті. XGBoost, SVR, Random Forest және LSTM алгоритмдері әрқайсысы өздерінің артықшылықтарына ие және нақты жағдайларға байланысты қолданылуы мүмкін. Гибриді модельдерді құру және деректердің үлкен көлемін өңдеу болжамдардың дәлдігін айтарлықтай арттырады.

Қазақстанның өнеркәсіптік қалаларында экологиялық ахуалды жақсарту үшін машиналық оқытуға негізделген мониторинг жүйелерін енгізу қажет. Бұл жүйелер ластану деңгейін уақытылы анықтап, тиісті шаралар қабылдауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, алынған деректер экологиялық саясатты жетілдіру және өнеркәсіптік шығарындыларды азайту бойынша стратегиялар әзірлеу үшін негіз бола алады.

Кілтті сөздер: экологиялық мониторинг, ауа сапасын бақылау, PM2.5 бөлшектері, болжау модельдері, XGBoost алгоритмі, SVR әдісі, Random Forest, LSTM желілері.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 62P12

ӘДЕБИЕТ

[1] Қазақстан Республикасы Ұлттық экономика министрлігі Статистика комитеті. *Қазақстанның экологиялық көрсеткіштері: аналитикалық жинақ*, Астана (2024), 156 б.

[2] Zhang L., Wang Y., Chen J. Air quality prediction based on machine learning algorithms: A comparative study, *Environmental Modelling & Software*, **158** (2023), 105–118.

[3] Kumar S., Singh R., Sharma A. Application of ensemble methods for particulate matter prediction, *Atmospheric Pollution Research*, **13**:4 (2022), 345–357.

[4] Chen T., Guestrin C. XGBoost: A scalable tree boosting system, *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference* (2021), 785–794.

[5] Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory, *Neural Computation*, **9**:8 (2022), 1735–1780.

[6] Williams P., Johnson M. Support vector regression for environmental data analysis, *Journal of Environmental Informatics*, **41**:2 (2023), 89–102.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ ЭПИДЕМИЙ С УЧЕТОМ ВОЗРАСТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Т.А. ЗВОНАРЕВА¹, О.И. КРИВОРОТЬКО²

^{1,2}Научно-технологический университет «Сириус», Сириус, Россия

zvonareva.ta@talantiuspeh.ru

Пандемия COVID-19 побудила исследователей развивать направление моделирования эпидемий с целью понимания причин вспышек, умения их спрогнозировать, а также своевременно управлять процессом эпидемии для ее контроля.

Математические модели оптимального управления распространением эпидемий включают информацию о социально-экономических (ограничительные меры, социальное поведение и др.) и медицинских (вакцинация, мощность медицинских учреждений и др.) процессах. Это позволяет интерпретировать полученные решения в множестве корректности задачи.

Одним из подходов к постановке задачи управления является введение в систему дополнительного члена и/или уравнения, характеризующего социально-экономическое и медицинское воздействие [1,2].

Рассматривается пространственная SEIR модель, описывающая динамику распространения инфекционного заболевания в популяции, разделенной на чувствительных (S), бессимптомных инфицированных (E), инфицированных (I) и иммунных (R), и запишем задачу оптимального управления уровнем финансирования программ по борьбе с эпидемией. Пусть t и a — независимые переменные, обозначающие, соответственно, время и возраст, $a \in [a_0, a_1]$, $t \in [t_0, t_1]$, $\Omega = [a_0, a_1] \times [t_0, t_1]$. Тогда пространственная SEIR система дифференциальных уравнений, описывающая распространения инфекционного заболевания в популяции в зависимости от возраста, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial a} = -\beta (1 - u_1(a, t)) \frac{S(a, t)I(a, t)}{N}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial a} = \beta (1 - u_1(a, t)) \frac{S(a, t)I(a, t)}{N} - \delta E(a, t), \\ \frac{\partial I}{\partial t} + v \frac{\partial I}{\partial a} = \delta E(a, t) - \gamma I(a, t) - u_2(a, t)I(a, t), \\ \frac{\partial R}{\partial t} + v \frac{\partial R}{\partial a} = \gamma I(a, t) + u_2(a, t)I(a, t) \end{cases} \quad (1)$$

с начальными

$$S(a, t_0) = S_0(a), \quad E(a, t_0) = E_0(a), \quad I(a, t_0) = I_0(a), \quad R(a, t_0) = R_0(a) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial X(a_0, t)}{\partial a} = \frac{\partial X(a_1, t)}{\partial a} = 0, \quad X = (S, E, I, R). \quad (3)$$

Здесь $u_1(a, t)$ — ограничительные меры для предотвращения инфекционного заболевания (ношение масок, соблюдение социально дистанции), $u_2(a, t)$ — карантинные меры и эффективность лечения инфицированных, $u_i(a, t) \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, $(a, t) \in \Omega$.

Целью управления в системе (1) естественно считать минимизацию численности инфицированных людей на протяжении всего периода наблюдения (первое слагаемое в (4)) и затрат на финансирование программ по ограничению распространения эпидемии, то есть [3]

$$J(u_1, u_2) = \iint_{\Omega} \left(c_1 I(a, t) + \frac{1}{2} (c_2 u_1^2(a, t) + c_3 u_2^2(a, t)) \right) da dt \rightarrow \min \quad (4)$$

с весовыми коэффициентами c_l , $l = 1, 2, 3$.

На основе принципа максимума Понтрягина и реальных данных о распространении COVID-19 по Новосибирской области с 2020 по 2022 год [4] были получены оптимальные функции управления $u_1^* = 0 \quad \forall a, t$ (отсутствие ограничительных мер) и $u_2^* = 1$, $t \neq t_0$ (максимальные карантинные меры и эффективность лечения инфицированных людей).

Математические модели эпидемиологии характеризуются своими параметрами (скорость заражения, скорость формирования иммунитета, начальное количество бессимптомных носителей инфекции и др.), которые уникальны для исследуемого заболевания в конкретном регионе (демографические, географические, экономические и экологические особенности влияют на распространение эпидемии одного инфекционного заболевания) и достаточно грубо могут быть оценены посредством статистики. Для идентификации неизвестных параметров модели (1)–(4) (скорость распространения инфекционного заболевания β , коэффициент перехода из бессимптомной группы в группу инфицированных δ , коэффициент лечения инфицированной группы γ , а также начальные распределения чувствительных $S_0(a)$ и бессимптомных $E_0(a)$ групп) сформулирована обратная задача, состоящая в определении параметров по дополнительной информации о количестве выявленных больных $I(a, t)$. Приведен и верифицирован алгоритм численного решения поставленной обратной задачи.

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-10068).

Ключевые слова: SEIR модель, уравнения в частных производных, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, обратные задачи, оптимизация.

2020 Mathematics Subject Classification: 49N45

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Batalin R.M., Terletskii V.A. Optimal control in epidemic models of transmissible diseases with SEI-SEIR systems, *Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math.*, **14** (2015), 18–30.
- [2] Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I., Neverov A.V. Differential epidemic models and scenarios of restrictive measures, *Comput. Math. Math. Phys.*, **65:6** (2025), 1300–1313.
- [3] Fatmawati F., Chukwu W., Alqahtani R.T., Alfiniyah C., Herdicho F., Tasmi A. A Pontryagin's maximum principle and optimal control model with cost-effectiveness analysis of the COVID-19 epidemic, *Decis. Anal. J.*, **8** (2023), 100273.
- [4] Данные о распространении COVID-19, <https://ai-biolab.ru/data>.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

К.Т. КАРИМОВ¹, Д.С. ОЛИМОВА²

¹Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

¹Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук РУз, Ташкент

²Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны, школа

Темурбеков

¹karimovk80@mail.ru., ²dilfuzaolimova406@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn}(xy) \cdot u_{xx} + B_{\beta-1/2}^y u + B_{\gamma-1/2}^z u = 0, \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : x \in (-1, 0) \cup (0, 1), y \in (-a, 0) \cup (0, b), z \in (0, c)\}$, где $a, b, c \in R^+$, $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$. Здесь для удобства и компактности используется обозначение $B_q^y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2q+1}{y} \frac{\partial}{\partial y}$. Отметим, что обозначение B_q^y при $q > -1/2$ совпадает с оператором Бесселя, введенным в работе [1].

Введем следующие обозначения: $\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}$, $\Omega_3 = \Omega \cap \{x < 0, y < 0\}$, $\Omega_4 = \Omega \cap \{x < 0, y > 0\}$.

Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно в областях Ω_1 и Ω_3 принадлежит эллиптическому типу, а в областях Ω_2 и Ω_4 — гиперболическому типу. Плоскости $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения, а $x = 0$ и $y = 0$ — плоскостями изменения типа.

В области Ω для уравнения (1) сформулируем и исследуем следующую задачу.

Задача D. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и условиям

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4), \quad u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}),$$

$$u(-1, y, z) = 0, \quad u(1, y, z) = 0, \quad y \in [-a, b], \quad z \in [0, c],$$

$$u(x, -a, z) = f_1(x, z), \quad u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [-1, 1], \quad z \in [0, c],$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [-a, b],$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad z \in (0, c),$$

где $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ – заданные функции, причем выполняется условия согласования

$$f_j(x, 0) = f_j(x, c) = f_j(-1, z) = f_j(1, z) = 0, \quad j = \overline{1, 2}.$$

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа является не всегда корректно поставленной в смысле Адамара. Во многих работах отмечается, что интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после работы Ф.И. Франкля [2], где впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к уравнениям этого типа, и после работы А.В. Бицадзе [3], где показано, что задача Дирихле для уравнения поставлена некорректно. После этих работ возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. Если уравнение смешанного типа содержит гиперболическое уравнение, и гиперболическая часть области является прямоугольником, то для разрешимости задачи возникает условие, зависящее от размеров сторон прямоугольника. Если при этом задача разрешима, то она разрешима не для любого прямоугольника.

Подобные задачи на плоскости для уравнения $\operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0$ изучена в работах [4], [5].

В работах [6], [7] исследованы краевые задачи для уравнения

$$\left(B_{\alpha-1/2}^x + \operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right) u(x, y, z) = 0,$$

в области $\Omega \cap \{x > 0\}$.

В данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует решение задачи D, то оно единственно, только если для всех $n, m \in N$ выполняются условия $\Delta_{nm}^{(j)}(a, b) \neq 0$, $j = \overline{1, 2}$, где

$$\begin{aligned} \Delta_{nm}^{(1)}(a, b) &= \chi_{nm}^{\beta-1/2} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b \right) J_{\beta-1/2} \left(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a \right) - \\ &\quad - I_{\beta-1/2} \left(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b \right) J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a \right), \\ \Delta_{nm}^{(2)}(a, b) &= I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b \right) J_{\beta-1/2} \left(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a \right) - \\ &\quad - \chi_{nm}^{\beta-1/2} I_{\beta-1/2} \left(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b \right) J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a \right), \end{aligned}$$

$I_l(x)$ и $J_l(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента и функция Бесселя первого рода порядка l [8] соответственно.

Теорема 2. Пусть $\beta \in (-\infty, 1/2)$ и функции $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$, $f_l(\varphi, z) \in C_{x,z}^{4,2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\operatorname{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$ где $\Pi = \{(x, z) : x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z)|_{x=0} = (\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z)|_{x=a}$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 3}$;

III. $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z)|_{z=0} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z)|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 4}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$, $j = \overline{0, 2k + 2}$ при $\gamma \in (1/2 - k, (3/2 - k)\operatorname{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$.

Тогда решение задачи D существует.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, сингулярный коэффициент, оператор Бесселя, функция Бесселя, плоскость изменения типа.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12

ЛИТЕРАТУРА

[1] Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. Москва: Наука, Физматлит. 1997. 204 с.

- [2] Франкль Ф.И. *О задачах С.А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений*. Известия АН СССР. -1945.-Т.9. -№2. -С.121–143.
- [3] Бицадзе А.В. *Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа*. ДАН СССР. -1953. -Т.122. -№2. -С.167-170.
- [4] Гималтдинова А. А. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями перехода в прямоугольной области*. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки, №4, -С. 634–649.
- [5] Гималтдинова А. А. *Вторая краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области* Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2017, Т.137, -С. 3–16.
- [6] Уринов А.К., Каримов К.Т. *Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами* Вестник Самарского гос.тех.университета. Серия физ.-мат. науки, -2017, -Т.21, -№ 4. -С. 665–683.
- [7] Каримов К.Т. *Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами* Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. -2021. -Т. 34, -№ 1. -С. 29-46.
- [8] Ватсон Г. Н. *Теория бесселевых функций*. -М.:Т.1.Изд. ИЛ. -1949. -798 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛАНДВЕБЕРА К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

С.Е. КАСЕНОВ¹, Ж.А. САХАНОВА²

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

²Восточно-Казахстанский технический университет им. Д.Серикбаева,
Усть-Каменогорск

kassenov.syrym@kaznu.kz

В настоящей работе рассматривается задача восстановления электромагнитного поля по неполным граничным данным. Исследуется процесс продолжения решения двумерной модели электродинамики в область, внутренняя структура которой неизвестна, при условии, что измерительная информация доступна только на части границы. Предполагается, что до момента времени $t = 0$ электромагнитное поле отсутствовало, то есть система находилась в состоянии покоя. На плоскости $z = 0$ задаётся значение нормальной производной $u_z(0, y, t) = g(y, t)$, а также дополнительно фиксируется значение функции $u(0, y, t) = f(y, t)$. Требуется определить распределение горизонтальной компоненты напряжённости электрического поля $u(z, y, t)$ во внутренней области $\Omega = (0, L_z) \times (0, L_y) \times (0, T)$. Динамика горизонтальной компоненты напряжённости электрического поля описывается уравнением

$$\mu \varepsilon(z, y) u_{tt} + \mu \sigma(z, y) u_t = \Delta u, \quad (z, y, t) \in \Omega. \quad (1)$$

где оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = u_{zz} + u_{yy}. \quad (2)$$

Предполагается, что в начальный момент система находится в состоянии электромагнитного покоя, что выражается условиями

$$u(z, y, 0) = 0, \quad u_t(z, y, 0) = 0. \quad (3)$$

На плоскости $z = 0$ известны как значение функции, так и её нормальная производная

$$u_z(0, y, t) = g(y, t), \quad u(0, y, t) = f(y, t), \quad (4)$$

а на боковых границах выполняются однородные условия

$$u(z, 0, t) = 0, \quad u(z, L_y, t) = 0. \quad (5)$$

Следует отметить, что одновременное задание функции и её нормальной производной на одной части границы приводит к некорректности постановки (задача Коши для гиперболического оператора), что проявляется в отсутствии устойчивости решения по отношению к входным данным. С целью стабилизации процедуры восстановления рассматриваемая задача продолжения преобразуется к эквивалентной обратной задаче для корректной прямой гиперболической модели с неизвестным дополнительным граничным условием вида

$$u(L_z, y, t) = q(y, t). \quad (6)$$

Введём оператор наблюдения

$$(Aq)(y, t) = u(0, y, t; q). \quad (7)$$

который сопоставляет неизвестному граничному воздействию $q(y, t)$ значение решения на измеряемой части границы. Тем самым обратная задача сводится к операторному уравнению первого рода

$$Aq = f, \quad (8)$$

где функция $f(y, t)$ — задаётся экспериментальными данными. Для определения неизвестной функции $q(y, t)$ рассматривается задача минимизации функционала несоответствия

$$J(q) = \|A(q) - f\|^2 = \int_0^T \int_0^{L_y} [u(0, y, t; q) - f(y, t)]^2 dy dt. \quad (9)$$

Вычисление градиента функционала осуществляется на основе решения сопряжённой задачи, что позволяет реализовать итерационный процесс Ландвебера в виде

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n), \quad \alpha \in (0, \|A\|^{-2}). \quad (10)$$

На каждой итерации требуется последовательное решение прямой и сопряжённой гиперболических задач. Такой подход обеспечивает устойчивое восстановление неизвестных граничных данных даже при наличии погрешностей измерений.

Предложенная постановка описывает процессы распространения и затухания электромагнитных волн в проводящих средах с переменными электрофизическими параметрами. Рассматриваемая задача имеет практическое значение при моделировании волновых процессов в электродинамике сплошных сред, в задачах неразрушающего контроля, электромагнитной диагностики материалов, геофизической разведки, а также при восстановлении скрытых граничных воздействий в системах передачи и экранирования электромагнитных сигналов.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение электродинамики, некорректная задача Коши, задача продолжения решения, обратная граничная задача, оператор наблюдения, регуляризационные методы, итерации Ландвебера.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35R25, 35K20, 65N21

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*, Учебник для студентов высших учебных заведений, Сибирское научное издательство, Новосибирск (2009).
- [2] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*, ОФ «Международный фонд обратных задач», Алматы - Новосибирск (2006).
- [3] Bektemesov M.A., Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Kasenov S.Y. Numerical solution of initial-boundary value problem for the Helmholtz equation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11:1** (2014), 4–21.
- [4] Nurseitov D.B., Kasenov S.E. Numerical solution of initial-boundary problem for the Helmholtz equation on discretization-optimization, *Bulletin of the Karaganda university-mathematics*, **75:3** (2014), 114–120.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЛАНДВЕБЕРА ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ

С.Е. КАСЕНОВ¹, А.М. ТЛЕУЛЕСОВА², Б.Д. БАКЫТБЕКОВА³,
Я.Г. ЛУЦЕНКО⁴

^{1,2,4}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

³Восточно-Казахстанский технический университет им. Д.Серикбаева,

Усть-Каменогорск

kassenov.syrym@kaznu.kz

В работе рассматривается некорректная задача продолжения решения двумерного уравнения акустики по данным, заданным на части границы области. Предполагается, что среда до момента времени $t = 0$ находилась в покое. На границе $z = 0$ задаётся нормальная производная акустического поля $u_z(0, y, t) = g(y, t)$ и измеряется дополнительная информация $u(0, y, t) = f(y, t)$. Требуется восстановить поле $u(z, y, t)$ в области $\Omega = (0, L_z) \times (0, L_y) \times (0, T)$.

Математическая модель имеет вид

$$c^{-2}(z, y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla(\ln \rho(z, y)) \cdot \nabla u, \quad (z, y, t) \in \Omega, \quad (1)$$

при начальных условиях покоя

$$u(z, y, 0) = 0, \quad u_t(z, y, 0) = 0, \quad (2)$$

и граничных условиях

$$u_z(0, y, t) = g(y, t), \quad u(0, y, t) = f(y, t), \quad (3)$$

$$u(z, 0, t) = u(z, L_y, t) = 0. \quad (4)$$

Одновременное задание функции и её нормальной производной на одной части границы приводит к некорректности задачи (задача Коши для гиперболического оператора).

Для регуляризации задача продолжения сведена к обратной задаче для корректной прямой задачи с дополнительным неизвестным граничным условием $u(L_z, y, t) = q(y, t)$.

Вводится оператор наблюдения $(Aq)(y, t) = u(0, y, t; q)$, и обратная задача формулируется как операторное уравнение. Для восстановления функции $q(y, t)$ минимизируется функционал невязки

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L^2((0, L_y) \times (0, T))}^2 = \int_0^{L_y} \int_0^T [u(0, y, t; q) - f(y, t)]^2 dt dy. \quad (5)$$

Градиент функционала вычисляется с использованием сопряжённой задачи, что позволяет реализовать итерационный метод Ландвебера: $q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n)$, $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$. Предложенный алгоритм требует решения на каждой итерации прямой и сопряжённой гиперболических задач. Полученный подход обеспечивает устойчивое восстановление граничных данных и может применяться в задачах акустической томографии, геофизической разведки и неразрушающего контроля.

Финансирование: Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP32726441).

Ключевые слова: задача продолжения, некорректные задачи, обратная задача, уравнения акустики, метод Ландвебера.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35R25, 65N21

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*, Учебник для студентов высших учебных заведений. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, (2009).

- [2] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*, Алматы – Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», (2006).
- [3] Bektemesov, M. A., Kabanikhin, S. I., Nurseitov, D. B., and Kasenov, S. Y. Numerical solution of initial-boundary value problem for the Helmholtz equation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11**:1 (2014), 4–21.
- [4] Nurseitov, D. B., Kasenov, S. E. Numerical solution of initial-boundary problem for the Helmholtz equation on "discretization-optimization" *Bulletin of the Karaganda university-mathematics.*, **75**:3 (2014), 114–120.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОАКУСТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ QFT И ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА

С.Е. КАСЕНОВ¹, А.М. ТЛЕУЛЕСОВА², Р.А. АСАНОВА³

^{1,2}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

³Южно-Казахстанский Государственный Университет, Шымкент, Казахстан

syrym.kasenov@gmail.com, aigerim1985_06@mail.ru, rysbike@mail.ru

В данной работе мы рассматриваем модельную постановку прямой и обратной задачи термоакустики. Основное внимание уделяется численному решению обратной задачи, в которой требуется восстановить функцию $q(x, y)$, характеризующую коэффициент поглощения, по заданным данным на части границы. В рамках исследования применяется как классический подход, основанный на разностных схемах, так и метод кватернионного Фурье-преобразования (QFT), что позволяет провести спектральный анализ решений и повысить точность восстановления. Проведён также вычислительный эксперимент, демонстрирующий влияние объёма дополнительной информации на устойчивость и точность восстановления.

В *прямой задаче* в области $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, T)$, требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ из соотношений:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in \Omega \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = q(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi], y \in [0, \pi] \quad (2)$$

$$u_x(0, y, t) = u_x(\pi, y, t) = 0, \quad y \in [0, \pi], t \in [0, T] \quad (3)$$

$$u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0, \quad x \in [0, \pi], t \in [0, T] \quad (4)$$

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из соотношений (5)–(8), по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0, y, t) = f(y, t), \quad y \in [0, \pi], t \in [0, T] \quad (5)$$

Определение 1. Пусть $q(x, y) \in H((0, \pi) \times (0, \pi))$. Функцию $u \in H(\Omega)$ будем называть обобщенным решением прямой задачи (1)–(4), если для любых $v \in H^2(\Omega)$ таких, что

$$v(x, y, T) = 0, \quad v_t(x, y, T) = 0, \quad x \in [0, \pi], y \in [0, \pi] \quad (6)$$

$$v_x(0, y, t) = v_x(\pi, y, t) = 0, \quad y \in [0, \pi], t \in [0, T] \quad (7)$$

$$v_y(x, 0, t) = v_y(x, \pi, t) = 0, \quad x \in [0, \pi], t \in [0, T] \quad (8)$$

имеет место равенство

$$\iiint_{\Omega} (v_{tt} - v_{xx} - v_{yy})u(x, y, t)dx dy dt + \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} q(x, y)v(x, y, t)dx dy = 0 \quad (9)$$

Алгоритм решения обратной задачи по методу Нестерова

Одним из эффективных подходов к решению обратных задач для волнового уравнения является применение методов оптимизации, среди которых особое место занимает ускоренный метод Нестерова благодаря его высокой скорости сходимости. Этот метод относится к классу градиентных методов, однако существенно превосходит классические градиентные алгоритмы по скорости сходимости, что делает его особенно эффективным при решении задач высокой размерности.

Для осуществления метода Нестерова задаем следующие параметры: $\lambda_0 = 1$, $\alpha_0 = 1/L$, где L — константа Липшица градиента.

1. Выбираем начальное приближение q_0 и присваиваем $p_0 = q_0$;
2. Численно решаем прямую задачу (1)–(4) для p_0 ;
3. Вычисляем значение функционала $J(p_0)$ по формуле (12);
4. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу (24)–(27);
5. Вычисляем градиент функционала $J'p_0$ по формуле (28);
6. Вычисляем приближение $q_1 = p_0 - \alpha_0 J'p_0$;
7. Предположим, что q_n и q_{n-1} известно, тогда вычисляем параметры

$$\lambda_n = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\lambda_{n-1}^2})}{2}, \quad \gamma_{n-1} = \frac{(1 - \lambda_{n-1})}{\lambda_n}$$

8. Вычисляем $p_n = (1 - \gamma_{n-1})q_n + \gamma_{n-1}q_{n-1}$;
9. Численно решаем прямую задачу (1)–(4) для p_n ;
10. Вычисляем значение функционала $J(p_n)$;
11. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу (24)–(27);
12. Вычисляем градиент функционала $J'p_n$;
13. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = p_n - \alpha_n J'p_n$ и переходим к пункту 7;

В данной работе рассмотрена начально-краевая задача для волнового уравнения при отсутствии одного из начальных условий, что приводит к постановке обратной задачи. Было сформулировано обобщённое решение прямой задачи, доказана её корректность и получена априорная оценка решения. Для эффективной реализации численного метода применён ускоренный алгоритм Нестерова. Особенностью данной работы является применение кватернионного Фурье-преобразования (КПФ) при численном решении прямой задачи, что позволило получить более глубокое спектральное представление решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Вычислительная томография и физический эксперимент, *Успехи физических наук*, **141**:3 (1983), 469–498.
- [2] Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. *Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы*, Наука, Новосибирск (1987).
- [3] Пикалов В.В., Мельникова Т.С. *Низкотемпературная плазма. Том 13. Томография плазмы*, Наука. Сибирская издательская фирма РАН, Новосибирск (1995).
- [4] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики*, Наука, Москва (1984).

[5] Романов В.Г. Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики, *ДАН СССР*, **241**:2 (1978), 290–293.

[6] Sharafutdinov V. *Integral Geometry of Tensor Fields*, VSP, Utrecht (1994).

[7] Kabanikhin S. I., Krivorot'ko O. I., Shishlenin M. A. A numerical method for solving an inverse thermoacoustic problem, *Numerical Analysis and Applications*, **6** (2013), 34–39.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВРЕМЕННОГО ТИПА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.И. КОЖАНОВ

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

kozhanov@math.nsc.ru

В докладе представлены результаты

— о новых постановках линейных обратных коэффициентных задач для параболических и квазипараболических уравнений, в том числе для вырождающихся уравнений;

— о разрешимости новых линейных обратных коэффициентных задач для параболических и квазипараболических уравнений в классах регулярных решений.

Кроме того, в докладе будут представлены также некоторые обобщения и усиления полученных результатов.

Финансирование: Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке соглашение № 075–15–2025–349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Ключевые слова: обратные задачи, неизвестный свободный член, новые постановки, существование, единственность.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L04, 35R30

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ВИДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.И. КОЖАНОВ¹, К.А. ЖАЛГАСОВА²

¹*Институт математики имени С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия*

¹*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

²*Южно-Казахстанский университет имени М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан*

²*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

k.zhalgasova@gmail.com

В работе исследуется разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением гиперболического уравнения первого порядка также неизвестного внешнего воздействия (правой части). Особенностью изучаемых задач является то, что искомое внешнее воздействие определяется неизвестными множителями, зависящими как от пространственной, так и от временной переменной. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Пусть $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $c(x, t)$, $\phi(t)$, $\psi(x)$, $N(x)$ и $f(x, t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in (0, T)$, a и γ – заданные действительные числа.

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t + au_x + c(x, t)u = f(x, t) + q(x)\phi(t) + p(t)\psi(x), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T); \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} N(x) u(x, t) dx = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Обратная задача II: найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1) при выполнении для функции $u(x, t)$ условий (2) и (4), а также условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \gamma u_t(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP26199323)

Ключевые слова: гиперболические уравнения первого порядка, линейные обратные задачи, неизвестное внешнее воздействие комбинированного вида, регулярные решения, существование, единственность.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L04, 35R30

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

К.Г. КОЖОБЕКОВ¹, А.А. СОПУЕВ²

^{1,2}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

¹kudayberdi.kozhobekov@mail.ru, ²sopuev@gmail.com

В работе рассматривается постановка и исследование краевой задачи для уравнений третьего порядка смешанного параболо-гиперболического типа с двумя линиями изменения типа, содержащие разрывные и интегральные условия склеивания.

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n, s = 0, 1, \dots, m$). В области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{xy}, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xxy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u, & (x, y) \in D_2, \\ u_{xxy} + a_3 u_x + b_3 u_y + c_3 u, & (x, y) \in D_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x, y) : 0 < x < \ell, -h_1 < y < 0\}$, $D_3 = \{(x, y) : -\ell_1 < x < 0, 0 < y < h\}$ - заданные функции, причем

$$a_i(x, y) \in C^{1+0}(D_i), b_i(x, y) \in C^{0+1}(D_i), c_i(x, y) \in C(D_i), (i = 1, 2).$$

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x, y)$ в области D из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup C^{2+1}(D_2) \cup C^{2+1}(D_3)]$, удовлетворяющее уравнению (1) в области D_1 и краевым условиям

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), \quad u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u(0, y) = \chi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_2(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad -\ell_1 \leq x \leq 0,$$

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

и условиям склеивания

$$u(+0, y) = u(-0, y), \quad u_x(+0, y) = \alpha(y)u_x(-0, y) + \int_0^y \beta(\eta)u_x(-0, \eta)d\eta, \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = \gamma(x)u_y(x, -0), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

где

$$\begin{cases} \varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0, h], \varphi_3(y) \in C[0, h], \chi_1(y), \chi_2(y) \in C^1[-h_1, 0], \\ \psi(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \alpha(y), \beta(y) \in C[0, h], \gamma(x) \in C[0, \ell], \\ \forall y \in [0, h] : \alpha(y) \neq 0, \forall x \in [0, \ell] : \gamma(x) \neq 0. \end{cases}$$

$$\varphi_1(0) = \chi_2(0), \quad \psi(0) = \chi_1(0), \quad \varphi_3(0) = \psi(-\ell_1).$$

Актуальность данной задачи объясняется тем, что краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с разрывными и интегральными условиями склеивания остаются недостаточно изученными, что обуславливает необходимость дальнейших исследований в данном направлении.

При решении задач 1 используется метод функции Римана, разработанные в работе Шханукова М. Х. [1] для уравнения третьего порядка с частными производными с двумя независимыми переменными. В работе Жегалова В.И. и Уткиной Е. А. [2] приведен другой метод построения функции Римана для уравнений с частными производными третьего порядка.

Краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа с двумя независимыми переменными с одной линией сопряжения рассмотрены в работах Сабитова К. Б. [3], Джураева Т. Д., Сопуева А., Мамажанова М. [4]. Нелокальные задачи сопряжения для уравнений в частных производных третьего порядка исследованы в работах [5] - [7].

В работе доказано существование и единственность решения краевой задачи 1. Методом исключения системы уравнений, полученных из параболической и гиперболической части областей на линии $y = 0$ разрешимость задачи сводится к разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, затем к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным ядром.

На линии $x = 0$ разрешимость задачи сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабым ядром. Методом функции Грина и Римана найдены представления решения рассматриваемой задачи. Построены примеры функции Римана.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, краевые условия, интегральные условия склеивания, единственность, существование, функция Грина, функция Римана, интегральные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка, *Известия вузов. Математика*. (1999), N 10. С. 73–76.
- [2] Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа*, Наука, Москва (2016).
- [3] Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа*, Фан, Ташкент (1986).
- [4] Кожобеков К. Г. Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка, *Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф.* (2009). №1 (60). 3–40.
- [5] Apskov Yu. P., Sopuev A. A. Boundary value problems for a mixed equation of parabolic-hyperbolic type of the third order, *Lobachevskii J. Math.* (2023). 44. 5149–5157.

[6] Apakov Yu. P., Sopuev A. A. Nonlocal problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation of the third order, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.* (2025). 10(1). 5–16.

[7] Apakov Yu. P., Sopuev A. A. Interior nonlocal problem for a third-order mixed parabolic-hyperbolic type equation, *Sib. Zh. Ind. Mat.* (2025). 28:2. 5–21.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТОЧЕЧНОГО И РАСПРЕДЕЛЕННОГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕОДНОРОДНУЮ БИОЛОГИЧЕСКУЮ ТКАНЬ

П.Ж. КОЖОБЕКОВА¹, М.Т. САБИРЖАНОВ²

^{1,2}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

¹pkojobekova@oshsu.kg, ²msabirjanov@oshsu.kg

В работе исследуются математические модели точечного (лазерного) и распределенного (электромагнитного) теплового воздействия на неоднородную биологическую ткань. Проводится сравнительный анализ эффективности данных модальностей для задач гипертермии. Введён критерий селективности нагрева $S(t)$ и сформулированы задачи оптимального управления.

Рассматривается ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащая подобласть опухоли Ω_t . Плотность $\rho(x)$, теплоёмкость $c(x)$ и коэффициент теплопроводности $\kappa(x)$ являются кусочно-постоянными функциями:

$$\rho(x), c(x), \kappa(x) = \begin{cases} \rho_1, c_1, \kappa_1, & x \in \Omega_t, \\ \rho_2, c_2, \kappa_2, & x \in \Omega \setminus \Omega_t. \end{cases}$$

Температурное поле $T(x, t)$ описывается уравнением биотеплопереноса Пеннеса:

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa(x)\nabla T) + \omega_b c_b (T_a - T) + Q(x, t).$$

Начальное условие: $T(x, 0) = T_0(x)$, граничное условие теплоизоляции:

$$\kappa(x)\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Для лазерного (точечного) источника используется модель

$$Q_L(x, t) = P(t)\delta(x - x_0),$$

где $P(t)$ — мощность лазера (управление).

Для электромагнитного (распределенного) воздействия

$$Q_{EM}(x, t) = \sigma(x)|E(x, t)|^2,$$

где $E(x, t) = E_0(t)\sin(\omega t)$, $E_0(t)$ — амплитуда, ω — частота.

Формулируется задача оптимального управления: найти Q^* , минимизирующее функционал

$$J(Q) = \int_0^\tau \int_{\Omega_t} (T - T_d)^2 dxdt + \lambda \int_0^\tau \int_{\Omega} Q^2 dxdt.$$

Вводится критерий селективности нагрева:

$$S(t) = \frac{\int_{\Omega_t} T(x, t) dx}{\int_{\Omega \setminus \Omega_t} T(x, t) dx}.$$

Численная реализация основана на методе конечных разностей и градиентных алгоритмах с использованием сопряжённых уравнений. Предварительный анализ показывает, что лазерное воздействие эффективно для поверхностных опухолей (глубина менее 2–3 см), тогда как электромагнитное — для глубоко расположенных образований. Перфузия крови снижает эффективность нагрева на 30–40%.

Ключевые слова: гипертермия, уравнение Пеннеса, лазерное воздействие, электромагнитное поле, оптимальное управление, селективность нагрева.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 49J20, 92C50

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Datta N.R., Ordóñez S.G., Gañil U.S. et al. Local hyperthermia combined with radiotherapy and/or chemotherapy: Recent advances and promises for the future, *Cancer Treatment Reviews*, 41 (2015), 742–753.
- [2] Singh G., Kumar N., Avti P.K. Bioheat Physics for Hyperthermia Therapy, in: *Application of Biomedical Engineering in Neuroscience*, Springer, 2019, 439–464.
- [3] Hegde T., Maniyeri R. Computational Modelling of Bioheat Transfer for Hyperthermia Using Finite Difference Method, in: *Recent Advances in Thermal Sciences and Engineering*, Springer, 2023, 45–57.
- [4] Отелбаев М., Кошанов Б.Д., Кожобекова П.Ж. О возможности создание теплового поля с помощью электромагнитных полей, *Вестник ОшГУ. Математика, физика, техника*, 1 (2023), 172–175.
- [5] Отелбаев М., Гасанов А., Акпаев Б. Об одной задаче управления точечным источником тепла, *Доклады РАН*, 435:5 (2010), 317–319.
- [6] Кожобекова П.Ж. Задачи управления точечным источником тепла и применение в медицине, PhD dissertation, Ош, 2025, 123 p.
- [7] Pennes H.H. Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm, *Journal of Applied Physiology*, 1:2 (1948), 93–122.
- [8] Nelson J.S., Jacques S.L. Heat Transfer in Laser Irradiated Tissue, *Lasers in Surgery and Medicine*, 16:2 (1995), 207–230.

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ТУРА ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ САНДЫҚ ӘДІСТЕРІ

Ж.К. МАКСУМОВА¹, А.М. ТЛЕУЛЕСОВА², С.Е. КАСЕНОВ³,
Ж.М. БЕКТЕМЕСОВ⁴, Ж.С. ТУГЕНБАЕВА⁵

¹М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан
^{2,3,4,5}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹zhanarmaksumova@gmail.ru, ²kassenov.syrym@kaznu.kz

Бұл жұмыста ісік өсу динамикасын сипаттайтын параболалық типтегі сызықты емес реакция–диффузия теңдеуі үшін тура есепті сандық әдістермен шешу алгоритмін құру мәселесі қарастырылады. Мұндай модельдер биоматематикалық процестерде жасушалардың кеңістікте таралуын диффузиялық механизм арқылы, ал олардың көбеюін логистикалық заңдылық негізінде сипаттайды.

Қарастырылатын есеп:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \rho \Delta C = \alpha(t)C \left(1 - \frac{C}{C_{\max}}\right) - g(t)C, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\nabla C \cdot n = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$C(x, 0) = C_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Мұндағы $C(x, t)$ — ісік жасушаларының тығыздығы, ρ — диффузия коэффициенті, $\alpha(t)$ — көбею коэффициенті, $C_{\max}$ — тасымалдау сыйымдылығы, $g(t)$ — жойылу функциясы. Нейман шекаралық шарты биологиялық жүйенің тұйықтылығын көрсетеді.

Уақыт айнымалысы бойынша айқын айырымдық сұлба қолданылады, ал кеңістіктік туындылар ақырлы элементтер әдісі арқылы жуықталады. Алынған дискреттік жүйе итерациялық әдістер көмегімен шешіледі.

Алынған нәтижелер ісік өсуін математикалық модельдеу есептерінде тура есепті сандық тұрғыдан шешуге арналған орнықты әрі тиімді алгоритм құруға негіз болады және биомедициналық процестерді сандық талдауда практикалық маңызға ие.

Қаржыландыру: Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылды (грант № AP26103465).

Кілттік сөздер: параболалық теңдеу, ісік өсу динамикасы, айқын айырымдық сұлба, ақырлы элементтер әдісі, сандық талдау.

2020 жылғы Математикалық пәндер классификациясы: 35K57, 65M06, 65N21.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

- [1] Sergey I. Kabanikhin. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. De Gruyter, 2011.
- [2] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. Наука, Москва, 1989.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Ж. А. МАМАТОВ¹, А. И. КОЖАНОВ²

^{1,2}Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

¹z.mamatov@ngsu.ru, ²kozhanov@math.nsc.ru

Определим цилиндрическую область Q как множество точек (x, y, t) таких, что $x \in \Omega = (0, 1)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in G \subset R_y^m$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, и при этом будем считать, что G есть ограниченная область с гладкой (можно даже считать бесконечно дифференцируемой) границей Γ . Обозначим через Δ оператор Лапласа по переменным $y_1, \dots, y_m$, определяется равенством

$$u_t + a(t)u + \Delta_y^2 u + c(x, y, t)u = f(x, y, t)$$

(где $c(x, y, t)$, $f(x, y, t)$, $a(t)$ — заданные функции). Для этого уравнение изучается разрешимость нелокальных задач с условием интегрального вида по пространственной переменной y . Доказывается теоремы существования и единственности регулярных решений — решений, имеющие все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: ультрапараболические уравнения, интегральные аналоги второй краевой задачи, регулярные решения, существование, единственность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кожанов А. И., Дюжева А.В. Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка, *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*, **36** (2021), 14–28.
- [2] Кожанов А. И. *Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи*, Наука, Новосибирск (2024), 96 с.

[3] Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида, *Математические заметки СВФУ*, **23**:1 (2016).

ОБОВЩЕННАЯ ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ

М. МИРСАБУРОВ¹, Д.Т. МАМАТМУМИНОВ²

^{1,2} Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

¹mirsaburov@mail.ru, ²dilshod310797mdt@mail.ru

Постановка задачи GF (Геллерстедта-Франкля).

Пусть D — конечная область плоскости независимых переменных x, y , ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(\text{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

где m — положительная постоянная, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$. Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 (A_0 и B_0) точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками выходящих из точек $E(c, 0)$ ($E_0(c_0, 0)$), где c_0 и c — некоторые числа принадлежащие интервалу $J = (-1, 1)$ оси $y = 0$, причем $-1 < c_0 < c < 1$. Пусть $p(x) = b - ax$ — линейная функция отображающая отрезок $[-1, c_0]$ на отрезке $[c_0, c]$ т.е. $-1 \leq x \leq c_0$, $c_0 \leq p(x) \leq c$ причем $p(-1) = c$, $p(c_0) = c_0$ где $a = (c - c_0)/(1 + c_0)$, $b = c_0(1 + c)/(1 + c_0)$.

Задачи GF. В области D требуется найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющую следующим условиям.

- 1) $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 2) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса $R_1[1, c.104]$, [2, с.35] в области $D^- \setminus (E_0 A_0 \cup E_0 B_0 \cup E C_0 \cup E C_1)$
- 3) на интервале вырождения J имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{c_0\}, \quad (2)$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c_0$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$ где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2)$;

- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) |_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$u(x, y) |_{AA_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1, (c_0 - 1)/2], \quad (4)$$

$$u(x, y) |_{BC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [(c + 1)/2, 1], \quad (5)$$

$$u(p(x), 0) - u(x, 0) = f(x), \quad x \in [-1, c_0], p(x) \in [c_0, c] \quad (6)$$

где $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x) = (1 - x^2)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C^1[-1, 1]$, $\psi_0(-1) = 0$.

Заметим, что условие (6) является аналогом условия Франкля на отрезке вырождения AE которое дополняет недостающее условие Геллерстедта на куске характеристике $A_0 C_0 \in AC$

Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [-1, 1]; \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (-1, 1),$$

дается формулой Дарбу [2,с.34]:

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_{-1}^1 \tau \left(x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right) (1-t)^{\beta-1} (1+t)^{\beta-1} dt + \\ + \gamma_2 (-y)^{1-\beta_0} \int_{-1}^1 \nu \left(x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right) (1-t)^{-\beta} (1+t)^{-\beta} dt, \quad (7)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2^{1-2\beta} \Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = -\frac{2^{2\beta-1} \Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0) \Gamma^2(1-\beta)}.$$

Из формулы (7), с учетом условий (4) и (5) нетрудно получить соотношения

$$\nu(x) = \gamma D_{-1,x}^{1-2\beta} \tau(x) + \Psi_0(x), \quad x \in (-1, c_0). \quad (8)$$

$$\nu(x) = \gamma D_{x,1}^{1-2\beta} \tau(x) + \Psi_1(x), \quad x \in (c, 1). \quad (9)$$

где $D_{-1,x}^{1-2\beta}, D_{x,1}^{1-2\beta}$ – операторы дифференцирования дробного порядка [2,с.20],

$$\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\beta}, \quad \Psi_0(x) = -\frac{\gamma\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} (1+x)^\beta D_{-1,x}^{1-\beta} \psi((x-1)/2),$$

$$\Psi_1(x) = -\frac{\gamma\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} (1-x)^\beta D_{x,1}^{1-\beta} \psi((x+1)/2)$$

-известные функции.

Теорема 1 (Мирсабуров). Пусть $\psi_0(x) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, тогда решение $u(x, y)$ задачи GF своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{D}^+$ принимает только в точках кривой $\overline{\sigma}_0$.

Теорема 1 доказывается методом работы [3],[4].

Финансирование: Работа выполняется при поддержке Фонда Министерства Инновационного развития Республики Узбекистан (грант № ФЗ-202009211).

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, граничное условие, условия сопряжения, видоизмененной задачи Коши.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35L81

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа*. М., 1985, -304с.
- [2] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, "Университет Ташкент (2005), 223.
- [3] Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках, *Дифференциальные уравнения*, **37:9** (2001), 1281-1284.
- [4] Мирсабуров М., Маматмуминов Д.Т. Задача с аналогами условия Франкля на граничной характеристике и на отрезке вырождения и с общими условиями сопряжения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, **7:5** (2024), 93-104.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С РАЗЛИЧНЫМИ ПОРЯДКАМИ ВЫРОЖДЕНИЯ.

М. МИРСАБУРОВ¹, Р.Н. ТУРАЕВ², Ф.С. МИРЗАЕВ³

^{1,3}Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

²Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, Термез,
Узбекистан

¹mirsaburov@mail.ru, ²rasul.turaev@mail.ru, ³fayzullamirzayev95@gmail.com

Пусть Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(l+2)^{-2}y^{l+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и BC уравнения

$$G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, & \text{при } y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где постоянные $-1 < l < 0$, $-1 < m < 0$, $-1 < \delta_0 < l/2$, $-1 < \beta < m/2$ причем $l \neq m$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$.

Постановка задачи ТК(Трикоми, Кривунов). Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$;
- 2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω^+ ;
- 3) $u(x, y)$ — обобщенное решение уравнения (1) из класса R_2 [1, с.113] в области Ω^- ;
- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) |_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2)$$

$$u(x, y) |_{AC} = \psi(x), \quad x \in [-1, 0], \quad (3)$$

5) на интервале $(-1, 1)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = - \lim_{y \rightarrow +0} y^{\delta_0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad x \in (-1, 1), \quad (4)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, заданные функции, причем $\varphi(\pm 1, 0) = 0$, $\psi(-1) = 0$.

Введем обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu^-(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{\delta_0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu^+(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (6)$$

Обобщенное решение задачи Коши с данными (5), (6) для уравнения (1) из класса R_2 в области Ω^- дается формулой, [1, с.230]:

$$u(\xi, \eta) = \int_{-1}^{\xi} (\eta - t)^{-\beta} (\xi - t)^{-\beta} T(t) dt + \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{-\beta} (t - \xi)^{-\beta} N(t) dt, \quad (7)$$

где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2},$$

$$N(t) = T(t)/2 \cos(\pi\beta) - \gamma_1 \nu^-(t), \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\beta},$$

$$\tau(x) = \int_{-1}^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt, \quad -1 < x < 1,$$

функции $T(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны в $(-1, 1)$ и интегрируемы на $[-1, 1]$, а $\tau(x)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x \rightarrow -1$, здесь $2\beta = (m + 2\beta_0)/(m + 2)$, причем $-1 < 2\beta < 0$.

В силу (7) из краевого условия (3) имеем

$$\gamma_1 \nu^-(x) = \frac{1}{2 \cos(\pi\beta)} T(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_{-1,x}^{-\beta} \psi\left(\frac{x-1}{2}x-1\right), \quad -1 < x < 1. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия $\tau(x) \in C[-1, 1] \cap C^{(1,k)}(-1, 1)$, $k > -2\beta$, $-1 < 2\beta < 0$ и функция $\tau(x)$ в точке $x = x_0$ ($x_0 \in (-1, 1)$) принимает наибольшее положительное значение (НПЗ) (наименьшее отрицательное значение (НОЗ)). Тогда функцию $T(x)$ [2] в точке $x = x_0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} T(x_0) &= \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{-1,x}^{1-2\beta} \tau(x) |_{x=x_0} = \\ &= \frac{2\beta}{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left[(x_0+1)^{2\beta-1} \tau(x_0) + (1-2\beta) \int_{-1}^{x_0} \frac{\tau(x_0) - \tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}} dt \right], \end{aligned} \quad (9)$$

причем в точке НПЗ, $T(x_0) < 0$, а в точке НОЗ, $T(x_0) > 0$, где $x_0 \in (-1, 1)$.

Теорема 2. Задача ТК может иметь не более одного решения.

Теорема 1 доказывается методом работы [2].

Ключевые слова: задачи Трикоми, уравнений смешенного типа с различными порядками, класса R_2 , задачи Коши.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35L81

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа., М., (1985), 304.
- [2] Мирсабуров М. и Исломов Н. Б. Об одной задаче с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода, *Дифференциальные уравнения.*, **57** (10): (2021), 1384–1396.

ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА-МОИСЕЕВА С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ.

Д.Т. МИРСАБУРОВА

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

dmirsaburova@mail.ru

В некоторой смешанной области исследуется корректность аналога задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом с условиями заданными на граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристике.

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$ ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(sign y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, через C_0 и C_1 точки пересечения характеристики AC и BC соответственно с характеристиками исходящими из точки $E(c, 0)$, где c некоторое число, принадлежащее интервалу $J = (-1, 1)$ оси $y = 0$.

В настоящей работе в конечной области D для уравнения (1) исследуется корректность задачи, где носителями данных являются параллельные характеристики AC_0 и EC_1 .

Задачи ГМ (Геллерстедта-Моисеева). В области D требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $u(x, y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области.
- 2) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области $D^- \setminus (EC_0 \cup EC_1)$
- 3) На интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J \setminus \{c\}, \quad (2)$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$ где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2)$;

- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) |_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(x, y) |_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2], \quad (4)$$

$$u(x, y) |_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c, (c+1)/2], \quad (5)$$

где $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции причем $\varphi(\pm 1) = 0$, $\psi_0(-1) = 0$, $\psi_1(c) = 0$.

Корректность задачи ГМ доказывается методом работы [1].

Финансирование: Работа выполняется при поддержке Фонда Министерства Инновационного развития Республики Узбекистан (грант № ФЗ-202009211).

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, граничное условие, условия сопряжения, видоизмененной задачи Коши.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35L81

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уринов А. К., Мирсабулова Д.М. Gellerstedt -Moiseev problem with data on parallel characteristics in the unbounded domain for a mixed type equation with singular coefficients, *Lobachevskii journal of mathematics.*, **45** (3): (2024), 1318-1332.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

М.Р. РУСТАМОВА¹, З.С. МАДРАХИМОВА²

¹Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

²Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

¹rustamovamunisa109@gmail.com, ²zilolaxonmadrahimova@gmail.com

Краевые задачи типа задачи Трикоми для уравнения второго порядка смешанного параболического, эллиптического-гиперболического типа с вырождением типа и порядка внутри области исследованы в работах Б. Исломова и З.С. Мадрахимова [1], А.К. Уринов и А.Т. Абдукодиров [2], З.С. Мадрахимова [3], З.С. Мадрахимова и М.Р. Рустамова [4].

В данной работе изучается краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения смешанного типа с вырождением типа и порядка внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} xu_{xx} + \alpha_1 u_x - u_y, & x > 0, \quad y > 0, \\ -xu_{xx} + (-x)^n u_{yy} + \alpha_2 u_x, & x < 0, \quad y > 0, \\ yu_{yy} + (-y)^m u_{xx} + \alpha_3 u_y, & x > 0, \quad y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $n, m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const}$,

$$0 < \alpha_1 < 1, \quad n > 1, \quad \frac{1-n}{2} < \alpha_2 < 1, \quad m > 1, \quad \frac{1-m}{2} < \alpha_3 < \frac{3+m}{2}. \quad (2)$$

Пусть D_1 - область, ограниченная при $x > 0, y > 0$ отрезками AB, BB_0, A_0B_0, AA_0 прямых $y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$ соответственно, D_2 - область ограниченная при $x < 0, y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{(n+1)^2} (-x)^{n+1} = \frac{1}{4}$ с концами в точках $A(0, 0)$ и $A_0(0, 1)$, D_3 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AC : x - \frac{2}{m+1} (-y)^{\frac{m+1}{2}} = 0, BC : x + \frac{2}{m+1} (-y)^{\frac{m+1}{2}} = 1$ уравнения (1) при $x > 0, y < 0$, выходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, пересекающимися в точке $C(\frac{1}{2}; -(\frac{m+1}{4})^{\frac{2}{m+1}})$, $D = \sum_{j=1}^3 D_j \cup I_1 \cup I_2, I_1 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}, I_2 = \{(x, y) : y = 0, 0 < x < 1\}$.

Задача T_2 . Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x, y) \in C(\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \overline{D_3}), (-x)^{\alpha_1} u_x \in C(D_1 \cup I_1), x^{\alpha_2} u_x \in C(D_2 \cup I_1), (-y)^{\alpha_3} u_y \in C(D_3 \cup I_2)$; 2) $u(x, y) \in C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_2) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $D_j (j = 1, 2, 3)$; 3) на линии вырождения I_1 и I_2 выполняются условия склеивания

$$u(+0, y) = a_1(y) u(-0, y) + b_1(y), \quad (0, y) \in \bar{I}_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (-x)^{\alpha_1} u_x(x, y) = a_2(y) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha_2} u_x(x, y) + b_2(y), \quad (0, y) \in I_1;$$

$$u(x, +0) = c_1(x) u(x, -0) + d_1(x), \quad (x, 0) \in \bar{I}_2,$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\alpha_3} u_y(x, y) = c_2(x) \lim_{y \rightarrow +0} y^{\alpha_3} u_y(x, y) + d_2(x), \quad (x, 0) \in I_2;$$

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{x=1} = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad u(x, y)|_{\sigma_0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0,$$

$$u(x, y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

где $\varphi(y), \psi(x, y), \psi_1(x), a_i(y), b_i(y), c_i(x), d_i(x) (i = 1, 2)$ – заданные функции, причем, $\psi(0, 0) = \psi_1(0)$,

$$a_i(y), b_i(y) \in C(\bar{I}_1) \cap C^1(I_1) \quad (i = 1, 2), \quad a_1(y)a_2(y) > 0, \quad \forall (0, y) \in \bar{I}_1, \quad (3)$$

$$c_i(x), d_i(x) \in C(\bar{I}_2) \cap C^1(I_2) \quad (i = 1, 2), \quad c_1(x)c_2(x) > 0, \quad \forall (x, 0) \in \bar{I}_2, \quad (4)$$

$$\varphi(y) \in C(\bar{I}_1) \cap C^1(I_1), \quad \psi_1(x) \in C(\bar{I}_2) \cap C^1(I_2), \quad (5)$$

$$\psi(x, y) \in (-x)^{\varepsilon+1} \tilde{\psi}(x, y), \quad \tilde{\psi}(x, y) \in C(\bar{\sigma}_0), \quad \varepsilon > 0, \quad (6)$$

Теорема 1. Если выполнены условия (2)-(6), то в области D решение задачи T_2 существует и единственно.

Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума [5], а существования – методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: краевая задача, уравнения смешанного типа, уравнения с вырождением типа и порядка.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35L10

ЛИТЕРАТУРА

[1] Исломов Б., Мадрахимова З.С. Краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области, *"Ёш математикларнинг Янги теоремалари-2009"*, 1:2 (2009), 103–104.

[2] Уринов А.К. и Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения, в: *Узбекский математический журнал*, Ташкент (2005), 102–110.

[3] Мадрахимова З.С. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения парабола-гиперболического типа с вырождением типа и порядка внутри области, в: *Узбек. мат. журнал*, Ташкент (2010), 3, 44–51.

[4] Мадрахимова З.С., Рустамова М.Р. Краевая задача с разрывными условиями сливания для уравнения парабола-эллиптического типа, в: *Актуальные проблемы алгебры и анализа*, Термез (2025), 214–215.

[5] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, "Наука Москва (1981), 448 с.

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ВЕКУА И ОТЕЛЬБАЕВА К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.Т. САБИРЖАНОВ¹, П.Ж. КОЖОБЕКОВА²

^{1,2}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

¹msabirjanov@oshsu.kg, ²pkojobekova@oshsu.kg

В работе исследуются краевые задачи для полигармонических уравнений и условия применимости методов Векуа и Отельбаева. Получены критерии корректности постановки задач и интегральные представления решений через функцию Грина.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $S = \partial\Omega$. Рассматривается полигармоническое уравнение

$$\Delta^m u + a_1 \Delta^{m-1} u + \dots + a_m u = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

1. Пространства Векуа.

Рассмотрим эллиптическую систему первого порядка

$$\partial_{\bar{z}} u + a(z)u + b(z)\bar{u} = f(z), \quad z \in \Omega.$$

Если $a, b, f \in L^p(\Omega)$ при $p > 2$, то любое решение $u \in W_2^1(\Omega)$ непрерывно в Ω , а решение однородной системы представимо в виде

$$u(z) = \Phi(z)e^{\omega(z)}, \tag{1}$$

где Φ — аналитическая функция.

Пространство B называется пространством Векуа, если выполняются:

- непрерывность решений неоднородной системы;
- представимость решений однородной системы в форме (1).

Критерий: B является V -пространством тогда и только тогда, когда выполняется непрерывное вложение

$$B \hookrightarrow L(2, 1).$$

2. Метод Векуа для полигармонического уравнения.

Рассматривается задача Дирихле

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial n^j} \Big|_S = \varphi_j, \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

Решение представляется через функцию Грина:

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{2m,n}(x, y) f(y) dy.$$

Функция Грина удовлетворяет

$$\Delta^m G_{2m,n}(x, y) = \delta(x - y), \quad \frac{\partial^j G_{2m,n}}{\partial n_x^j} \Big|_S = 0.$$

При нечётном n или $2m < n$

$$G_{2m,n}(x, y) = d_{2m,n} (|x - y|^{2m-n} - Y^{2m-n}).$$

3. Метод Отельбаева.

Пусть $L_b u = \Delta^m u$,

$$D(L_b) = W_2^{2m}(\Omega).$$

Тогда корректное ограничение L_K определяется оператором $K : L^2(\Omega) \rightarrow W_2^{2m}(\Omega)$ и приводит к граничным условиям вида

$$w|_S = K(\Delta^m w)|_S, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial}{\partial n} K(\Delta^m w) \Big|_S.$$

4. Бигармоническое уравнение.

Рассмотрим

$$\Delta^2 u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{C}.$$

Частное решение имеет вид

$$u_1(z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} f(t) |t - z|^2 \ln |t - z| d\xi d\eta.$$

Общее решение записывается как

$$u(z) = u_1(z) + z\varphi(z) + \overline{z\varphi(z)} + \psi(z) + \overline{\psi(z)},$$

где φ и ψ — аналитические функции.

Полученные результаты устанавливают условия применимости методов Векуа и Отельбаева к краевым задачам для полигармонических уравнений.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, метод Векуа, метод Отельбаева, функция Грина, краевая задача.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции*, Москва, (1959).
- [2] Отелбаев М.О. К теории обобщенных аналитических функций Векуа., — *Применение методов функционального анализа и вычислительной математики. Материалы школы-семинара*, Новосибирск (1979), 80–99.
- [3] Блиев Н.К., Отелбаев М.О. К теории обобщенных аналитических функций Векуа.- В кн.: *Сообщение АН ГССР*, (1978), Т. 90, №2 297–300.

[4] Sabirzhanov M.T., Koshanov B.D., Shynybayeva N.M., Kozhobekova P.Zh. Some methods for solving boundary value problems for polyharmonic equations, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, No.1(117) (2025), 143–154.

[5] Отелбаев М., Кошанов Б.Д., Кожобекова П.Ж. О возможности создание теплового поля с помощью электромагнитных полей, *Вестник ошского государственного университета математика, физика, техника*, No.1 (2023), 172–175.

[6] Кошанов Б.Д., Сабиржанов М.Т. Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений, *Вестник ошского государственного университета математика, физика, техника*, No.1 (2023), 116–120.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

А.Дж. САТЫБАЕВ¹, А.К. КОКОЗОВА², Ю.В. АНИЩЕНКО³,
Г.С. КУРМАНАЛИЕВА⁴

^{1,2,3,4}Ошский технологический университет, Ош, Кыргызстан

¹abdu-satybaev@mail.ru, ²kokozova72@gmail.com, ³programm85@mail.ru,

⁴gulzat-kurmanalieva@mail.ru

Обратные задачи волновых процессов возникают в различных прикладных областях, например, в теории упругости, волновых уравнениях, геофизике, сейсмике, акустике, электродинамике и геоэлектрике, телеграфном уравнении, термоупругости, томографии и других задачах.

Основы теории обратных задач и некорректных задач были заложены А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьевым, В.К. Ивановым, В.Г. Романовым, С.И. Кабанихиным, В.В. Васиным и др.

Круг практических применений обратных задач достаточно широк. Более подробно эти вопросы рассмотрены в классических работах по теории обратных задач [1–2].

В настоящее время построение численных решений одномерных обратных задач изучено достаточно полно, тогда как численные методы решения многомерных обратных задач волновых процессов исследуются сравнительно недавно.

Численные методы решения обратных задач разрабатывались учёными А.А. Самарским, П.Н. Вабищевичем, А.М. Денисовым, А.В. Гончарским, С.И. Кабанихиным и их учениками.

К основным численным методам решения обратных задач относятся методы регуляризации, вариационные методы, итерационные методы, методы дискретизации, методы обращения разностных схем и др.

Для решения обратных задач волновых процессов нами разработан конечно-разностный регуляризованный метод, представляющий собой сочетание методов регуляризации, характеристик, выделения особенностей и обращения разностных схем.

Разработанный метод применён для решения обратных задач волновых процессов при определении различных физических параметров.

В сейсмике определяются скорость распространения волн, плотность и упругие параметры среды (С.И. Кабанихин, А.Дж. Сатыбаев, А.А. Алимканов). В акустике определяются плотность среды и плотность тела (С.И. Кабанихин, А.Дж. Сатыбаев). В электродинамике и геоэлектрике определяются электрическая и магнитная проницаемость, а также электропроводность среды (А.Дж. Сатыбаев, А.Т. Маматкасымова, Ю.В. Анищенко). В телеграфном уравнении определяются скорость распространения волн, электрическая и магнитная проницаемость, электропроводность среды (А.Дж. Сатыбаев, А.Ж. Кокзова). В задачах термоупругости определяются коэффициент теплового расширения, температуропроводность, теплоотдача и теплопроводность (А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева). В медицине определяются

удельное сопротивление плазмы (мембраны) и нервного волокна, радиус нервного волокна и ёмкость мембраны на единицу площади (А.Дж. Сатыбаев, Г.С. Курманалиева) и др.

Ключевые слова: обратные задачи, волновые процессы, численные методы, регуляризация, конечно-разностный метод.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35L05, 65M06

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики*, Наука, Москва (1984).
[2] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск (2009).

БІРӨЛШЕМДІ ПЕННЕС ТЕНДЕУІНІҢ ТУРА ЕСЕБІН САНДЫҚ ӘДІСПЕН ШЕШУ

Қ.Қ. СОЛТАНБЕКОВА¹, С.Е. КАСЕНОВ²

¹Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен, Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹kymbat.soltanbekova@bk.ru, ²syrym.kasenov@gmail.com

Жұмыста биологиялық тіндегі жылу алмасу процесін сипаттайтын бірөлшемді Пеннес тендеуінің тура есебі қарастырылады. Бұл модель гипертермиялық терапия, ісік тіндерін қыздыру және термиялық әсерлерді зерттеу есептерінде негізгі математикалық аппарат болып табылады. Тура есептің мақсаты – барлық физикалық параметрлер белгілі болған жағдайда температура өрісін анықтау.

Температура өрісі келесі тендеумен сипатталады:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T_t(x, t)}{\partial t} = \nabla (k_t \nabla T_t(x, t)) + \omega_{bl} \rho_{bl} c_{bl} (T_a - T_t(x, t)) + Q_m + Q_r(x, t),$$

$$0 < x < a, \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

Мұндағы $T(x, t)$ — температура;

ρ_t, c_t — тіннің тығыздығы мен меншікті жылу сыйымдылығы;

$k_t(x)$ — жылуөткізгіштік коэффициенті;

ω_{bl} — қан перфузиясының коэффициенті;

Q_m — метаболикалық жылу көзі;

$Q_r(x, t)$ — сыртқы жылу әсері.

Бастапқы шарт:

$$T(x, 0) = T_i. \quad (2)$$

Шекаралық шарттар:

$$T(0, t) = T_0, \quad (3)$$

$$-k_t \frac{\partial T_t(a, t)}{\partial x} = U(T_\infty - T_t(a, t)). \quad (4)$$

Тура есепті сандық шешу үшін кеңістік және уақыт бойынша бірқалыпты тор енгізілді:

$$x_i = ih, \quad t^n = n\tau. \quad (5)$$

Уақыт бойынша айқын емес айырымдық сұлбасы қолданылды:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau}. \quad (6)$$

Диффузиялық мүше дивергенттік түрде аппроксимацияланып, ішкі түйіндер үшін үш-диагональды сызықтық теңдеулер жүйесі алынды:

$$-\frac{k_{i-1/2}}{h^2}T_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{\rho c_t}{\tau} + \frac{k_{i+1/2} + k_{i-1/2}}{h^2} + \omega_b \rho_b c_b\right)T_i^{n+1} - \frac{k_{i+1/2}}{h^2}T_{i+1}^{n+1} = \frac{\rho c_t}{\tau}T_i^n + \omega_b \rho_b c_b T_a + Q_m + Q_r(x_i, t^{n+1}). \quad (7)$$

Сол жақ шекарада Дирихле шарты енгізіліп, оң жақ шекарада Робин шарты айырымдық түрде жазылады:

$$\left(\frac{k_N}{h} + U\right)T_N^{n+1} - \frac{k_N}{h}T_{N-1}^{n+1} = UT_\infty. \quad (8)$$

Алынған үшдиагональды жүйе қуалау әдісімен шешіледі. Бұл әдіс екі кезеңнен тұрады: тура жүріс және кері жүріс.

Тура жүрісте шешім келесі түрде ізделеді:

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i. \quad (9)$$

Бастапқы коэффициенттер:

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{d_1 - a_1 T_c}{b_1}. \quad (10)$$

Жалпы рекурренттік формулалар:

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}, \quad (11)$$

$$\beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

Тура жүріс аяқталғаннан кейін Робин шекаралық шарты арқылы соңғы түйіндегі температура анықталады:

$$T_N^{n+1} = \frac{UT_\infty + \frac{k_N}{h}\beta_{N-1}}{\frac{k_N}{h} + U - \frac{k_N}{h}\alpha_{N-1}}. \quad (13)$$

Кері жүрісте соңғы түйін белгілі болғаннан кейін температура мәндері кері бағытта есептеледі:

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \quad i = N-1, \dots, 1. \quad (14)$$

Соңында:

$$T_0^{n+1} = T_c. \quad (15)$$

Бірөлшемді Пеннес теңдеуінің тура есебі айқын емес айырымдық сұлба негізінде шешілді. Алынған үшдиагональды жүйе қуалау әдісі арқылы тиімді түрде шешіледі. Бұл әдіс гипертермия процестерін модельдеу үшін сенімді сандық құрал болып табылады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP26103465) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: Пеннес теңдеуі, тура есеп, айырымдық сұлба, қуалау әдісі.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35R25, 65N21

ӘДЕБИЕТ

- [1] Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*, Учебник для студентов высших учебных заведений, Новосибирск: Сибирское научное издательство (2009).
- [2] Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука Москва (1978).

[3] Seyed Ali Aghayan. Dariush Sardari. Seyed Rabii Mahdi Mahdavi. Mohammad Hasan Zahmatkesh An Inverse Problem of Temperature Optimization in Hyperthermia by Controlling the Overall Heat Transfer Coefficient, *Journal of Applied Mathematics*, **2013**: (2013), 1–9.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. СОПУЕВ¹, Н.А. ЖЭЭНБАЕВ²

^{1,2}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

¹sopuev@mail.ru, ²njeenbaev@gmail.com

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, -h_1 < y < h\}$ ($\ell, h, h_1 > 0$) рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxxx} + a_1(x, y)u_{xx} + b_1(x, y)u_x + c_1(x, y)u + u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xxxy} + a_2(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_x + c_2(x, y)u, & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (1)$$

По классификации работы [1], уравнение (1) в области D_1 является уравнением параболического типа, так как уравнение характеристик имеет четырехкратную действительную характеристику: $y = \text{const}$, а в области D_2 принадлежит гиперболическому типу, так как уравнение характеристик имеет трехкратную действительную характеристику $y = \text{const}$ и одну простую действительную характеристику $x = \text{const}$. Уравнение (1) в области D является уравнением смешанного парабола-гиперболического типа четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}_i) \cap C^1(D_i) \cap [C^{4+0}(D_2) \cup C^{3+1}(D_2)]$ ($i = 1, 2$), удовлетворяющую в области $D \setminus (y = 0)$ уравнению (1), краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad u_x(\ell, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u(0, y) = \chi_1(y), \quad u(\ell, y) = \chi_2(y), \quad u_x(0, y) = \chi_3(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0,$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = \alpha(x)u(x, +0) + \gamma(x), \quad u_y(x, -0) = \beta(x)u_y(x, +0) + \delta(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

где

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &\in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1), \quad b_1(x, y) \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \quad c_1(x, y) \in C(\overline{D}_1), \\ a_2(x, y) &\in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), \quad b_2(x, y) \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \quad c_2(x, y) \in C(\overline{D}_2), \\ \varphi_i(y) &\in C[0, h] \quad (i = \overline{1, 4}), \quad \chi_j(y) \in C[-h_1, 0] \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x) \in C[0, \ell]. \end{aligned}$$

Введем обозначения: $u(x, +0) = \tau_1(x)$, $u(x, -0) = \tau_2(x)$, $u_y(x, -0) = \nu_1(x)$, $u_y(x, +0) = \nu_2(x)$, $0 \leq x \leq \ell$. Функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ однозначно определяются из системы уравнений:

$$\tau_1^{(4)}(x) + a_1(x, 0)\tau_1''(x) + b_1(x, 0)\tau_1'(x) + c_1(x, 0)\tau_1(x) + \nu_1(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$\nu_2''(x) + a_2(x, 0)\tau_2''(x) + b_2(x, 0)\tau_2'(x) + c_2(x, 0)\tau_2(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$\tau_1(x) - \alpha(x)\tau_2(x) = \gamma(x), \quad \nu_1(x) - \beta(x)\nu_2(x) = \delta(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Решение задачи 1 в области D_2 определяется методом функции Римана:

$$\begin{aligned} u(x, y) = \tau_2(x) - \int_0^x v_{\xi\xi\xi}(x, y; \xi, 0)\tau_2(\xi)d\xi + \int_0^y [v(x, y; 0, \eta)\chi_4'(\eta) - \\ v_{\xi}(x, y; 0, \eta)\chi_3'(\eta) + a_2(0, \eta)v(x, y; 0, \eta)\chi_3(\eta) + v_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\chi_1'(\eta) - \\ a_2(0, \eta)v_{\xi}(x, y; 0, \eta) + [a_{2\xi}(0, \eta) - b_2(0, \eta)]v(x, y; 0, \eta)]d\eta, \end{aligned}$$

где $v(x, y; \xi, \eta)$ функция Римана, определяемая как решение следующей задачи:

$$v_{\xi\xi\xi} + (a_2v)_{\xi\xi} - (b_2v)_\eta + c_2v = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} v(x, y; \xi, \eta) |_{\xi=x} = 0, & y \leq \eta \leq 0, \\ v_\xi(x, y; \xi, \eta) |_{\xi=x} = 0, & y \leq \eta \leq 0, \\ v_{\xi\xi}(x, y; \xi, \eta) |_{\xi=x} = 1, & y \leq \eta \leq 0, \\ v(x, y; \xi, \eta) |_{\eta=y} = \frac{1}{2}(\xi - x)^2, & 0 \leq \xi \leq x. \end{cases} \quad (3)$$

Методом интегрирования разрешимость задачи (2), (3) сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$v(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \int_x^\xi d\xi_1 \int_y^\eta K(x, \xi, \xi_1) v(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1,$$

которая однозначно разрешима, где $K(x, \xi, \xi_1) = -a_2(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1)b_2(\xi_1, \eta_1) + \frac{1}{2}(\xi - \xi_1)^2 c_2(\xi_1, \eta_1)$.

Построение решения задачи 1 в области D_1 рассмотрена в работе [2].

Функция Римана для уравнения третьего порядка вида

$$u_{xxy} + a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u_y + d(x, y)u = 0$$

построена в работах [3], [4]. Краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа третьего и четвертого порядков с двумя независимыми переменными рассмотрены в работах [5] - [7].

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, краевые условия, интегральные условия склеивания, единственность, существование, функция Грина, функция Римана, интегральные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джураев Т.Д., Сопуев А. *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка*, (2000) Ташкент, Фан
- [2] Cattabriga L. *Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova (1958). tome 28. P. 376-401.
- [3] Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах, *Дифференц. уравнения*. (1982), том 18, номер 4, С. 689–699
- [4] Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка, *Известия вузов. Математика*. (1999), N 10. С. 73–76.
- [5] Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа*, Фан, Ташкент (1986).
- [6] Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа*, Наука, Москва (2016).
- [7] Sopuev A., Zheenbaev N. A. Boundary value problems for a mixed fourth-order parabolic-hyperbolic equation with discontinuous gluing conditions, *Herald of Institute of Mathematics of NAS of KG*, (2023) №1. P. 3-11.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.А. СУЛТАНОВ¹, В.Е. МИСИЛОВ², Б.Т. САРСЕНОВ³

^{1,3}Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

^{1,3}Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан,
Казахстан

²Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург,
Россия

²Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

sultanov.ma77@gmail.com

В данной работе рассматривается двумерное эллиптическое уравнение

$$\begin{cases} u_{x_1x_1}(x_1, x_2) + u_{x_2x_2}(x_1, x_2) = S(x_1, x_2), & a < x_1 < b, c < x_2 < d, \\ u(a, x_2) = S_1(x_2), & c \leq x_2 \leq d, \\ u(b, x_2) = S_2(x_2), & c \leq x_2 \leq d, \\ u(x_1, c) = S_3(x_1), & a \leq x_1 \leq b, \\ u(x_1, d) = S_4(x_1), & a \leq x_1 \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Когда функция $S(x_1, x_2)$ задана, прямая задача нахождения неизвестной функции $u(x_1, x_2)$ из уравнения (1) является классической краевой задачей. Для ее решения ранее был построен алгоритм, основанный на применении конечно-разностной схемы [1] и методе матричной прогонки для решения СЛАУ с блочно-трехдиагональной матрицей [2].

Обратная задача нахождения неизвестной правой части $S(x_1, x_2)$ является существенно некорректной задачей с неединственным решением. Для достижения единственности решения в работе [3] предлагается наложить следующие условия на правую часть. Правая часть представляется как сумма известного однородного фона и неизвестного возмущения в виде произведения разделенных по пространственным переменным компонент $S(x_1, x_2) = 1 + f(x_1)g(x_2)$. Кроме того, задается дополнительная информация в виде переопределенных краевых условий: доступны измерения и функции и потока на границе области. В таком случае задачу нахождения правой части можно свести к последовательному уточнению правой части из уравнения для поля невязки $e(x_1, x_2)$

$$e_{x_1x_1}(x_1, x_2) + e_{x_2x_2}(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) - \hat{f}(x_1)\hat{g}(x_2), \quad (2)$$

где $\hat{f}(x_1)$ и $\hat{g}(x_2)$ — приближенные значения неизвестных функций на текущей итерации. Задачу коррекции приближенных значений можно свести к набору прямых краевых задач.

В настоящей работе предлагается численный алгоритм решения обратной задачи и эффективная программная реализация данного алгоритма. Проводятся численные эксперименты с зашумленными входными данными (краевыми условиями).

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект № AP23487362).

Ключевые слова: эллиптические дифференциальные уравнения, обратные задачи, метод конечных разностей, метод прогонки.

2020 Mathematics Subject Classification: 35J25, 65N06

ЛИТЕРАТУРА

[1] Samarskii A. A., Nikolaev E. S. *Numerical Methods for Grid Equations, Volume I: Direct Methods*, Birkhäuser: Basel, Switzerland (1989).

[2] Akimova E.N., Sultanov M. A., Misilov V. E., Nurlanuly Y. Parallel matrix sweep method for solving two-dimensional fractional diffusion problem, in: AIP Conference Proceedings, AIP Publishing (2025) **3315**, Art. no. 130001.

[3] Hamad A., Tadi M. A numerical method for inverse source problems for Poisson and Helmholtz equations, *Phys. Letters A*, **380** (2016), 3707–3716.

ГРАВИМЕТРИЯНЫҢ ЕКІӨЛШЕМДІ КЕРІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕБІНДЕГІ ФУНКЦИОНАЛДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Н.Е. ТОҚТАҒҰЛОВ

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

nurhattoktagulov@gmail.com

Жер бетіндегі гравитациялық өрісті өлшеу арқылы жасырын жерасты нысандарының орналасуы мен өлшемдерін анықтауға бағытталған геофизиканың геометриялық кері есептері ғылыми-практикалық мәселелердің маңызды класы болып табылады. Бұл есептер қисынсыз (некорректті) қойылған болып табылады және оларды орнықты сандық шешу үшін арнайы математикалық аппаратты құруды талап етеді.

Тік қимадағы гравитациялық өрістің екіөлшемді моделі қарастырылады, ол Ω тіктөртбұрышты аймағын білдіреді. $u(x, y)$ гравитациялық потенциалының таралуы аймақ шекарасындағы нөлдік Дирихле шекаралық шарттарымен $-\Delta u(x, y) = 4\pi G\rho(x, y)$ Пуассон теңдеуімен сипатталады. Орта ішінде белгілі қосымша тығыздыққа ие ρ_0 болатын тіктөртбұрыш пішінді аномальды нысан бар деп ұйғарылады, алайда оның $Y = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ векторымен берілетін шекараларының дәл координаталары белгісіз. Қосымша ақпарат ретінде жер бетінде ($y = 0$) потенциалдың қалыпты (нормаль) туындысын өлшеу нәтижелері берілген: $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = z(x)$.

Есеп потенциал туындысының есептелген мәндерінің өлшенген деректерден орташа квадраттық ауытқуын минималдауға келтіріледі:

$$J(Y) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) - z(x) \right)^2 dx \rightarrow \min_Y \quad (1)$$

Бұл түрдегі есептер әдетте функционалдың туындысын есептеуді көздейтін градиенттік әдістермен шешіледі. Алайда, бұл жағдайда келесідей нәтиже орын алады.

Теорема. Тіктөртбұрышты біртекті еместік моделінің $J(Y)$ ауытқу функционалы үшін рұқсат етілген параметрлер аймағының барлық нүктелерінде кез келген $h \in \mathbb{R}^4$ бағыты бойынша шекті туынды бар. $J'(Y; h)$ туындысының мәні вариация векторы компоненттерінің модульдерін $|h_i|$ айқын қамтитын формуламен анықталады, мұндағы $\psi(x, y)$ функциясы сәйкес түйіндес (сопряженная) шекаралық есептің шешімі болып табылады.

Функционалдың туындысы h бағытына қатысты сызықты емес болғандықтан, функционалдың Гато бойынша туындысы жоқ. Демек, стандартты градиенттік әдістерді қолдану мүмкін емес: функционалдың тегіс еместігіне байланысты градиенттік алгоритмді жазу мүмкін емес.

Қойылған кері есепті сандық шешу үшін тегіс емес оңтайландыру аппаратын тарту қажет. Одан әрі зерттеулер функционалдың субдифференциалын құруға және субградиенттік әдісті тәжірибелік бағдарламалық іске асыруға бағытталады.

Кілтті сөздер: гравиметрияның кері есебі, тегіс емес оңтайландыру, бағыт бойынша туынды, субдифференциал.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Ш.Р. ФАРМОНОВ

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

farmonovsh@gmail.com

Пусть Ω — односвязная область плоскости xOy , ограниченная отрезками

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \\ \overline{DO} &= \{(x, y) : y = 0, -1 \leq x \leq 0\}, \\ \overline{EO} &= \{(x, y) : x = 0, -1 \leq y \leq 0\},\end{aligned}$$

и дугами

$$BD = \{(x, y) : \sqrt{-x} + \sqrt{y} = 1, x < 0, y > 0\}, \quad EA = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1, x > 0, y < 0\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \\ \Omega_j &= \Omega \cap \{(x, y) : \kappa_j(x + y) > 0, \sigma_j x + \sigma_{j-1} y < 0\}, \\ G &= \Omega \setminus \{xy(x + y) = 0\},\end{aligned}$$

где $\kappa_j = (-1)^{[(j-1)/2]}$, $\sigma_j = (1 + (-1)^j)/2$, $j = \overline{1, 4}$, а $[\cdot]$ — целая часть. В области G рассматривается уравнение

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} < (1/2), \quad (1)$$

имеющее две линии вырождения: $x = 0$ и $y = 0$. Уравнение (1) является эллиптическим в области Ω_0 , гиперболическим в областях Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 и Ω_4 . Линия изменения типа $y = 0$ (при $x > 0$) является огибающей семейства характеристик, что делает уравнение (1) уравнением смешанного типа второго рода. Аналогичная ситуация имеет место и для линии $x = 0$ (при $y > 0$).

Задача $F^{(4)}$. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) в области Ω_0 есть регулярное решение уравнения (1);
- 2) в областях Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 и Ω_4 есть обобщенное решение уравнения (1) из класса $R_2[1]$;
- 3) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha u_y(x, y) = - \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(x, y), \quad 0 < x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (-x)^\alpha u_x(x, y) = - \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y), \quad 0 < y < 1$$

- 4) удовлетворяет краевым условиям $u(x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \overline{AB}$;

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(x, y) + m \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(-x, y) = g_1(x), \quad 0 < x < 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y) - m \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, -y) = g_2(y), \quad 0 < y < 1;$$

$$u \left[x, - (1 - \sqrt{x})^2 \right] - u \left[(1 - \sqrt{x})^2, -x \right] = p_1(x), \quad (1/4) \leq x \leq 1;$$

$$u \left[- (1 - \sqrt{y})^2, y \right] - u \left[-y, (1 - \sqrt{y})^2 \right] = p_2(y), \quad (1/4) \leq y \leq 1,$$

где $\varphi(x, y), g_j(t), p_j(t)$ — заданные непрерывные функции, $m = \pm 1$ и $p_j(1/4) = 0$, $j = \overline{1, 2}$.

Теорема 1. Пусть заданные функции удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x, y) = [x(1-x)]^\varepsilon \tilde{\varphi}_1(x)$, $\tilde{\varphi}_1(x) \in C[0, 1]$, $\varepsilon > 1 + \alpha$;
2. $g_j(t) = |t|^\delta \tilde{g}_j(t)$, $\tilde{g}_j(t) \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, $\delta \geq 1 + \alpha$, $j = \overline{1, 2}$;
3. $p_j(t) = [t - (1/4)]^{\gamma_1} (1-t)^{\gamma_2} \tilde{p}_j(t)$, $\tilde{p}_j(t) \in C[(1/4), 1]$, $\gamma_1 \geq 2 - 4\beta$, $\gamma_2 \geq 4$, $j = \overline{1, 2}$.

Тогда задача $F^{(4)}$ имеет единственное решение.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа второго рода, линия вырождения, сингулярное интегральное уравнение.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12

ЛИТЕРАТУРА

[1] Исамухамедов С.С., Орамов Ж. О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения, *Дифференциальные уравнения*, **18:2** (1982), 324–334.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

К.С. ФАЯЗОВ¹, Я.К. ХУДАЙБЕРГАНОВ²

¹Туринский Политехнический Университет в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

²Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

¹kudratillo52@mail.ru, ²komilyashin@mail.ru

Изучение граничных задач с нелокальными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных обусловлено рядом научных и прикладных факторов. Интерес к таким задачам связан, с одной стороны, с необходимостью дальнейшего развития общей теории граничных задач, а с другой - с их применением в различных областях, таких как физика плазмы, процессы влаг переноса, теория периодических волноводов, а также решение обратных задач.

Нелокальные граничные задачи для различных классов уравнений получили широкое освещение в работах многих исследователей. В частности, значительный вклад в развитие данного направления внесли А.А. Дезин[1], В.А. Ильин, М.А. Наймарк, Е.И. Моисеев, К.Б. Сабитов[2], С.Г. Крейн и Г.И. Лаптев[3], О.А. Репин, А.И. Кожанов, С.П. Шишатский, Н.И. Пташник[4] и другие авторы, чьи исследования способствовали формированию теоретических основ и развитию методов анализа таких задач.

В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа второго порядка с двумя линиями вырождения. Этим вопросам посвящены работы З.А. Нахушевой[5], К.Б. Сабитова и В.А. Новиковой, П.Е. Захарова, К.С. Фаязов, И.О. Хажиев и других исследователей.

Следует отметить, что некорректные нелокальные задачи для уравнений смешанного типа до настоящего времени изучены сравнительно мало, что подчёркивает актуальность дальнейших исследований в данном направлении. Исследуемая задача, вообще говоря, относится к классу некорректно поставленных задач математической физики. В частности, в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных, что является одной из характерных особенностей некорректных задач. Кроме того, при рассмотрении подобных задач возникает проблема малых знаменателей, то есть решение существует и является единственным не для всех исходных данных.

Некорректные краевые задачи были изучены рядом известных исследователей, включая М.М. Лаврентьева, А. Л. Бухгейма, В. Исакова, М. Клибанова, К. С. Фаязова. Работы К. С. Фаязова[6], К. С. Фаязова и И. О. Хажиева[7], И. О. Хажиева[8], К. С. Фаязова и Я. К. Худайбергана были посвящены построению приближённых решений для неклассических уравнений.

В настоящей работе доказаны теоремы о единственности решения и условной устойчивости на множестве корректности, что позволяет уточнить границы применимости полученных результатов и выявить условия корректной постановки задачи.

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, y, t)$ являющуюся в области $D = \Omega \times Q \setminus \{x = 0, y = 0\}$ где $\Omega = \{(x, y) \in (-\pi; \pi) \times (-\pi; \pi)\}$, $Q = \{0 < t < T, T < \infty\}$ решением уравнения

$$u_{tt}(x, y, t) + \operatorname{sgn} x u_{xx}(x, y, t) + \operatorname{sgn} y u_{yy}(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются следующие условия:
нелокальные

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 u(x, y, 0) + \beta_1 u(x, y, T) &= \varphi(x, y), \\ \alpha_2 u_t(x, y, 0) + \beta_2 u_t(x, y, T) &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\}, |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2., x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

границные

$$u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0, t \in \bar{Q}, \quad (3)$$

и условия склеивания

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial x^i} \Big|_{x=-0} &= \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial x^i} \Big|_{x=+0}, (y, t) \in [-\pi; \pi] \times \bar{Q}, \\ \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial y^i} \Big|_{y=-0} &= \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial y^i} \Big|_{y=+0}, (x, t) \in [-\pi; \pi] \times \bar{Q}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $(i = \overline{0, 1})$ и $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$, $\psi(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$.

Ключевые слова: нелокальная задач, уравнения смешанного типа, дифференциальные уравнения, априорная оценка, единственность, устойчивость, некорректные задачи, граничные условия, условная устойчивость.

2020 Mathematics Subject Classification: 65N20, 47A52

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дезин А.А. *Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия*, Изв. АН СССР. Сер. матем., Москва (1967).
- [2] Сабитов К.Б., Новикова В. А. Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Изв. вузов. Матем.*, **6:2** (2016), 61–72.
- [3] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве, *II, Дифференц. уравнения.*, **2:7** (1966), 919–926.
- [4] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, *Физика сплошных сред*, Киев(1984).
- [5] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *II, Дифференц. уравнения*, **8** (2009), 1199–2003.
- [6] K. S. Fayazov K.S, Khudayberganov Y.K. An ill-posed boundary value problem for a mixed type second-order differential equation with two degenerate lines, *Mathematical Notes of NEFU*, **30:1** (2023), 50–62.
- [7] K. S. Fayazov K.S, Khajiev I.O. Nonlocal boundary value problem for a system of mixed type equations with a line of degeneration, *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, **4:1** (2021), 17–31.
- [8] K. S. Fayazov K.S, Khajiev I.O. Nonlocal boundary value problems for the second order mixed type differential equation, *Uzbek Mathematical Journal*, **2:4** (2019), 68–80.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ю.Р. ШПАДИ

Институт математатики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

yshpadi@gmail.com

В области $D = \{(x, t) | 0 < x < \alpha(t), 0 < t < \infty, \alpha(0) = 0\}$ найти функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(D)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad (1)$$

и двум краевым условиям на переменной границе $x = \alpha(t)$:

$$u(\alpha(t), t) = \varphi(t), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\alpha(t)} = \psi(t). \quad (3)$$

Полагаем, что функции $\alpha(t) \in C^2(0, \infty)$, $\varphi(t) \in C^2(0, \infty)$, $\psi(t) \in C(0, \infty)$ заданы и удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0, \quad (4)$$

$$A_\alpha \exp(-\sigma_\alpha t) \leq \alpha'(t) \leq B_\alpha, \quad (5)$$

$$|\varphi(t)| \leq A_\varphi \exp(\sigma_\varphi t), \quad |\psi(t)| \leq A_\psi \exp(\sigma_\psi t), \quad (6)$$

где $A_\alpha, B_\alpha, \sigma_\alpha, A_\varphi, \sigma_\varphi, A_\psi, \sigma_\psi$ – положительные постоянные.

Ввиду неравенства (5) функция $\alpha(t)$ строго монотонно возрастает. Поэтому, разрешая уравнение $x = \alpha(t)$ относительно аргумента t , получим монотонно возрастающую функцию $t = \beta(x)$, для которой выполнены условия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = 0, \quad \beta(x) \in C^2(0, x_\infty), \quad (7)$$

где x_∞ есть конечный или бесконечный предел $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$.

Полагая, что $u(x, t) \equiv 0$, если $t < \beta(x)$, и применяя к уравнению (1) преобразование Лапласа

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt = \int_{\beta(x)}^\infty e^{-pt} u(x, t) dt, \quad (8)$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(x, p)}{\partial x^2} - \frac{p}{a^2} \bar{u}(x, p) = f(x, p), \quad (9)$$

в котором

$$f(x, p) = - \left[\frac{p}{a^2} \varphi(\beta(x)) + \psi(\beta(x)) \beta'(x) \right] \exp(-p\beta(x)) - \frac{d}{dx} [\varphi(\beta(x)) \exp(-p\beta(x))]. \quad (10)$$

Доказывается, что единственным решением уравнения (9), которое принадлежит классу изображений Лапласа сразу для всех $x \in (0, x_\infty)$, является функция

$$\bar{u}(x, p) = -\frac{a}{\sqrt{p}} \int_x^{x_\infty} \left[\frac{1}{a^2} \varphi(\beta(\xi)) + \psi(\beta(\xi)) \beta'(\xi) \right] e^{-p\beta(\xi)} \sinh \left(\frac{\sqrt{p}}{a} (\xi - x) \right) d\xi +$$

$$+ \int_x^{x_\infty} \varphi(\beta(\xi)) \beta'(\xi) e^{-p\beta(\xi)} \cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi - x)\right) d\xi. \quad (11)$$

Тогда решение задачи (1) – (3) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \bar{u}(x, p) dp, \quad \sigma > 0. \quad (12)$$

В случае $\alpha(t), \varphi(t), \psi(t) \in C^\infty(0, \infty)$ оригинал $u(x, t)$ может быть выражен функциональным рядом

$$u(x, t) = \varphi(t) + \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{2k} (2k+2)!} \frac{d^k}{dt^k} \left[\varphi'(t) (\alpha(t) - x)^{2k+2} \right] - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{2k} (2k+1)!} \frac{d^k}{dt^k} \left[\psi(t) (\alpha(t) - x)^{2k+1} \right].$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31714735).

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, граничные условия, обратные задачи, преобразование Лапласа.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A22, 35K20, 35R30, 35R37

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шпади Ю.Р. Обратная задача для уравнения теплопроводности в области с переменной границей, *Известия АН Республики Казахстан (серия физико-математическая)*, 5 (1992), 60–66.
- [2] Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. *Некорректные обратные задачи теплопроводности: пер. с англ.* М.: Мир (1989), 312с.
- [3] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск (2009), 457с.

Comparative Analysis and Practical Guidelines for Solving Time-Fractional Hyperbolic Equations with Memory

Zh.A. ABDIRAMANOV¹, A.S. BERDYSHEV²

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan

a.janars@gmail.com

This paper presents a comparative analysis of three numerical methods for solving the time-fractional hyperbolic equation with a memory kernel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t \kappa(t-s) \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) ds = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

where $\kappa(t) = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) is the weakly singular kernel of Caputo type.

The core contributions include: 1. Development of fully discrete schemes on the Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL) grid for the Finite Difference Method (FDM), Finite Element Method (FEM), and Chebyshev Spectral Method. 2. Integration of a fast sum-of-exponentials (SOE) algorithm to evaluate the historical convolution, reducing the complexity from $O(N_t^2)$ to $O(N_t N_e)$. 3. Rigorous proof of unconditional stability in the energy norm and derivation of spatiotemporal convergence estimates $O(\Delta t^{2-\alpha} + N^{-m})$.

Numerical experiments confirm the theoretical predictions. The Spectral Method achieves exponential accuracy for smooth solutions. The SOE algorithm delivers up to $16.6\times$ speedup at $N_t = 1024$. Based on these findings, we provide practical guidelines for method selection: FDM for rapid prototyping, FEM for complex domains, and Spectral methods for high-fidelity studies.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22683307).

Keywords: wave equation with memory, Caputo fractional derivative, finite difference method, finite element method, spectral method.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11, 65M06, 65M60, 65M70

References

- [1] Jiang S., Zhang J., Zhang Q., Zhang Z. Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations, *Commun. Comput. Phys.*, **21**:3 (2017), 650–678.
- [2] Shiyapov K., Abdiramanov Zh., Baishemirov Zh., Berdyshev A. An implicit difference scheme for a mixed hyperbolic-type problem with memory, *Lobachevskii J. Math.*, **45**:1 (2024), 569–577.

Optimization of Neural Network Models for Biometric Identification on Edge IoT Devices

Z. ARMANKYZY¹, M.E. MANSUROVA², T.S. SARSEMBAYEVA³

^{1,2,3}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹zerearmankyzy05@gmail.com, ²mansurova.madina@gmail.com,

³sarsembayeva.talshyn@gmail.com

This study is motivated by the growing demand for secure, contactless, and low-latency biometric identification in environments where computation and energy are constrained, such as edge IoT deployments. While face recognition has become widely adopted, it remains vulnerable to presentation attacks (e.g., printed photos, replay videos, deepfakes), and single-modality systems can degrade under illumination changes and distribution shift. To address these limitations, the paper investigates a multimodal biometric pipeline that combines (i) facial embeddings enhanced with stereo-vision depth cues for liveness verification and (ii) palm-vein recognition from near-infrared imagery, leveraging subsurface anatomical patterns that are harder to spoof. The work further focuses on practical optimization for edge readiness by selecting an edge-suitable backbone (ResNet-50), applying metric learning with Triplet Loss to improve convergence and generalization, and deploying the system as a lightweight, containerized FastAPI service with JWT authentication and PostgreSQL storage for scalable real-world operation.

We consider biometric identification on edge IoT devices under limited compute, memory, and latency constraints. Let a subject be represented by two modalities: (i) a facial image stream I^f acquired by a stereo camera pair, and (ii) a near-infrared palm image I^p (850 nm) from which a palm ROI is extracted. The objective is to learn modality-specific embedding functions

$$z^f = f_{\theta_f}(I^f) \in \mathbb{R}^{128}, \quad z^p = g_{\theta_p}(\text{ROI}(I^p)) \in \mathbb{R}^{128}, \quad (1)$$

and a decision rule that performs (a) identity recognition and (b) liveness verification against spoofing (photo/video replay). For recognition, embeddings are compared using Euclidean distance, while liveness is assessed from stereo disparity statistics and depth cues. The system must be deployable as a lightweight service for real-time access control and eKYC-like scenarios, maintaining high accuracy and robustness to presentation attacks on constrained edge hardware.

We implement an edge-ready multimodal biometric pipeline that unifies three practical components:

1) **Face embedding + stereo-based passive liveness.** Facial embeddings z^f are computed via a pretrained ResNet-based model (using the `face_recognition` library) and stored in a PostgreSQL database. To mitigate photo/video spoofing, a stereo camera setup (two UVC USB cameras with a 7 cm baseline) is calibrated in OpenCV and used to compute disparity maps (StereobM/StereoSGBM). Depth is estimated by

$$\text{Depth} = \frac{f \cdot B}{d}, \quad (2)$$

and liveness is decided by disparity variance and nose–cheek depth difference, where live faces exhibit substantially higher variance and depth separation than spoofed samples. :contentReference[oaicite:1]index=1

2) **Palm-vein representation learning with Triplet Loss on ResNet-50.** Palm ROIs are extracted automatically (MediaPipe landmarks) and preprocessed via denoising (Gaussian/median filtering), morphological operations (dilation/erosion/opening/closing), binarization/thresholding, and skeletonization to enhance venous structures. A ResNet-50 backbone is selected for edge suitability and fine-tuned to learn discriminative 128-D embeddings using metric learning:

$$\mathcal{L}_{\text{triplet}} = \max(0, \|z_a - z_p\|_2^2 - \|z_a - z_n\|_2^2 + m),$$

with batch-all sampling and online hard-negative mining (learning rate 10^{-4} , margin $m = 0.2$, 50 epochs), improving inter-class separation and intra-class compactness in the embedding space.

3) **Edge deployment: FastAPI + JWT + Docker + PostgreSQL.** We deploy the full recognition service as containerized FastAPI endpoints for registration, authentication, verification, and template management, secured via JWT. Embeddings are persisted in PostgreSQL through SQLAlchemy (with an SQLAlchemy panel for monitoring and CRUD operations). The stack is designed for portability and scalable rollout (e.g., AWS instance) while keeping inference real-time on edge-class hardware.

We evaluate each modality and the integrated pipeline using: (a) face recognition performance in the 128-D embedding space (Euclidean distance), (b) stereo liveness discrimination using disparity variance and depth-difference metrics, and (c) palm-vein recognition on public NIR datasets (3920 images from 98 subjects, 80/20 split with subject-wise separation). For palm recognition, we compare CNN baselines (VGG16 vs. ResNet50) and report classification accuracy as well as embedding-space quality during Triplet Loss fine-tuning via intra-/inter-class distance statistics and loss convergence over epochs.

An edge-oriented biometric identification system benefits from combining external (face) and internal (palm-vein) traits, while stereo-based depth cues provide an interpretable and effective passive liveness mechanism against photo/video spoofing. Selecting an edge-suitable backbone (ResNet-50), adopting metric learning (Triplet Loss) to shape a discriminative embedding space, and deploying the pipeline via a lightweight Dockerized FastAPI backend with JWT and PostgreSQL collectively support reliable, scalable, real-time authentication for access control and smart security applications.

Keywords: biometrics, face recognition, palm vein recognition, stereo vision, liveness detection, edge IoT, ResNet-50, Triplet Loss, FastAPI, JWT, Docker, PostgreSQL.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T45, 68U10, 68T10

References

- [1] Ashton, K. That “Internet of Things” Thing. RFID J. 2009.
- [2] Face_Recognition. Simple Facial Recognition Library for Python. PyPI.
- [3] Goh, M. Contactless Knuckle, Palm Print and Vein Dataset. Kaggle, 2020.
- [4] Tome, P.; Marcel, S. On the Vulnerability of Palm Vein Recognition to Spoofing Attacks. ICB, 2015.
- [5] Deng, J.; Guo, J.; Yang, J.; et al. ArcFace: Additive Angular Margin Loss for Deep Face Recognition. IEEE TPAMI, 2022.

[6] Taigman, Y.; Yang, M.; Ranzato, M.; Wolf, L. DeepFace: Closing the Gap to Human-Level Performance in Face Verification. CVPR, 2014.

One Class of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the First Kind on a Semi-Axis

A. ASANOV¹, Z.A. KADENOVA², D.A. BEKESHOVA³

^{1,2,3}*Institute of Mathematics of NAS of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyzstan*

zuurakankadenova0@gmail.com

Inverse and ill-posed problems attract great interest in modern mathematical physics and analysis. The theory of such problems was developed by A.N. Tikhonov, M.M. Lavrent'ev, and V.K. Ivanov, who introduced new concepts of correctness and regularization methods. Integral equations of the first kind, in particular Fredholm and Volterra equations, often lead to ill-posed formulations.

In this paper, we consider a system of linear Volterra integral equations of the first kind on the semi-axis:

$$Ku \equiv \int_{-\infty}^t K(t, s) u(s) ds = f(t), \quad t \in (-\infty, a], \quad (1)$$

where $K(t, s) = (a_{ij}(t, s))_{i,j=1}^n$ is a given matrix kernel, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ is a known vector function, and $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ is the unknown vector function. The kernel satisfies the square integrability condition

$$\int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \|A(t, s)\|^2 ds dt < \infty,$$

where $\|\cdot\|$ denotes the Frobenius norm.

Using functional analysis and the method of nonnegative quadratic forms, we prove a uniqueness theorem for the solution of system (1) in a suitable class of functions. The main result establishes that under certain conditions on the kernel $K(t, s)$, the homogeneous equation $Ku = 0$ admits only the trivial solution, which implies the uniqueness of the solution of the original system.

The approach is based on reducing the system to an equivalent Volterra equation of the second kind with a positive definite operator, allowing the application of standard regularization techniques for ill-posed problems.

Keywords: Volterra integral equations of the first kind, semi-axis, uniqueness, ill-posed problems, regularizing operators.

2020 Mathematics Subject Classification: 45A05, 45B05, 45D05, 45Q05.

References

- [1] Tikhonov A.N. On methods for solving ill-posed problems, in: *Abstracts of Reports, International Congress of Mathematicians*, Moscow (1966).
- [2] Lavrent'ev M.M. *On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Publishing House of Sib. Department of the Academy of Sciences of the USSR, Novosibirsk (1962).
- [3] Ivanov V.K. About ill-posed tasks, *Differential Equations*, **4:2** (1968), 61–66.
- [4] Lavrent'ev M.M. On integral equations of the first kind, *Doklady of the Academy of Sciences of the USSR*, **127:1** (1959), 31–34.
- [5] Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI (1986).

Uniqueness for an Inverse Problem of Determining Order and Temporal Factor of the Source for Subdiffusion Equation

R.R. ASHUROV¹, M. YAMAMOTO²

¹*V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

²*The University of Tokyo, Tokyo, Japan*

¹ashurovr@gmail.com, ²myama@ms.u-tokyo.ac.jp

This paper addresses the inverse problem of simultaneously recovering the fractional order $\alpha \in (0, 1)$ and the time-dependent source factor $p(t)$ in the Cauchy problem for an evolution equation with a general self-adjoint operator A in a Hilbert space X . The overdetermination condition is given by the scalar product $(u(t), \psi)_X$ for $0 < t < T$, where $\psi \in D(A)$ is an arbitrary fixed element.

Uniqueness of the fractional order α is established independently of the specific form of the elliptic operator A and the source function $p(t)$. Furthermore, uniqueness of the factor $p(t)$ is proved not only under the trivial overdetermination $(u(t), \psi)_X = 0$ for all $t \in (0, T)$, but also when the function $t \mapsto (u(t), \psi)_X$ possesses sufficient smoothness.

The proof relies on a decomposition of the solution near $t = 0$ into a least smooth component and a smoother remainder.

Keywords: subdiffusion equation, the Caputo derivative, inverse problems.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11

Identification Parameter Problem for a Family Evolution Equations with Functional Term

A.T. ASSANOVA¹, A.P. SABALAKHOVA²

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan*

¹assanova@math.kz, ²sabalahova@mail.ru

On $S = [0, T] \times [0, Y]$, we consider the following problem for a family evolution equation with parameter and functional terms:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(t, y)w(t, y) + B(t, y)w(\alpha(t), y) + K_1(t, y)v(t, y) + F(t, y), \quad (1)$$

$$C_1(y)w(0, y) + C_2(y)w(T, y) + \int_0^T M(\tau, y)w(\tau, y)d\tau = d(y), \quad y \in [0, Y], \quad (2)$$

$$v(t, y) = \int_0^t K_2(\tau, y)w(\tau, y)d\tau, \quad (t, y) \in S. \quad (3)$$

Here $z(t, y) = \text{col}(z_1(t, y), z_2(t, y), \dots, z_n(t, y))$ and $v(t, y) = \text{col}(v_1(t, y), v_2(t, y), \dots, v_n(t, y))$ are the unknown functions, $(n \times n)$ matrices $A(t, y)$, $B(t, y)$, $K_1(t, y)$, $K_2(t, y)$ and n -vector $F(t, y)$ are continuous on S ; $\alpha(t) = \zeta_j$, if $t \in [\theta_j, \theta_{j+1})$, $\theta_j \leq \zeta_j < \theta_{j+1}$ for all $j = 0, 1, \dots, L-1$;

$(n \times n)$ matrices $C_1(y)$ and $C_2(y)$ and n -vector $d(y)$ are continuous on $[0, Y]$, $(n \times n)$ matrix $M(t, y)$ is continuous on S ; $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{L-1} < \theta_L = T$.

Evolution equations with parameter and functional terms arise in viscoelastic and rheological models, heat conduction with finite memory (Cattaneo models), biological population dynamics, neural networks with short-term memory, feedback and control processes with delays, signal processing and discrete-time sampling, hyperbolic PDE reductions.

First-order evolution equations with both types of memory arise in viscoelastic media with internal relaxation and delayed feedback, control processes with integral accumulation and sampled input, neural networks with synaptic kernel and discrete time shifts, biological systems with short-term averaging and lag effects, hyperbolic PDEs with simultaneous convolution and discrete delay, mathematical economics.

First-order evolution equations with parameter and functional terms have been studied by many authors for cases involving a term with a piecewise constant argument or an unknown parameter as a integral term [1]. The case where both are present in the equation has received little attention and remains an open question.

The aim of the present communication is to develop a constructive method for investigating and solving the boundary value problem, including an algorithm for finding a solution to problem (1)–(3) as well. Our approach based on Dzhumabaev parametrization method [2]: partitioning the domain, introducing functional parameters at interior lines, constructing the general solution in the sense Dzhumabaev [3].

Note that, first-order evolution equations with parameter and functional terms arise as auxiliary problems in the study of hyperbolic integro-differential equations with parameter and functional terms [4–5]. Therefore, the development of efficient methods for solving problems for first-order evolution equations with parameter and functional terms is a relevant and important issue in the theory of evolution equations [6–8].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP26194447 and No. BR31714735).

Keywords: family first-order evolution equations, parameter, generalized piecewise-constant argument, integral conditions, functional systems.

2020 Mathematics Subject Classification: 34H05, 34K10, 34K29, 34K35

References

- [1] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore (1993).
- [2] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.
- [3] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the BVPs, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **327**:1 (2016), 79–108.
- [4] Assanova A.T., Uteshova R. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type, *Chaos Solitons and Fractals*, **165**:12 (2022), 112816.
- [5] Abildayeva A., Assanova A.T., Imanchiyev A. A multi-point problem for a system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type as a neural network model, *Eurasian Mathematical Journal*, **13**:2 (2022), 8–17.
- [6] Assanova A.T. Initial boundary value problem for partial differential-algebraic equations with parameter, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **48**:5 (2025), 6180–6190.
- [7] Imanchiyev A.E., Assanova A.T. Evolution equations with temporary memory: nonlocal problems, analytical frameworks, and high-order PDE applications, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, First published: 19 February 2026, <https://doi.org/10.1002/mma.70609>.
- [8] Assanova A.T. Higher-Order PDEs With PCGAs: A Multi-Characteristic Approach, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, First published: 24 February 2026. <https://doi.org/10.1002/mma.70618>.

Optimal Control Problem for a Fifth-Order Partial Differential Equation

M.M. BABAEV

*Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University,
Tashkent, Uzbekistan*

babayevm12345@gmail.com

In this work we study the controllability for the following fifth order differential equation

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{\partial^5}{\partial t^3 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] U(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

the equation is given in the rectangular domain, $\Omega = \{0 < t < T, 0 < x < 1\}$, where T is given positive number, $f(t, x)$ is the control parameter chosen as a piecewise continuous function in Ω satisfying the condition

$$\|f\|_{\infty} \leq 1 \quad (2)$$

The equation is considered with the following initial and boundary conditions

$$U(t, 0) = U(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$U(0, x) = \varphi_1(x), \quad U_t(0, x) = \varphi_2(x), \quad U_{tt}(0, x) = \varphi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

where $\varphi_i(x)$ are given sufficiently smooth functions on the segment $[0, 1]$. We assume that $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Control Problem: To find a control function $f(t, x)$ satisfying the condition (2) such that any solution $U(t, x, f)$ of the problem (1), (3), (4) satisfies the condition $U(t_0, x, f) = 0$ for all $x \in [0, 1]$.

The main aim of this work is to show such control function exists in the class of sufficiently regular functions and we obtain upper bound for t_0 .

Notice that solvability of the problem (1), (3) (4) is studied in [1-3]. Similar equations have been extensively studied in the literature [4-5]. To our knowledge the control problem have not been studied yet.

Keywords: mixed problem, fifth order equation, unique solvability, parameter, stability.

References

- [1] T. K. Yuldashev and M. M. Babayev. *On Solvability of a Mixed Problem for a Fifth Order Linear Partial Differential Equations with Parameter.*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 10, pp. 5313–5327. Pleiades Publishing, Ltd., 2024.
- [2] A.A. Azamov, M.B. Ruziboyev. *The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations.*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 77 (2013) 220– 224.
- [3] T.K. Yuldashev, B.J. Kadirkulov, M.M. Babayev *Mixed problem for a nonlinear differential equation of the seventh order with identification source.* Baku Mathematical Journal. 2025, Vol. 4, No 2, PP. 209-230. <https://doi.org/10.32010/j.bmj.2025.15>
- [4] Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. *Mixed problem for a nonlinear differential equation of the seventh order with identification source.*, Problems in Continuum Mechanics with Mixed Boundary Conditions.
- [5] Assanova A.T. *Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions.*, Electron. J. Differ. Equ., 2017, 2017 (170), pp. 1-12.

Classification of Weak and Strong Ill-Posedness in Integral Geometry with Conical Integration Geometry

Akh.Kh. BEGMATOV¹, A.S. ISMOILOV², A.A. BOZOROV³

^{1,3}Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

²Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan

¹begmatov59@gmail.com, ²alisher8778@mail.ru, ³bozaxror9@gmail.com

Inverse problems of integral geometry over conical surfaces in $\mathbb{R}^3$ with singular power-type weights are studied. A sharp threshold condition separating weak and strong ill-posedness is established. For $\beta + \gamma$, stability estimates and regularization schemes are obtained. For $\beta + \gamma \geq 1$, the inverse operator is shown to be discontinuous in L^2 .

Let $C(x) \subset \mathbb{R}^3$ be a conical surface with vertex at x and fixed aperture angle. We consider the integral transform

$$Kf(x) = \int_{C(x)} f(y) |y - x|^{-\beta} dS(y)$$

and its anisotropic extension

$$Kf(x) = \int_{C(x)} f(y) |y - x|^{-\beta} |y_3 - x_3|^{-\gamma} dS(y), \quad \beta, \gamma \geq 0.$$

This model extends previously studied ray and Volterra-type transforms [4-6] to spatial conical integration geometry; detailed analysis of the three-dimensional case is given in [8].

The type of ill-posedness is completely determined by the parameter $\beta + \gamma$. Subcritical regime: $\beta + \gamma \geq 1$ In this case the operator K is weakly ill-posed. The a priori estimate

$$\|f\|_{L^2} \leq C \|Kf\|_{H^{\beta+\gamma}}$$

holds, and Tikhonov regularization [2] yields, for noisy data $Kf_\delta = Kf + \eta$,

$$\|R_\delta(Kf_\delta) - f\|_{L^2} \leq C_1 \delta^{\beta+\gamma} + C_2 \varepsilon \delta^{-(\beta+\gamma)}.$$

With optimal parameter choice, convergence of order $\varepsilon^{1/2}$ is achieved. Hence the inverse operator remains continuous between suitable Sobolev spaces, corresponding to weak ill-posedness in the sense of Lavrentiev [1-3]. Supercritical regime: $\beta + \gamma \geq 1$ There exists a normalized sequence $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ such that

$$\|Kf_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Thus the inverse operator is unbounded in any neighborhood of zero in L^2 , and continuous dependence on data fails. This corresponds to strong ill-posedness [1,3].

We obtain the sharp classification

$$\beta + \gamma < 1 \Rightarrow \text{weak ill-posedness,}$$

$$\beta + \gamma \geq 1 \Rightarrow \text{strong ill-posedness.}$$

Therefore, the total degree of singularity of the weight fully determines the instability type for conical integration geometry.

Keywords: integral geometry, conical surfaces, singular weights, inverse problem, weak ill-posedness, strong ill-posedness, regularization.

2020 Mathematics Subject Classification: 53C65, 45Q05, 47A52, 65R32

References

[1] Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematical Society, (1986).

- [2] Lavrentiev M.M., Saveliev L.Y. Linear Operators and Ill-Posed Problems: *Consultants Bureau*, (1995).
- [3] Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: *Theory and Applications*, De Gruyter (2011).
- [4] Begmatov A.Kh. Two classes of weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane, *Siberian Mathematical Journal*, **36**:2 (1995), 213–218.
- [5] Begmatov A.Kh. Volterra problems of integral geometry in the plane for curves with singularities, *Siberian Mathematical Journal*, **38**:4 (1997), 723–737..
- [6] Begmatov A.Kh. On an inverse problem for a ray transform with incomplete data, *Siberian Mathematical Journal*, **42**:3 (2001), 507–514.
- [7] Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane, *Uzbek Mathematical Journal*, **66**:1 (2022), 64–75.
- [8] Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. On stability and ill-posedness in the inverse problem of integral geometry over conical surfaces with singular weights, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **46**:11 (2025), 5540–5554.

Generative Neural Networks as Operators in Inverse Problems of Tumor Growth Dynamics

ZH. BEKTEMESOV¹, A. BALGABAY²

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*Bilkent University, Ankara, Turkey*

¹zholaman.bektemessov@kaznu.kz, ²bbalgabay.aisha@gmail.com

Prostate cancer is one of the most common types of cancer. In the later stages of the disease, tumor cells often spread to bone tissue, leading to bone metastases, which significantly worsens the prognosis, causes pain, increases the risk of pathological fractures, and significantly reduces the quality of life of patients [1]. The growth dynamics of bone metastases is a complex biological process, the prediction of which is a serious scientific and clinical problem, despite the many treatment options available today [2]. Therefore, the effectiveness of treatment largely depends on understanding the quantitative dynamics of tumor growth and predicting its behavior over time.

This article investigates the growth dynamics of tumor cells in the absence of therapy based on a hybrid approach combining a classical mathematical model and a modern method of generative time series forecasting using TimeGAN artificial intelligence. The mathematical model of the tumor growth as first-order logistic differential equation is used [3]:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C \left(1 - \frac{C}{C_{\max}} \right) - gC, \quad (1)$$

where $C(t)$ denotes the number of tumor cells at time t , α is the growth rate of tumor cells, $C_{\max}$ represents the carrying capacity of the environment, reflecting spatial and resource limitations of growth, and g is the natural cell death rate.

Experimental data on tumor growth dynamics without treatment over a period of 0 to 15 days were used to calibrate the model parameters. These data reflect the natural progression of the tumor process in the absence of therapeutic intervention and serve as a baseline scenario for further prediction (see Table 1 and Table 2).

After calibrating the parameters of the logistic model, the differential equation was numerically solved on the interval $t \in [0, 15]$. Although the experimental measurements were available only at discrete time points ($t = 0, 2, 5, 8, 12, 15$), the calibrated model allows reconstruction of tumor cell dynamics at intermediate time instants. In particular, additional values for the missing days ($t = 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14$) were obtained by substituting the estimated parameters into the differential equation and computing the corresponding numerical solution. This procedure provided

Table 1: Control data (without treatment)

Day t	Tumor cells C_k
0	24 864
2	112 059
5	577 111
8	1 614 381
12	2 601 221
15	4 253 605

Table 2: Calibrated ODE parameters

Parameter	Value
α	1.0001
g	0.50005
$C_{\max}$	8 814 147

a complete daily dataset on the interval 0–15 days. The reconstructed values are consistent with the observed control data, preserve the smooth logistic growth behavior implied by the model, and summarized in Table 3.

Table 3: Reconstructed tumor cell values (days 1–14)

t	1	3	4	6	7
$C(t)$	52 785	193 517	334 187	813 158	1 145 752
t	9	10	11	13	14
$C(t)$	1 818 858	2 049 234	2 308 790	3 064 577	3 610 471

After obtaining the full time series for days 0–15, the extended dataset was used as input for a generative time-series forecasting model based on TimeGAN. The neural network was trained to capture the temporal structure of tumor growth and to generate future trajectories beyond the observed interval.

The trained model was then employed to predict tumor growth dynamics on the interval $t \in [15, 30]$. The forecasting process required careful stabilization, as generative networks can exhibit instability during training and extrapolation due to the small time interval under study and the corresponding data available for those days. To ensure consistency and prevent artificial acceleration of growth, additional constraints were introduced, including the preservation of monotonicity and continuity at the transition point $t = 15$.

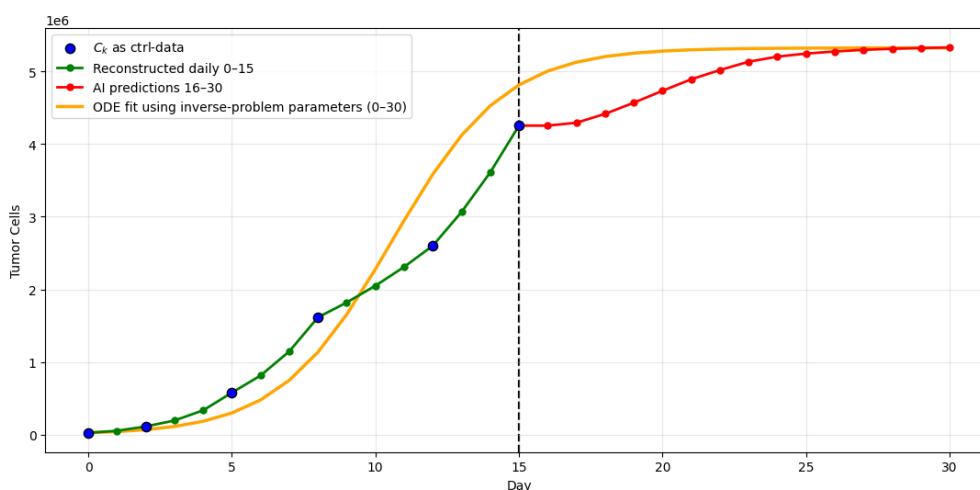


Figure 1: Tumor growth dynamics including control data, reconstructed values, AI predictions, and ODE fit with inverse-problem parameters.

As a result, Figure 1 illustrates the combined results of tumor growth without treatment, where the orange curve represents the solution of the logistic differential equation with parameters $\alpha = 1.01447$, $g = 0.507236$, $C_{\max} = 10648400$, obtained from the formulation of the inverse problem which was applied to the AI-predicted growth phase, repeating the protocol of the parameter

estimation process from [3]. Overall, the comparison demonstrates that the ODE solution with updated parameters closely follows the AI-generated prediction and preserves the structure of the growth model.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26103465).

Keywords: inverse problems, cancer growth, logistic model, TimeGAN, AI-assisted predictions.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A55, 65L09, 92B20

References

- [1] Tsuzuki S., Park S.H., Eber M.R., Peters C.M., Shiozawa Y. Skeletal complications in cancer patients with bone metastases, *International Journal of Urology*, **23:9** (2016), 751–760.
- [2] Casarin S., Dondossola E., et al. An agent-based model of prostate cancer bone metastasis progression and response to Radium223, *BMC Cancer*, **20:1** (2020), 605.
- [3] Bektemessov Z., Cherfils L., et al. On a data-driven mathematical model for prostate cancer bone metastasis, *AIMS Mathematics*, **9:12** (2024), 34785–34805.

Mathematical Modeling of Fakes Spread in Social Networks

Zh.M. BEKTEMESSOV¹, A.T. TURARBEK², U.K. SOTSIALOVA³,
A.A. NURGALI⁴

^{1,2,4}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

¹jolaman252@gmail.com, ²asem.turarbek@kaznu.edu.kz, ³ulpan_2017@mail.ru,

⁴azat.nurgali.2001@gmail.com

The rapid development of social media platforms has significantly accelerated the spread of misinformation and fake news, making the study of information diffusion processes an important scientific and social problem. False information can influence public opinion, cause panic, and destabilize social systems, particularly during global events such as pandemics or political crises. For instance, during the COVID-19 pandemic, numerous rumors concerning vaccination, artificial viruses, and public health measures spread widely through online platforms. From a mathematical perspective, rumor spreading demonstrates strong similarities to epidemic processes; therefore, many researchers apply epidemiological models to describe the dissemination of information. Classical rumor propagation models are typically based on the SIR framework, where the population is divided into several interacting groups according to their awareness of the rumor. However, such models often neglect important behavioral mechanisms such as forgetting and recalling information. In real social networks, individuals may temporarily stop spreading a rumor and later return to active dissemination after remembering it or encountering related content again.

In this study, an extended mathematical model for the spread of fake news in social networks is considered. The proposed model is based on the classical epidemic framework but includes an additional population group representing users who temporarily suspend the dissemination of information. The population is divided into four compartments: ignorants $S(t)$, spreaders $I(t)$, hibernators $H(t)$, and stiflers $R(t)$. Ignorants represent users who have not yet encountered the rumor, spreaders actively disseminate the information, hibernators are users who temporarily stop spreading the rumor due to forgetting but may later return to the spreading state, and stiflers are individuals who know the rumor but refuse to spread it further. The total population is assumed to be constant and normalized so that

$$S(t) + I(t) + H(t) + R(t) = 1 \quad (1)$$

The dynamics of the system are described by the following system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta kSI - \gamma kSI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta kSI + \eta kHI + \xi H - \alpha I - \delta kI(I + R), \\ \frac{dH}{dt} = \alpha I - \eta kHI - \xi H, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma kSI + \delta kI(I + R). \end{cases} \quad (2)$$

Here k denotes the average degree of a node in the social network, which reflects the average number of contacts between users. The parameter β represents the transmission rate of fake information, describing the probability that an ignorant individual becomes a spreader after contact with a spreader. The parameter γ characterizes the probability that an ignorant individual directly becomes a stifter without spreading the rumor. The parameter α denotes the forgetting rate, which determines the transition from the spreading state to the hibernating state. The parameter ξ represents the spontaneous recall rate, describing the probability that a hibernating user remembers the rumor and becomes a spreader again without external influence. The parameter η characterizes the activation of hibernators after contact with spreaders, while δ represents the rate at which spreaders become stiflers after interacting with other spreaders or stiflers. The spreading process begins with a small number of spreaders in the population, while the majority of users belong to the ignorant group.

To investigate the dynamics of the proposed SIHR model, numerical simulations were performed. The system of differential equations was solved using the fourth-order Runge–Kutta method implemented in MATLAB. The simulations were carried out for a network consisting of $N = 1000$ nodes under the assumption of homogeneous mixing of users. The numerical results demonstrate that the propagation of fake news follows a typical epidemic pattern. At the initial stage, the number of spreaders increases rapidly due to frequent contacts between spreaders and ignorant users. As the rumor spreads further and the number of ignorants decreases, the growth of spreaders slows down and eventually reaches a maximum. After this peak, the number of spreaders gradually declines as users lose interest in the rumor, forget it, or become stiflers who refuse to continue its dissemination. Meanwhile, the density of stiflers increases monotonically and approaches a steady state.

A detailed analysis of the model parameters reveals several important features of the information diffusion process. Increasing the refusal rate γ significantly reduces both the maximum number of spreaders and the duration of the rumor spreading process, indicating that early rejection of unreliable information can effectively limit misinformation propagation. The influence of memory mechanisms was also investigated by varying the parameters α , ξ and η . The numerical experiments show that memory effects decrease the peak number of spreaders but significantly prolong the lifetime of the rumor in the network. In particular, the spontaneous recall parameter ξ determines the long-term behavior of the system. When $\xi = 0$ a residual group of hibernating users persists indefinitely, whereas for $\xi > 0$ the density of hibernators eventually tends to zero. This result reflects the fundamental difference between spontaneous and contact-based reactivation mechanisms.

Thus, the proposed SIHR model provides a more realistic description of rumor spreading in social networks by incorporating behavioral mechanisms of forgetting and recalling information. The numerical simulations demonstrate that behavioral parameters strongly influence the dynamics of misinformation propagation. Increasing the refusal rate effectively suppresses the spread of fake news, while memory mechanisms reduce the peak intensity but prolong the persistence of rumors in the network. The developed model may be useful for analyzing information epidemics and for designing strategies aimed at mitigating the spread of misinformation in social media environments.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26197729).

Keywords: fake news, rumor spreading, mathematical modeling, SIHR model, social networks.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A55, 94-10

References

- [1] Zhao L., Wang J., Chen Y., Wang C., Cheng J., Cui H. SIHR rumor spreading model in social networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.*, **391**:7 (2012), 2444–2453.
- [2] Daley D.J., Kendall D.G. Epidemics and rumours, *Nature.*, **204** (1964), 11–18.
- [3] Nekovee M., Moreno Y., Bianconi G., Marsili M. Theory of rumour spreading in complex social networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.*, **374** (2007), 457–470.

Finite Element Method for the Brinkman Model

K. BORANBEK¹, A. KAZHYMKAN²

^{1,2}*Abai Kazakh Pedagogical National University, Almaty, Kazakhstan*

¹boranbek.kulzhamila@gmail.com, ²aiman0114kajmkan@gmail.com

The Brinkman model provides a unified mathematical framework for describing viscous incompressible flow in porous media when both permeability resistance and viscous shear effects are relevant[1-3]. It serves as an intermediate model between the Stokes equations and Darcy's law and is particularly suitable for media with moderate permeability[4]. Such models arise in filtration theory, petroleum reservoir simulation, and biological transport processes[5].

In this work, we develop and analyze a stable mixed finite element method for the stationary Brinkman problem. The main contribution of this work is the formulation of the Brinkman problem within a unified Sobolev space setting, accompanied by a rigorous analysis and boundedness of the bilinear forms and the verification of the discrete inf-sup condition. These properties guarantee well-posedness of the continuous and discrete problems and lead to optimal convergence estimates under minimal regularity assumptions. Special attention is devoted to the compatibility of discrete velocity–pressure spaces ensuring the discrete inf-sup condition.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) be a bounded domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega$. The stationary Brinkman system reads

$$-\mu\Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{k}\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

where $\mathbf{u}$ and p denote the velocity and pressure, $\mu > 0$ is the viscosity, $k > 0$ is the permeability, and $\mathbf{f}$ represents external body forces. Homogeneous Dirichlet boundary conditions are imposed on $\partial\Omega$.

To construct a numerical approximation, we consider the mixed variational formulation. Let

$$V = H_0^1(\Omega)^d, \quad Q = L_0^2(\Omega).$$

The weak formulation is to find $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ such that

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (3)$$

for all $(\mathbf{v}, q) \in V \times Q$, where

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx + \frac{\mu}{k} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

Let $V_h \subset V$ and $Q_h \subset Q$ be finite-dimensional subspaces satisfying the discrete inf-sup condition. The finite element approximation consists in finding $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ such that

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad (4)$$

for all $(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h$.

Theorem 1. Assume that the pair (V_h, Q_h) satisfies the discrete inf-sup condition. Then the discrete problem admits a unique solution and the stability estimate

$$\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{f}\| \quad (5)$$

holds with a constant independent of the mesh size h . Moreover, if the exact solution is sufficiently smooth, the optimal error estimate

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \quad (6)$$

is satisfied.

Keywords: Brinkman model, porous media flow, mixed finite element method, stability analysis.

2020 Mathematics Subject Classification: 76S05, 65N30, 35Q35.

References

- [1] Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Applied Scientific Research*, **1**:1 (1949), 27–34;
- [2] Burman E., Hansbo P. Stabilized finite element methods for the Brinkman problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**:35–36 (2007), 3659–3668;
- [3] Layton W., Schieweck F., Yotov I. Coupling fluid flow with porous media flow, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**:6 (2003), 2195–2218;
- [4] Oyarzúa R., Ruiz-Baier R. Inf-sup stability analysis for the Brinkman problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**:2 (2016), 698–720;
- [5] Egger H. A robust finite element method for the Brinkman problem, *Numerical Mathematics*, **115**:3 (2010), 441–465;

Sequence of meromorphic connections in Riemann sphere Some properties of k-differentials in Riemann surfaces

M.A. BOTIROV¹, M.S. KHOLIKOVA²

^{1,2}National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

¹botirovmuhammadqodir45@gmail.com, ²khalikovamadina9@gmail.com

In this work we study meromorphic connections on the Riemann sphere and the structure of their geodesics via local 1-form representations and residues. We also discuss the residue approximation problem, showing that connections with real residues can be approximated by ones with rational residues under the global residue constraint on $\mathbb{P}^1$.

Definition 1. A meromorphic connection on the tangent bundle TS of a Riemann surface S is a $\mathbb{C}$ -linear map $\nabla : \mathcal{M}_{TS} \rightarrow \mathcal{M}_S^1 \otimes \mathcal{M}_{TS}$ satisfying the Leibniz rule

$$\nabla(\tilde{f}\tilde{s}) = d\tilde{f} \otimes s + \tilde{f}\nabla s \quad (1)$$

for all $\tilde{s} \in \mathcal{M}_{TS}$ and $\tilde{f} \in \mathcal{M}_S$, where $\mathcal{M}_{TS}$ denotes the sheaf of germs of meromorphic sections of TS , while $\mathcal{M}_S$ is the sheaf of germs of meromorphic functions and $\mathcal{M}_S^1$ is the sheaf of meromorphic 1-forms on S .

Let (U_α, z_α) be a local chart for S , and ∇ a meromorphic connection on S . Then there exists $\eta_\alpha \in \mathcal{M}_S^1(U_\alpha)$, such that

$$\nabla(\partial_\alpha) = \eta_\alpha \otimes \partial_\alpha,$$

where $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ is the induced local generator of TS over U_α . We have

$$\eta_\beta = \eta_\alpha + \frac{1}{\xi_{\alpha\beta}} d\xi_{\alpha\beta} \quad (2)$$

on $U_\alpha \cap U_\beta$, where $\xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}$. In particular, if every representation is holomorphic then ∇ is a holomorphic connection. We say $p \in S$ is a pole for a meromorphic connection ∇ if p is a pole of η_α for some (and hence any) local chart U_α at p . If Σ is the set of poles of ∇ , then ∇ is a holomorphic connection on $S^0 = S \setminus \Sigma$. So we can define a notion of geodesic for ∇ on S^0 as in holomorphic connection.

Definition 2. A geodesic for a meromorphic connection ∇ on TS is a real curve $\sigma : I \rightarrow S^0$, with $I \subset \mathbb{R}$ an interval, such that $\nabla_{\sigma'} \sigma' \equiv 0$.

Let $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ be an atlas for S and $\sigma : I \rightarrow U_\alpha$, with $I \subset \mathbb{R}$ an interval, a smooth curve. Then σ is a geodesic for a meromorphic connection ∇ if and only if

$$(z_\alpha \circ \sigma)'' + (f_\alpha \circ \sigma) (z_\alpha \circ \sigma)'^2 \equiv 0, \quad (3)$$

where $\eta_\alpha = f_\alpha dz_\alpha$ is the local representation of ∇ on U_α .

Definition 3. The residue $\text{Res}_p \nabla$ of a meromorphic connection ∇ at a point $p \in S$ is the residue of any 1-form η_α representing ∇ on a local chart (U_α, z_α) at p . The set of all residues of ∇ is denoted by $\text{Res } \nabla := \{\text{Res}_p \nabla : p \in S\} \setminus \{0\}$.

Remark 4. Let $S = \mathbb{P}^1$ and let ∇ be a meromorphic connection on TS with set of poles $\Sigma = \{p_1, \dots, p_m\}$. Then the residues of ∇ satisfy the global constraint

$$\sum_{j=1}^m \text{Res}_{p_j}(\nabla) = -\deg(T\mathbb{P}^1) = -2. \quad (4)$$

In particular, for any approximating sequence $\{\nabla_k\}$ on $\mathbb{P}^1$ one must have $\sum_{j=1}^m \text{Res}_{p_j}(\nabla_k) = -2$ for all k (assuming the same pole set).

Let ∇ be a meromorphic connection on S with $\text{Res } \nabla \subset \mathbb{R}$ and let ∇_k be sequence of meromorphic connections on S with rational residues.

Definition 5. We say that ∇_k converges to ∇ in sense of residues if the residue of ∇_k at each pole $p \in S$ converges to the residue of ∇ at p , that is $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Res}_p \nabla_k = \text{Res}_p \nabla$.

Theorem 6. Let ∇ be a meromorphic connection on the Riemann sphere whose residues are real. Then there exists a sequence of meromorphic connection, with rational residues, converges to ∇ .

Funding: This work is supported by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan, State Grant No. FL-9524115114

Keywords: meromorphic connections, Riemann surfaces, k -differentials, tangent bundle, geodesics.

Mathematics Subject Classification: 32H50 · 34M03 · 34M40 · 37F99

References

- [1] Abate M. Bianchi F. A Poincaré–Bendixson theorem for meromorphic connections on Riemann surfaces, *Math. Z.*, (2016), 247–272.
- [2] Abate M. Tovena F. Poincaré–Bendixson theorems for meromorphic connections and homogeneous vector fields, *Journal of Differential Equations*, (2011), 2612–2684.
- [3] Bainbridge M., Chen D., Gendron Q., Grushevsky S., Möller M. Strata of k -differentials, *Algebraic Geometry*, (2019), 10.14231/AG-2019-011.
- [4] Rakhimov K.X. Flat structure of meromorphic connections on Riemann surfaces, *The Journal of Geometric Analysis*, (2020)
- [5] Shapiro B. Tahar G. On existence of quasi-Strebel structures for meromorphic k -differentials, *L'Enseignement Mathématique*, (2021), 187–207

Poisson-Type Equations for Thermoelastic Strains with Boundary Conditions

U.Z. DJUMAYOZOV¹, R.A. RAKHMONOVA², M.N. ABDIRAKHMONOVA³

*Samarkand Branch of Tashkent University of Information Technologies, Samarkand,
Uzbekistan*

djumayozov@bk.ru

The differential compatibility equations of thermoelastic strains in the absence of body forces have the form [1,2, 3]

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + K\theta_{,ij} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} T_{,ij}, \quad (1)$$

By multiplying equations (1) by δ_{ij} , we find that

$$\nabla^2 \theta + K\nabla^2 \theta = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} \nabla^2 T, \quad \text{or} \quad (1 + K)\nabla^2 \theta = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} \nabla^2 T, \quad (2)$$

Taking into account that $K = 1 + \frac{\lambda}{\mu}$, it can be found that

$$\nabla^2 \theta = \nabla^2 \left(\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2(\lambda + 2\mu)} T \right), \quad (3)$$

From the last equation, we obtain

$$\theta = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2(\lambda + 2\mu)} T + C. \quad (4)$$

Substituting (5) into (1), we obtain the following equation

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \frac{(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu(\lambda + 2\mu)} T_{,ij} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} T_{,ij}, \quad (5)$$

From the last equation (6), after simplification, we obtain the following Poisson equations with respect to the six components of the strain tensor

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha T_{,ij}, \quad (6)$$

with the corresponding three surface boundary conditions

$$(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{ij})n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \quad (7)$$

as well as three additional boundary conditions obtained from the equilibrium equations

$$(\lambda\theta_{,i} + 2\mu\varepsilon_{ij,j} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{ij,j} + X_i)|_{\Sigma} = 0. \quad (8)$$

Equations (7–9) represent a new boundary-value problem of thermoelasticity formulated in terms of strains. The boundary-value problem (7–9) is considered in the two-dimensional case for a rectangular domain, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} &= \alpha \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} &= \alpha \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} &= \alpha \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (9)$$

with the corresponding boundary conditions on the sides of the rectangle

$$\sigma_{ij}n_j|_{x=0,l_1} = \varphi_i(y), \quad \sigma_{ij}n_j|_{y=0,l_2} = \gamma_i(x), \quad (10)$$

as well as the “additional” conditions on the boundary of the rectangle

$$\begin{aligned} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right] |_{\Gamma} &= 0, \\ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right] |_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

In these equations, the temperature field $T(x, y)$, as a solution of the heat conduction equation, is considered known [2].

Keywords: thermoelasticity, boundary value problems, strains, stresses.

References

- [1] Turimov D., Khaldjigitov A., Djumayozov U., Wooseng K. *Formulation and Numerical Solution of Plane Problems of the Theory of Elasticity in Strains*, Mathematics. – 2024. – Vol. 12. – No. 71. – P. 28-42.
- [2] Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Khasanova Z., Rakhmonova R. *Numerical Solution of the Plane Problem of Thermo-Elasticity in Strains*, E3S Web of Conferences. – 2024. – Vol. 563. – 02019.
- [3] Djumayozov U. Z., Eshmanova N. F. *Coupled Problem on Thermo-Elasticity in Strains for an Isotropic Parallelepiped*, E3S Web of Conferences. – 2024. – Vol. 497. – 02016.

ANN Supporting Determination of Transient Heat Transfer Coefficients

I. FELDE¹, A. MOSAVI², M.E. MANSUROVA³

^{1,2}John von Neumann Faculty of Informatics, Obuda University, Budapest, Hungary

³Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹felde.imre@uni-obuda.hu, ²amir.mosavi@nik.uni-obuda.hu,

³madina.mansurova@kaznu.edu.kz

Understanding the Heat Transfer Coefficient (HTC) is essential for evaluating cooling media used in the immersion quenching of steels. This HTC characterizes the heat exchange between the immersed workpiece and the quenchant. Calculating the HTC involves solving an inverse heat transfer problem, which typically requires stochastic optimization algorithms. These algorithms use iterative processes and can be computationally demanding, often needing hundreds or thousands of iterations to find a solution. To reduce this computational burden, this paper introduces an initialization technique that employs a non-iterative approach to solve the inverse heat transfer problem. The proposed method uses an artificial neural network (ANN), specifically a multi-layer feedforward neural network trained with the backpropagation algorithm. A synthetic database with 150,000 records of heat transfer coefficients, determined as a function of temperature, is created for training the network. Unconventionally, the Fourier transform of the cooling curve is used as input for the inference system. Additionally, the performance of the neural network is compared with other conventional learning algorithms. Results show that when combined with stochastic algorithms, the ANN achieves comparable solutions in a shorter amount of time

Funding: This research was funded by the 2023-1.1.1-PIACI-FOKUSZ-2024-00011 project.

Keywords: ANN, Machine Learning, Heat Transfer Coefficient, FFT, IHCP.

2020 Mathematics Subject Classification: 34K29, 68T20, 35K20

References

- [1] Felde I. *Quenchants and Quenching Technology*, ASM International, USA (2024).
- [2] Alifanov O. *QuencInverse Heat Transfer Problems*, Springer, USA (1994).
- [3] Ozisik M.N. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, Taylor & Francis, USA (2000).
- [4] Aleksandar P., Stanic Molcer P. Predictive Machine Learning Approach for Complex Problem Solving Process Data Mining, *Acta Polytechnica Hungarica*, 1:19 (2022), 127–132.
- [5] Rosa L. Simencio Otero et al. Parallelized particle swarm optimization to estimate the heat transfer coefficients of a series of vegetable oils in comparison with typical fast petroleum quench oil quenchant, *ASM International*, 1:2 (2022), 260–271.
- [6] Fried Z., Szenasi S., Felde I. Prediction of objective function value for heat transfer coefficient function reconstruction by FWA, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., May 2019*, 1:2 (2019), 304–307.
- [7] Felde i. Artificial Intelligence Techniques and Biomimetic Methods Supporting Heat Treatment Processes, *Acta Polytechnica Hungarica*, 1:19 (2024), 317–329.

FWA Based Approach for Solution Complex IHCP Problems

I. FELDE¹, A. MOSAVI², M. MANSUROVA³

^{1,2}John von Neumann Faculty of Informatics, Obuda University, Budapest, Hungary

³Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹felde.imre@uni-obuda.hu, ²amir.mosavi@nik.uni-obuda.hu,

³madina.mansurova@kaznu.edu.kz

The methodology based on a stochastic optimization technique to solve complex inverse heat transfer problems is outlined. The quantitative characterization of heat transfer occurring during transient cooling processes is required for the accurate design of heat treatment operation. The heat transfer coefficient and/or heat flux as functions of local coordinates and time or surface temperature is commonly applied to describe the heat exchange. The calculation of these measures varies spatial and temporal is a challenging and highly computational consuming task. A general concept to calculate complex thermal boundary conditions based on thermal signals has been developed. The numerical approach is based on Fireworks Algorithm method. The applicability of the concept is tested on numerical examples and on real quenching experiments.

Funding: This research was funded by the 2023-1.1.1-PIACI-FOKUSZ-2024-00011 project.

Keywords: FWA, IHCP, Parallel Computing, Heat Transfer Coefficient

2020 Mathematics Subject Classification: 34K29, 68T20, 35K20

References

- [1] Felde I. *Quenchants and Quenching Technology*, ASM International, USA (2024).
- [2] Alifanov O. *QuencInverse Heat Transfer Problems*, Springer, USA (1994).
- [3] Ozisik M.N. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, Taylor & Francis, USA (2000).
- [4] Tan Y, Zhu Y. Fireworks Algorithm for Optimization, *International Conference in Swarm Intelligence*, 1:19 (2010), 355–364.
- [5] Fried Z., Szenasi S., Felde I. Reconstruction of the heat transfer coefficients by using hybrid (FWA + gradient) approach, *International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*, 1:2 (2018), 114–120.
- [6] Ardabili S., Mosavi A., Felde I. Machine Learning in Heat Transfer: Taxonomy, Review and Evaluation *2023 IEEE 17th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI)*, 1:2 (2023), 433–441.

Numerical Methods for Solving Non-Stationary Wave Tasks in Porous-Elastic Media

A.K. IBRAIMOVA¹, K.M. SHIYAPOV², A.M. SAKHABAYEVA³, M.A. RYSBAY⁴

^{1,2,3,4}*Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

akbota.ibraimova0303@mail.ru

This paper develops and analyzes numerical methods for non-stationary wave propagation in porous-elastic media described by the Biot model and thermodynamically compatible hyperbolic systems (HTCS). It describes step-grid difference schemes and their implementation in Matlab for modeling fast and slow longitudinal waves, as well as shear waves in saturated porous media. The paper presents the results of comparing the accuracy, stability, and computational costs of various approaches on model problems and demonstrates their applicability for seismic monitoring tasks.

Poroelastic media, such as fluid-saturated rocks and hydrocarbon reservoirs, are described by the Biot equations, which include the momentum balance for the solid matrix and pore fluid, as well as the stress-strain relationship. Unsteady wave processes in such media are characterized by the existence of fast and slow compressional waves, as well as shear waves with noticeable dissipation and frequency-dependent dispersion [1, 2]. The existence of a slow compressional wave, a key prediction of Biot's theory, was subsequently confirmed experimentally [3]. Correct numerical modeling of these waves requires robust and highly accurate methods adapted to hyperbolic systems of equations with dissipative terms. Current research in this area is aimed at developing computational approaches for complex media, for example, with dual porosity [4].

Thermodynamically compatible symmetric hyperbolic systems (HTCS) are a formalism for constructing models of multiphase and poroelastic media in the form of a first-order hyperbolic system satisfying conservation laws and an inequality for entropy [5, 6, 7]. The state vector includes the velocities of the solid and liquid phases, stress components, relative strains, and internal variables describing the structure of the pore space and pressure relaxation. This approach ensures conservation of total energy and non-negativity of entropy production, which is especially important when modeling highly inhomogeneous poroelastic media and small-amplitude waves. A comparison of the HTCS approach with the classical Hamiltonian mechanics of binary mixtures confirms its thermodynamic consistency and structure [5]. For small perturbations, a linearized system of equations is derived from the HTCS model, similar in structure to the Biot equations and predicting three types of waves: fast and slow longitudinal, as well as shear [6, 7].

For the numerical solution of linearized HTCS systems, explicit difference schemes on a staggered grid, which have proven themselves in seismic wave modeling, are used. Velocities and stresses are placed at different nodes of the computational grid, which improves stability and reduces numerical variance. Time approximation is performed using explicit second-order schemes, and the time step is chosen based on the Courant stability condition, taking into account the maximum phase velocity in the medium. The development of exact and numerical solutions for discontinuity decay problems within the HTCS approach [6] creates a basis for the verification of finite difference schemes. This paper considers one-dimensional and two-dimensional implementations of such schemes in the Matlab environment for layered porous-elastic models with excitation in the form of a Ricker pulse. The amplitude and phase errors, as well as the computational costs, are compared for classical finite difference schemes, spectral elements, and HTCS-based schemes. It is shown that the HTCS approach with difference schemes on a step grid provides good reproduction of fast and slow waveforms and stability at moderately low values of the quality factor Q of about 20. Numerical experiments demonstrate that the calculated phase velocities of fast and slow compressional waves and shear waves are in good agreement with analytical estimates based on Biot dispersion relations [1, 2] and experimental data [3]. For the test models, the relative error in wave amplitude and arrival time, as well as the effect of dissipation on the attenuation of low-frequency components, were estimated. A comparison of finite difference methods, spectral elements, and HTCS schemes showed that HTCS models in combination with difference schemes on a step grid provide

an optimal balance between accuracy, stability, and computational complexity for problems of non-stationary seismic modeling in porous-elastic media [4, 6]. This makes this approach promising for application in seismic monitoring and geomechanical analysis of fields, where understanding the filtration-acoustic properties of the medium plays a key role [8, 9].

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26196267).

Key words: porous-elastic media, Biot equations, thermodynamically compatible hyperbolic systems (HTCS), non-stationary wave problems, finite difference methods, step grid, spectral elements.

2020 Mathematics Subject Classification: 74F10, 35L20, 65M06, 65N35

References

- [1] Biot, M.A. (1956a). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, 168–178.
- [2] Biot, M.A. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, 179–191.
- [3] Plona, T.J. (1980). Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 36, 259–261.
- [4] Rohan, E., Nguyen, V.-H., Naili, S. (2024). Homogenization of fluid saturated double porosity media with a new type of contrast in the Biot mesoscopic model. *Applied Mathematical Modelling*, 750–777.
- [5] Sýkora, M., Pavelka, M., Peshkov, I., Minakowski, P., Klika, V., Romenski, E. (2024). Comparison of the symmetric hyperbolic thermodynamically compatible framework with Hamiltonian mechanics of binary mixtures. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 36(3), 539–559.
- [6] Thein, F., Romenski, E., Dumbser, M. (2022). Exact and numerical solutions of the Riemann problem for a conservative model of compressible two-phase flows. *Journal of Scientific Computing*, 93(3), 83.
- [7] Romenski, E., Resnyansky, A.D., Toro, E.F. (2007). Conservative hyperbolic formulation for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 65(2), 259–279.
- [8] Snitser, A.R. (2012). Determination of filtration properties of a poroelastic medium based on the solution of a boundary value problem for the Biot equations. *Dynamical Systems*, 2(30), 323–335. (in Russian)
- [9] Meirmanov, A.M. (2008). Acoustic and filtration properties of a thermoelastic porous medium: Biot's equations of thermo-poroelasticity. *Sbornik: Mathematics*, 199(3), 1–24.

Mathematical Foundations of Ultrasound Tomography

S.I. KABANIKHIN¹, M.A. SHISHLENIN²

^{1,2}*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

¹ksi52@mail.ru, ²m.a.shishlenin@mail.ru

The ultrasound tomography has been developing intensively over the past two decades.

The development of ultrasound methods for the early diagnosis of malignant neoplasms of soft tissues is one of the key problems in medicine, and the absence of exposure to ionizing radiation has become an urgent field in medicine, which makes ultrasound tomography very promising. Currently, various research groups around the world are developing ultrasound scanners. One of the serious problems of ultrasound tomography is the development of effective and stable methods for solving nonlinear coefficient inverse problems [1]. The most adequate model is a 3D inverse problem in which the wave propagation velocity, medium density, and acoustic attenuation must be reconstructed from data recorded by detectors located at the boundary of the region. We consider the dynamic and kinematic inverse problem formulation and apply the direct and iterative methods

[2,3] to solve the inverse coefficient problem. Also the mathematical foundations of ultrasound tomography will be presented.

Funding: The research of S.I. Kabanikhin is supported the framework of the state assignment of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (project No. FWNF-2024-0001). The research of M.A. Shishlenin is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26103465 “Development and advancement of modern numerical methods for solving inverse and ill-posed problems in modeling cancer tumors”).

Keywords: inverse problems, ultrasound, tomography

2020 Mathematics Subject Classification: 49N45, 65M32

References

- [1] Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, De Gruyter, Germany, (2012).
- [2] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on the Gelfand-Levitan-Krein equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **18:9** (2011), 979–996.
- [3] Kabanikhin S.I., Klyuchinskiy D.V., Novikov N.S., Shishlenin M.A. Numerics of acoustical 2D tomography based on the conservation laws. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **8:2** (2020), 287–297.

Heat polynomials method for solving inverse Cauchy–Stefan problems

S.A. KASSABEK¹, Zh. RAYEV²

^{1,2}*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*

¹samat.kassabek@nu.edu.kz, ²zhangir.rayev@nu.edu.kz

Inverse Cauchy–Stefan problems arise in phase-change processes where the temperature and the boundary heat flux must be reconstructed from incomplete measurements. To describe the mathematical setting, let $u(x, t)$ denote the temperature in a one-dimensional medium with a moving phase boundary $x = s(t)$.

The heat conduction region is defined by

$$D = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\},$$

with closure

$$\overline{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq s(t), 0 \leq t \leq T\}.$$

The corresponding direct one-phase Stefan problem consists in determining the temperature $u(x, t)$ and the free boundary $s(t)$ such that

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

subject to the initial condition

$$u(x, 0) = f(x), \tag{2}$$

the boundary conditions at the moving interface

$$u(s(t), t) = 0, \tag{3}$$

$$-\lambda u_x(s(t), t) = L\gamma s'(t), \tag{4}$$

and the Cauchy data prescribed at the fixed boundary

$$u(0, t) = g(t), \tag{5}$$

$$-\lambda u_x(0, t) = q(t). \quad (6)$$

In the inverse formulation, either the boundary heat flux $q(t)$ or the initial temperature $f(x)$ is unknown and must be reconstructed from additional measurements.

In a series of works [1-4], we developed and systematically refined the variational heat polynomials method (VHPM), a Trefftz-type approach rooted in the classical construction of heat polynomials by Appell [6] and the polynomial method of Trefftz [5]. The temperature field is approximated by a finite linear combination of heat polynomials satisfying the heat equation identically, and the unknown coefficients are determined by minimizing a quadratic residual functional. This framework has been successfully applied to one-phase and two-phase inverse Stefan problems.

Subsequently, in [7,8], we have introduced the collocation heat polynomials method (CHPM), where the coefficients are determined by enforcing integral collocation conditions along the moving interface and prescribed boundaries. The resulting algebraic systems exhibit spectral structures that reflect the intrinsic instability of the inverse problem, allowing a comparative investigation of conditioning and noise sensitivity.

The present work provides a unified comparative analysis of VHPM and CHPM for inverse Cauchy-Stefan problems, including extensions to two-phase configurations. To ensure stability with respect to noisy boundary data, Tikhonov regularization is incorporated into both formulations. We study convergence with respect to the polynomial degree, analyze conditioning growth, and examine reconstruction accuracy under varying noise levels. Particular attention is devoted to the semi-convergence phenomenon and to the bias-variance trade-off inherent in inverse heat conduction problems.

A systematic numerical investigation for three representative model problems with known analytical solutions confirms that both Trefftz-type discretizations yield accurate and stable reconstructions of the unknown heat flux and initial temperature when combined with appropriate regularization. The results clarify the stability properties of variational and collocational formulations and demonstrate the effectiveness of heat polynomial bases for inverse free-boundary problems.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: Inverse Cauchy-Stefan problem, heat equation, free-boundary problems, heat polynomials, Trefftz methods, Tikhonov regularization, ill-posed problems, stability analysis, inverse heat conduction.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K05, 35R35, 65M30.

References

- [1] S. A. Kassabek, S. N. Kharin, D. Suragan, A heat polynomials method for inverse cylindrical one-phase Stefan problems, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29** (2021), 3423–3450.
- [2] S. A. Kassabek, D. Suragan, Numerical approximation of the one-dimensional inverse Cauchy-Stefan problem using heat polynomials (with D. Suragan, *Computational and Applied Mathematics*, **42(3):129**, (2022)
- [3] S. A. Kassabek, D. Suragan, Two-phase inverse Stefan problems solved by heat polynomials method (with D. Suragan, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **421**, (2023), 114854.
- [4] S. A. Kassabek, D. Suragan A heat polynomials method for the two-phase inverse Stefan problem, *Computational and Applied Mathematics*, **42(3):129**, (2023).
- [5] E. Trefftz Ein Gegensruek zum Ritz'schen Verfahren, in: *Proccedings 2nd International Congress of Apllied Mechanics (Zurich)*, (1926), 131–137.
- [6] P. Appell, Sur l'equation $\partial^2 z / \partial x^2 - \partial z / \partial y = 0$ et la theorie de la chaleur, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, **8** (1892), 187–216.
- [7] S. A. Kassabek, O. Narbek, T. A. Nauryz, Collocation heat polynomials method for solving inverse Stefan type problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **460** (2025), 116356.
- [8] S. A. Kassabek, Zh. Rayev, O. Narbek, T. A. Nauryz, A Comparative Study of Collocation and Variational Heat Polynomial Methods for One-Dimensional Inverse Cauchy-Stefan Problems, (2025) *in process of being submitted to the journal*.

Multidimensional Markov Modeling of Investment Effects in the Kazakhstan Economy

S. KERIMKHULLE¹, A. ADALBEK²

^{1,2}*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

¹kerimkul_sye@enu.kz, ²adalbek_a@enu.kz

We present an applied stochastic-computational framework for forecasting intersectoral effects of investments in the Kazakhstan economy using multidimensional Markov chains. The empirical basis consists of annual input–output time series (1995–2018) aggregated to key sectors relevant for investment propagation (agriculture; food products; chemicals; wholesale and retail trade). Multivariate Markov chain models for categorical sequences provide a natural tool for such data-driven forecasting tasks [1,3].

Data discretization and state construction. Let $y_t^{(r)}$ denote the observed output (in current USD, million) of sector $r \in \{1, \dots, d\}$ at year t . Since the Markov model in [1] operates on categorical states, each sectoral series is discretized into m ordered levels. For each sector r , define thresholds $\tau_0^{(r)} < \tau_1^{(r)} < \dots < \tau_m^{(r)}$ (e.g., based on empirical quantiles or equal-frequency bins) and encode

$$X_t^{(r)} = \ell \iff \tau_{\ell-1}^{(r)} \leq y_t^{(r)} < \tau_{\ell}^{(r)}, \quad \ell = 1, \dots, m. \quad (1)$$

The multidimensional categorical state is then

$$\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}) \in \{1, \dots, m\}^d.$$

First-order model (applied estimation). We model the dynamics by a multivariate first-order Markov chain

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} = j \mid \mathbf{X}_t = i) = p_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}^d, \quad (2)$$

where $P = (p_{ij})$ is estimated from the observed transitions of $\mathbf{X}_t$. Let n_{ij} be the number of transitions $i \rightarrow j$ in the sample; the maximum-likelihood estimator is

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}, \quad \hat{p}_{ij} \geq 0, \quad \sum_j \hat{p}_{ij} = 1. \quad (3)$$

Denote by $\boldsymbol{\pi}_t$ the distribution of $\mathbf{X}_t$. Forecasting in categorical space is performed via

$$\boldsymbol{\pi}_{t+h} = \boldsymbol{\pi}_t \hat{P}^h, \quad h \geq 1, \quad (4)$$

which yields multi-step probabilities of sectoral regimes (low/medium/high, etc.).

Higher-order (delayed) dependence used in the article. To capture delayed investment effects, we use a k -th order Markov specification (in the spirit of higher-order constructions [2]):

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} = x \mid \mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_0) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} = x \mid \mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_{t-k+1}). \quad (5)$$

Computationally, (5) is converted to a first-order chain on the expanded state space

$$\mathbf{Z}_t = (\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_{t-k+1}),$$

so that standard matrix-based forecasting (4) applies.

Mapping categorical forecasts to economic magnitudes. To obtain forecasts in original units, we attach to each categorical level ℓ a representative value, e.g.,

$$c_{\ell}^{(r)} = \mathbb{E}[y_t^{(r)} \mid X_t^{(r)} = \ell] \quad (\text{estimated by sample means within bins}).$$

Hence, the h -step-ahead expected output of sector r is approximated by

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[y_{t+h}^{(r)}\right] = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}^d} (c_{j_r}^{(r)}) \pi_{t+h}(j), \quad (6)$$

where j_r denotes the r -th component of the multidimensional state j .

Applied evaluation protocol. Predictive performance is assessed by a rolling one-step scheme. Let $\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}$ be the most probable predicted state under (2) or (5). The categorical accuracy is

$$\text{Acc} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{1}\left\{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1} = \mathbf{X}_{t+1}\right\}. \quad (7)$$

In our experiments, higher-order models (notably $k = 5$) better reproduce delayed responses of downstream sectors, consistent with multivariate economic forecasting applications [3].

Results (Kazakhstan case). The estimated transitions demonstrate pronounced propagation from agriculture-related investment regimes to downstream production regimes. In particular, an increase in agricultural investment is associated with a higher probability of moving to medium/high output states in food production, chemicals, and trade in subsequent years. These applied findings align with our earlier input–output analyses of Kazakhstan sectors [4] and support the use of multi-dimensional Markov modeling as a practical computational tool for decision-making in investment planning and sectoral policy.

Funding: This research was funded by the L.N. Gumilyov Eurasian National University (Project No. AP26196337).

Keywords: multidimensional Markov chain, higher-order Markov model, input–output data, investment effects, Kazakhstan economy.

2020 Mathematics Subject Classification: 60J10, 91B84, 62M10

References

- [1] Ching W.K., Fung E.S., Ng M.K. A multivariate Markov chain model for categorical data sequences and its applications in demand predictions, *IMA Journal of Management Mathematics*, **13**(3) (2002), 187–199.
- [2] Ching W.K. et al. A Higher-Order Markov Model for the Newsboy’s Problem, *Journal of the Operational Research Society*, **54**(3) (2003), 291–298.
- [3] Gjika E., Basha L., Allka X., Ferrja A. Predicting the Albanian economic development using multivariate Markov chain model, *Business and Management* 2020 (2020).
- [4] KERIMKHULLE-1- S., Aitkozha Z., Saliyeva A., Kerimkulov Z., Adalbek A., Taberkhan R. Agriculture, hunting, forestry, and fishing industry of Kazakhstan economy: Input-output analysis, in: *Computational Methods in Systems and Software*, Springer (2023), 786–797.

Inverse source problems for Navier-Stokes equations

Kh. KHOMPYSH

Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

konat_k@mail.ru

In this work, we consider the following time dependent inverse source problem for the Navier-Stokes equations [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = \nu \Delta \mathbf{v} + f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (1)$$

supplemented with the initial condition

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

the boundary condition

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_T} = 0. \quad (3)$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \omega d\mathbf{x} = e(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Here $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ is the velocity field, $\pi(\mathbf{x}, t)$ is the pressure, $f(t)$ is the intensity of an external source which unknown or impossible to measure during the process. The constant ν accounts for the dynamic viscosity. The vector functions $\mathbf{g}$, $\mathbf{v}_0$, ω and scalar function $e(t)$ are given data.

The inverse problems consist of determining a coefficient $f(t)$ in the right hand side (external source) of the momentum equation, a vector of velocity $\mathbf{v}$, and a pressure π from the system (1)-(3) under given additional information about the mean speed over the entire area, i.e. by the integral overdetermination condition (4).

We study (1)-(4) in two cases: first, consider (1)-(4) in a linear case, namely, by neglecting the convective term $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Then, in general case, i.e. (1)-(4).

Under suitable conditions on the data, we establish unique solvability of these problems, in particular, global-in-time existence and uniqueness and, local-in-time in nonlinear case.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23486218).

Keywords: Inverse problem, Navier-Stokes, integral overdetermination condition, existence, uniqueness.

References

[1] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky and I.A. Vasin *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, Marcel Dekker, New York, Basel (2000).

Inverse Boundary Problem for a Linear Pseudoparabolic Equation

Kh. KHOMPYSH¹, M.B. MUKHAMBETKALIYEV², M. SHAZYNDAYEVA³

^{1,2,3} *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹konat_k@mail.ru, ²mukhambetkaliyevmurat@gmail.com, ³moldir.trz@gmail.com

This work investigates a boundary inverse problem for a linear pseudoparabolic equation. The goal is to determine an unknown boundary input on the unobserved end of the interval using observations recorded at the observed end. Problems of this kind appear, for instance, in subsurface monitoring, where information about underground dynamics is inferred from measurements taken at the ground surface.

Let $Q_T := \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ be a rectangular domain, $0 < l, T < \infty$. We consider the problem of determining the pair of functions $\{u(x, t), p(t)\}$, which satisfy the linear pseudoparabolic equation

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) - \beta y_{xxt}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

the initial condition

$$y(x, 0) = a(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

the boundary conditions

$$y(0, t) = \nu(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$y(l, t) = p(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$y_x(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

In the system (1)-(5), the functions a, ν, ψ, f and the constant $\beta > 0$ are given data.

Under suitable assumptions on the data, we prove existence and uniqueness of classical solution, and implement numerical experiments.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23486218).

An Inverse Source Problem for a Time-Fractional Pseudo-Parabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity

A.O. MAMANAZAROV

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

mamanazarovaz1992@gmail.com

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and let $T > 0$ be fixed.

We consider the following time-fractional pseudo-parabolic equation in $Q_T := \Omega \times (0, T)$:

$$\partial_t^\alpha (u - \operatorname{div}(a(x)\nabla u)) - \operatorname{div}(b(x)\nabla u) + c(x) \cdot \nabla u = \gamma(x)|u|^{p-2}u \log |u| + F(u) + f(t)g(x, t), \quad (1)$$

subject to the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

and the homogeneous Dirichlet boundary condition

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3)$$

Here, ∂_t^α denotes the Caputo fractional derivative of order α , where $0 < \alpha < 1$. The functions $a(x)$, $b(x)$, $c(x) = (c_1(x), \dots, c_d(x))$, $\gamma(x)$, $F(\cdot)$, and g are given functions. $p \in \mathbb{R}$ such that $p > 2$.

In equation (1), the term $c(x) \cdot \nabla u$ represents a convection (or transport) term describing directed transport of the quantity u along the vector field $c(x)$.

The nonlinear term in (1), $|u|^{p-2}u \log |u|$, is of logarithmic type. Nonlinearities of this form arise in various physical models, including inflationary cosmology, optics, geophysics, and nuclear physics (see, for instance, [1],[2]). From a mathematical viewpoint, logarithmic nonlinearities introduce additional analytical difficulties in the analysis of partial differential equations.

Although such nonlinearities can often be controlled by power-type nonlinearities, the presence of the logarithmic term leads to new analytical challenges, and several techniques developed for power-type nonlinearities do not directly extend to the logarithmic case.

The goal is to determine the unknown time-dependent coefficient $f(t)$ in (1)–(3) by means of the following integral overdetermination condition:

$$\int_{\Omega} u(x, t) \omega(x) dx = E(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where $\omega(x)$ and $E(t)$ are known functions.

We should note that the present analysis is strongly influenced by and relies on the techniques developed in [3] and [4].

The novelty of this work lies in the analysis of an inverse source problem for a time-fractional pseudo-parabolic equation involving a logarithmic nonlinearity. We emphasize that all results obtained below remain valid for the case $\alpha = 1$, which corresponds to the inverse problem for

a pseudo-parabolic equation with an integer-order time derivative and a logarithmic nonlinear term. To the best of our knowledge, this particular case has not been studied in the existing literature. Moreover, the combination of fractional dynamics and logarithmic nonlinear effects has not previously been investigated in the context of inverse source problems.

Let $p > 2$ and let $\varepsilon > 0$. Throughout the paper, we adopt the following notation: $\sigma := p + \varepsilon$. We assume that the following conditions hold for the given data:

$$\begin{aligned} u_0 &\in W_0^{1,2}(\Omega); \quad \omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega); \quad E \in C^1[0, T]; \\ g &\in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \text{and there exists a constant } k_0 > 0 \text{ such that} \\ g_0(t) &:= \int_{\Omega} g(x, t) \omega(x) dx, \quad |g_0(t)| \geq k_0, \quad \forall t \in [0, T]; \\ a, b, \gamma &\in L^\infty(\Omega) \quad \text{with} \quad 0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1, \quad 0 < b_0 \leq b(x) \leq b_1, \quad |\gamma(x)| \leq \gamma_1 \quad \text{a.e. in } \Omega; \\ c_i(x) &\in C(\overline{\Omega}) \quad (i = 1, 2, \dots, d) \quad \text{and} \quad C_0 := \max_{\overline{\Omega}} \sum_{i=1}^d c_i^2(x) < \infty; \end{aligned} \quad (5)$$

F is Lipschitz continuous; that is, there exists a constant L_F such that

$$|F(s_1) - F(s_2)| \leq L_F |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Multiplying (1) by $\omega(x)$, integrating over Ω , and using condition (4) and assumption (5), we obtain

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{g_0(t)} & \left[\partial_t^\alpha E(t) + \int_{\Omega} a(x) \partial_t^\alpha \nabla u \cdot \nabla \omega dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u \cdot \nabla \omega dx \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} c(x) \cdot \nabla u \omega dx - \int_{\Omega} F(u) \omega dx - \int_{\Omega} \gamma(x) |u|^{p-2} u \log |u| \omega dx \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Definition 1. A pair of functions $\{u, f\}$ is called a weak solution of the problem (1)-(4) if the following conditions hold:

1. $u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\sigma(Q_T)$, $\partial_t^\alpha u \in L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$, and $f \in L^2(0, T)$;
2. $u(0) = u_0$ almost everywhere in Ω ;
3. For every $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$ and for almost every $t \in (0, T)$ it holds that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t^\alpha u(x, t) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} a(x) \partial_t^\alpha \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ & - \int_{\Omega} c(x) \cdot \nabla u(x, t) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \gamma(x) |u(x, t)|^{p-2} u(x, t) \log |u(x, t)| \varphi(x) dx \\ & + \int_{\Omega} F(u(x, t)) \varphi(x) dx + f(t) \int_{\Omega} g(x, t) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

where $f(t)$ is given by (6).

Using the Galerkin approximation method together with uniform a priori estimates, fractional compactness arguments, and nonlinear Grönwall-type inequalities, we establish the local-in-time existence and uniqueness of a weak solution and the unknown coefficient $f(t)$. These results show that the considered inverse problem is locally well-posed under suitable assumptions on the given data.

Keywords: pseudo-parabolic equation, logarithmic nonlinearity, Caputo fractional derivative, Galerkin approximation, existence and uniqueness of solutions.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K70, 35D30, 35R11, 35A01

References

- [1] Barrow J.D., Parson P. Inflationary models with logarithmic potentials, *Phys. Rev. D*, **52**:10 (1995), 5576–5587.
- [2] Krolkowski W., Edmundson D., Bang O. Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media, *Phys. Rev. E*, **61**:3 (2000), 3122–3126.
- [3] Khompysh K. Determination of a time dependent source in semilinear pseudoparabolic equations with Caputo fractional derivative, *Chaos Solitons Fractals*, **189**(2024), Article 115716.
- [4] Khompysh K., Ruzhansky M. Inverse source problems for time-fractional nonlinear pseudo-parabolic equations with p-Laplacian, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **28**(2025), 1353–1383.

Nonlinear Haller Equation of Moisture Transfer: Difference Problem, a Priori Estimates, Convergence of Difference Problem, Inverse Problem

N.B. RYSBAYEVA

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

n.rysbayeva@kbtu.kz

The present work investigates Haller equation proposed in [1]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(W) \frac{\partial W}{\partial x} + A \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T) \quad (1)$$

For equation (1) the following initial and boundary conditions are set [3, 4]:

$$W_x(0, t) = 0, \quad \left(D(W) \frac{\partial W}{\partial x} + A \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right) (l, t) = f(t), \quad W(x, 0) = W_0(x). \quad (2)$$

In addition, the values of W : $\omega_g(t)$, $t \in [0, T]$ are given. The objective is to develop the method for determining the diffusion coefficient $D(W)$; Haller coefficient A ; moisture flux into the environment $f(t)$.

Remark 1. *It was experimentally shown that for porous media the following relations hold [4]:*

$$D(W) = B \cdot \exp(E \cdot W) \quad (3)$$

or

$$D(W) = B \cdot \exp(E \cdot (W - \bar{W})^2) \quad (4)$$

Here B , E , $\bar{W}$ are known quantities.

In this work we have proven **Lemma 1.** If $\omega_0(x) \in H_h^1(0; l)$, $f(t) \in H_\tau^1(0, T)$, then for solving difference problem the next estimate is true

$$\begin{aligned} \left(\|Y^{j+1}\|^2 + \|Y_{\bar{x}}^{j+1}\|^2 \right) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(Y_N^{j+1} \right)^2 \tau &\leq C_1, \quad |Y_i^{j+1}| \leq C_2 < \infty, \\ \left(\|Y_t^{j+1}\|^2 + \|Y_{t\bar{x}}^{j+1}\|^2 \right) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(Y_{N,t}^{j+1} \right)^2 \tau &\leq C_3, \\ \|Y_{i,x\bar{x}}^{j+1}\|^2 &\leq C_4, \quad \|Y_{i,\bar{x}}^{j+1}\|^2 \leq C_5. \end{aligned} \quad (5)$$

Here Y_i^{j+1} is approximate values of u_i^{j+1} . That is, all finite-difference derivatives in difference scheme are bounded.

Lemma 2. If $\omega_0(x) \in H^2(0, l)$, $f(t) \in H^1(0, T)$ then for solving problem (1)–(2) the following inclusions hold

$$W, W_t, W_x, W_{xx}, W_{xt}, W_{xxt}, W_{tt}, W_{xxtt} \subset C_6(\Omega) \quad (6)$$

Theorem 2. If conditions of Lemma 2 are satisfied, then solution of finite-difference problem satisfies the next convergence estimate

$$\|Y_i^{j+1} - W_i^{j+1}\|^2 + \|Y_{\bar{x}}^{j+1} - W_{\bar{x}}^{j+1}\|^2 \leq C_7(h^2 + \tau^2) \quad (7)$$

Keywords: moisture transfer, diffusion coefficient, inverse problem, difference problem, convergence, a priori estimate.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Hallaire. *Potential efficacy of water in soil under drying regime*, France (1963), 114–122.
- [2] Rysbayeva N., Alpar S., Rysbaiuly B. Inverse Problem for the Moisture Transfer Equation: Development of a Method for Finding the Unknown Parameter and Proof of the Convergence of the Iterative Process, *Symmetry*, **16** (2024), 1444.
- [3] Rysbaiuly B. *Coefficient inverse problems of moisture and heat transfer*, Daryn, Almaty (2025), 383.
- [4] Gardner D. Computer age reaches California vineyards, *Irrigation Age*, **17:2** (1983), 26T–26u, 26x, 33.

The Central Extension of a Given Algebra

A. M. SATTAROV

Turan International University, Namangan, Uzbekistan

saloberdi90@mail.ru

The algebraic classification (up to isomorphism) of algebras of dimension n from a certain variety defined by a certain family of polynomial identities is a classic problem in the theory of non-associative algebras. There are many results related to the algebraic classification of small-dimensional algebras in the varieties of Jordan, Lie, Leibniz, Zinbiel and many other algebras [1, 2].

In this study, the method of central extension is applied to a 4-dimensional algebra, as a result of which a new 5-dimensional algebraic structure is obtained. An algebra $\mathbf{A}$ is called a (right) *Leibniz algebra* if it satisfies the identity

$$(xy)z = (xz)y + x(yz). \quad (1)$$

For the algebraic classification of 4-dimensional nilpotent right alternative algebras, we start with a given 4-dimensional algebra. It is known the classification of all 4-dimensional nilpotent pure right alternative algebras:

$$\mathfrak{R} : e_1e_1 = e_3, \quad e_1e_3 = e_4, \quad e_2e_1 = -e_3, \quad e_2e_2 = e_4$$

$$H^2(\mathfrak{R}) = \left\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{23}], [\Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{41}], [\Delta_{24} - \Delta_{33} + \Delta_{42}] \right\rangle$$

Central extensions of $\mathfrak{R}$. Let us use the following notations:

$$\nabla_1 = [\Delta_{11}], \quad \nabla_2 = [\Delta_{12}], \quad \nabla_3 = [\Delta_{13}], \quad \nabla_4 = [\Delta_{23}],$$

$$\nabla_5 = [\Delta_{14}] + [\Delta_{32}] + [\Delta_{41}], \quad \nabla_6 = [\Delta_{24}] - [\Delta_{33}] + [\Delta_{42}].$$

Take $\theta = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \nabla_i \in H^2(\mathfrak{R})$. The automorphism group of $\mathfrak{R}$ consists of invertible matrices of the form...

Hence, we have the following distinct orbits:

$$\langle \nabla_6 \rangle, \quad \langle \nabla_4 + \nabla_6 \rangle, \quad \langle \nabla_3 + \alpha \nabla_4 + \nabla_6 \rangle, \quad \langle \nabla_1 + \alpha \nabla_3 + \beta \nabla_4 + \nabla_6 \rangle.$$

which give the following new algebras:

$$\mathfrak{R}_1 : \quad e_1 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_4, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_2 e_2 = e_4, \quad e_2 e_4 = e_5, \quad e_3 e_3 = -e_5, \quad e_4 e_2 = e_5$$

$$\mathfrak{R}_2 : \quad e_1 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_4, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_2 e_2 = e_4, \quad e_2 e_3 = e_5, \quad e_2 e_4 = e_5, \quad e_3 e_3 = -e_5, \quad e_4 e_2 = e_5$$

$$\mathfrak{R}_3 : \quad e_1 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_4 + e_5, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_2 e_2 = e_4, \quad e_2 e_3 = \alpha e_5, \quad e_2 e_4 = e_5, \quad e_3 e_3 = -e_5, \\ e_4 e_2 = e_5$$

$$\mathfrak{R}_4 : \quad e_1 e_1 = e_3 + e_5, \quad e_1 e_3 = e_4 + \alpha e_5, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_2 e_2 = e_4, \quad e_2 e_3 = \beta e_5, \quad e_2 e_4 = e_5, \\ e_3 e_3 = -e_5, \quad e_4 e_2 = e_5$$

$$\mathfrak{R}_5 : \quad e_1 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_4 + e_5, \quad e_1 e_4 = e_5, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_2 e_2 = e_4, \quad e_2 e_3 = e_5, \quad e_3 e_2 = e_5, \quad e_4 e_1 = e_5$$

$$\mathfrak{R}_6 : \quad e_1 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_4, \quad e_1 e_4 = e_5, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_2 e_2 = e_4, \quad e_2 e_3 = \alpha e_5, \quad e_3 e_2 = e_5, \quad e_4 e_1 = e_5$$

Keywords: algebraic classification, nilpotent algebras, right alternative algebras, central extension, Leibniz algebras.

2020 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A32

References

- [1] Adashev J., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., Sattarov A. The algebraic and geometric classification of nilpotent left symmetric algebras, *Journal of Geometry and Physics*, **167** (2021).
- [2] Adashev J., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., Sattarov A. The algebraic and geometric classification of nilpotent right commutative algebras, *Results in Mathematics*, **76**:1 (2021), 24.

On the Solution of an Inverse Problem for a Fourth-Order Hyperbolic Equation with Complex-Valued Parameters

B.N. SEILBEKOV

*South Kazakhstan Pedagogical University named after O. Zhanibekov, Shymkent,
Kazakhstan*

seilbekovbn@gmail.com

Let us consider an equation

$$u_{tt}(x, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + q(x) u(x, t) = f(x), \quad (1)$$

where $q(x) = q_1(x) + iq_2(x)$. We use

$$\Omega = \{-1 < x < 1, \quad 0 < t < T\}$$

to denote the open region, and the symbol

$$\bar{\Omega} = \{-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

to denote the closed region. The space $C_{x,t}^{k,l}(\Omega)$ consists of all functions $u(x, t)$ that have continuous derivatives with respect to x and t of the order of k, l , respectively, in the domain Ω .

The purpose of this paper is to study the following inverse problems.

Inverse problem D. Find a pair of functions $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ and $f(x) \in C[-1, 1]$, satisfying Equation (1) in the domain Ω , Dirichlet boundary conditions

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u_{xx}(-1, t) = 0, \quad u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

and conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, T) = \psi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are known sufficiently smooth functions.

Theorem 1. *Let the following conditions be satisfied:*

- 1) $q(x) \in C^4[-1, 1]$, $\varphi, \psi \in D(L_q)$, $L_q\varphi, L_q\psi \in D(L_q)$;
- 2) there is a positive number δ_0 such that $|1 - \cos \sqrt{\lambda_k} T| \geq \delta_0$.

Then the inverse problem (1), (2), (3) has a unique solution, which can be represented in the form of a Fourier series

$$u(x, t) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - \cos \sqrt{\lambda_k} T} [\cos \sqrt{\lambda_k} t - 1] X_k(x),$$

and

$$f(x) = L_q\varphi(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - \cos \sqrt{\lambda_k} T} \lambda_k X_k(x).$$

Keywords: fourth-order hyperbolic equations, inverse problem, eigenfunction, the Riesz basis, the Fourier method.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L35, 35N30, 35E99, 34L10

References

- [1] Imanbetova A., Sarsenbi A.A., Seilbekov B. Inverse Problem for a Fourth-Order Hyperbolic Equation with a Complex-Valued Coefficient., *Mathematics*, **11**:3432 (2023), <https://doi.org/10.3390/math11153432>.

An Inverse Problem for Pseudoparabolic Equation with Memory Term and Damping

A.G. SHAKIR

*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
ajdossakir@gmail.com*

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t \leq T\}$ is a cylinder with lateral Γ_T . Let us consider the following inverse problem of finding the pair of functions $(u(x, t), f(t))$, which satisfy the pseudoparabolic equation with memory term and damping

$$u_t - \kappa \Delta u_t - \lambda \Delta u - \int_0^t K(t-s) \Delta u(x, s) ds = \gamma |u|^{q-2} u + f(t) \cdot g(x, t), \quad \text{in } Q_T, \quad (1)$$

the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \quad (2)$$

the boundary condition

$$u(x, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_T, \quad (3)$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_{\Omega} u(x, t) \omega(x) dx = h(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Here, the coefficient κ, λ are given positive numbers, γ is the coefficient of the damping term might be positive $\gamma > 0$ either negative $\gamma < 0$. The functions $g(x, t)$, $u_0(x)$, $\omega(x)$, $K(t)$ and $h(t)$ are given. The exponent q is given positive number such that

$$1 < q < \infty. \quad (5)$$

The main goal of this work is to show global and local in time existence and uniqueness of weak solutions to the inverse problem (1)-(4).

Funding: This research work has been funded by Grant number AP26195073 the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Inverse problem, nonlinear pseudoparabolic equation, memory term, solvability.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35K65, 35R30, 45K05

Ill-Posed Continuation Problems of Mathematical Physics

M.A. SHISHLENIN¹, S.I. KABANIKHIN²

^{1,2}*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

¹m.a.shishlenin@mail.ru, ²ksi52@mail.ru

We study ill-posed continuation problems for partial differential equations, with an emphasis on the mechanisms of ill-posedness and their mitigation via conditional stability and regularization [1]. Three canonical examples of elliptic, parabolic, and hyperbolic type are used to illustrate the underlying ill-posedness. For a second-order elliptic continuation problem, we summarize well-posedness results for the associated direct and adjoint problems, establish conditional stability estimates, and develop an gradient-based iterative reconstruction method with convergence-rate guarantees [2]. For a parabolic continuation problem, we present corresponding well-posedness results and an gradient methods. For a hyperbolic continuation problem, we derive a conditional stability result. We further analyze the singular numbers of the continuation operator for a complex-valued Helmholtz equation, thereby characterizing the frequency dependence of the ill-posedness [3].

Funding: The research of M.A. Shishlenin is supported the framework of the state assignment of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (project No. FWNF-2024-0001). The research of S.I. Kabanikhin is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26103465 “Development and advancement of modern numerical methods for solving inverse and ill-posed problems in modeling cancer tumors”).

Keywords: continuation problem, inverse and ill-posed problem, regularization, optimization

2020 Mathematics Subject Classification: 49N45, 65M32

References

- [1] Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, De Gruyter, Germany, (2012).
- [2] Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B. Inverse problems for the ground penetrating radar, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21:2** (2013), 885–892.
- [3] Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S. Regularization of the continuation problem for elliptic equations, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21:6** (2013), 871–884.

Development of Computational Algorithms for Numerical Simulation of Leaching Processes

K.M. SHIYAPOV¹, N.S. KUANOVA²

^{1,2}*Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

kadrzhan2019@gmail.com

Leaching processes used in hydrometallurgy are a set of several interrelated phenomena, such as filtration of the reagent through a porous medium, transport of dissolved components, and chemical dissolution of minerals. To apply the mathematical model in practice, it is not enough to create a system of equations, but it is also necessary to create a calculation algorithm that provides stable and repeatable results regardless of changes in technological parameters (reagent concentration, porosity, filtration rate, temperature affecting kinetics) [1-2]. This paper presents an algorithm for numerically solving the mathematical model of the leaching process and presents the results of a computational experiment demonstrating its operability.

The computational domain is represented by the interval $\Omega = [0, L]$, which corresponds to a one-dimensional approximation of a porous column. Within this domain the concentration of the dissolved metal $C(x, t)$ evolves in time due to transport and reaction processes. The filtration velocity of the solution is assumed to be constant ($u > 0$), while the chemical dissolution of the mineral is represented by a first-order reaction term.

Under these assumptions, the process can be described by a convection–diffusion–reaction equation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k(C_s - C), \quad (1)$$

where D denotes the diffusion coefficient, k is the kinetic constant of the dissolution reaction, and C_s represents the saturation concentration.

At the inlet of the column the concentration is assumed to be $C(0, t) = 0$ since the fresh reagent initially contains no dissolved metal. At the outlet a zero-gradient boundary condition is imposed:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (2)$$

The initial condition is defined as $C(x, 0) = 0$.

This formulation preserves the physical meaning of the process and allows studying how the parameters u, D, k influence the outlet concentration $C(L, t)$, which is directly related to metal recovery.

To obtain numerical solutions, the spatial domain is discretized into grid nodes $x_i = i\Delta x$, and time is discretized as $t^n = n\Delta t$.

A semi-implicit finite-difference scheme is used for numerical approximation. The convective term is treated using an upwind discretization, while the diffusion and reaction terms are included implicitly. This leads to the following discrete relation:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = D \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + k(C_s - C_i^{n+1}). \quad (3)$$

At each time step the scheme results in a tridiagonal system of linear equations, which can be efficiently solved using the Thomas algorithm. In this way the concentration profile $C(x, t)$ is obtained sequentially in time, and the outlet concentration $C(L, t)$ is then analyzed to evaluate the recovery process.

To ensure physically meaningful results, the parameters must satisfy the conditions $D \geq 0, k \geq 0$, as well as the stability requirement $\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Under these conditions the scheme preserves non-negative concentrations and satisfies the bounds $0 \leq C_i^n \leq C_s$.

The proposed algorithm was tested through a series of computational experiments in which the parameters u, D, k were varied. The efficiency of the leaching process was evaluated using the

outlet concentration $C(L, t)$ and the time required to reach a certain level of saturation, for instance $C(L, t) = 0.9C_s$.

The results indicate several consistent trends. An increase in the kinetic coefficient k accelerates the formation of the dissolution front and leads to a faster increase in outlet concentration. A higher diffusion coefficient D smooths the concentration profile and enhances mass transport within the column. On the other hand, increasing the filtration velocity u accelerates reagent delivery, but excessively large values of u may reduce the contact time and prevent the solution from reaching saturation.

The developed computational algorithm provides a practical tool for the numerical simulation of leaching processes in porous media. The numerical scheme ensures stable solutions and preserves physically meaningful concentration limits. The computational experiments demonstrate that the model can be used to analyze the influence of technological parameters and to support the optimization of hydrometallurgical processes. Further development of this approach is associated with solving inverse problems aimed at identifying model parameters from experimental data, which would allow calibration of the model for specific ore types and reagents.

Keywords: leaching processes, numerical simulation, finite-difference scheme, convection-diffusion-reaction equation, porous media.

2020 Mathematics Subject Classification: 65M06, 35K57, 76S05

References

- [1] Saldaña M., Toro N., Castillo J. Copper mineral leaching mathematical models – A review, *Processes*, **10**:1 (2022), Article 1. DOI: 10.3390/pr10010001.
- [2] Mohammadi B., Mehdinejadiani B. Finite difference solver for simulating leaching process in bounded porous media: Development and application, *Journal of Hydrology*, **612** (2022), Article 128297. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2022.128297.

Modeling and Reconstruction of Parameters of a Viscoelastic Medium

K.M. SHIYAPOV¹, A.M. SAKHABAYEVA², D.R. GUBAIDULLINA³

^{1,2,3}Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

¹kadrzhan2019@gmail.com, ²arai_mishon@mail.ru, ³dilya.gubaydullina.03@bk.ru

Viscoelastic media are widely used in various fields of science and engineering. These include geological rocks, polymer and composite materials, biological tissue, and engineering structural elements. A characteristic feature of such media is the combination of elastic properties and viscous behavior, manifested in the time dependence of stresses and strains, as well as in relaxation and aftereffects. Studying the dynamics of viscoelastic media is of significant interest for seismic exploration, non-destructive testing of materials, geophysical monitoring, and medical diagnostics. In practical applications, an important task is to determine the internal characteristics of the medium from measurement results, which necessitates solving inverse problems and is considered ill-posed [1,3].

The problem of mathematical modeling of dynamic processes in a viscoelastic medium and the reconstruction of its physical parameters from observational data is considered. A mathematical model of wave propagation is constructed based on the generalized Kelvin–Voigt model, taking into account material memory effects. A coefficient inverse problem for determining the elasticity and viscosity parameters is formulated [1,6].

A numerical solution algorithm is proposed based on the linearization method with projection corrections in the frequency domain using A.N. Tikhonov’s regularization [4]. The aim of the work is to develop a mathematical model and a numerical algorithm for reconstructing the parameters of a viscoelastic medium based on observation data, ensuring the stability of the solution to errors in the initial data.

The dynamics of a viscoelastic medium is described by the equation of motion of a continuous medium:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma + f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

which are widely used in wave modeling of viscoelastic continua [2], where ρ is the density of the medium, $u(x, t)$ is the displacement vector, σ is the stress tensor, f are the external forces.

Within the framework of the linear viscoelasticity model, a Kelvin–Voigt type rheological relationship is used:

$$\sigma = \lambda \operatorname{div} u I + 2\mu \varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (2)$$

where λ, μ are Lamé parameters, η is the viscosity coefficient, ε is the strain tensor.

The direct problem involves determining the displacement field for given environmental parameters and initial boundary conditions. The inverse problem involves reconstructing unknown environmental parameters from measured displacements or velocities at the boundary of the domain. Inverse parameter identification problems are ill-posed, as the solution may be unstable to errors in the initial data [1,4]. To ensure stability, a regularization method is used. Environmental parameters are determined from the condition of minimizing the functional:

$$J(p) = \|u_{calc}(p) - u_{obs}\|^2 + \alpha \|p - p_0\|^2, \quad (3)$$

where p is the vector of sought parameters, u_{calc} is the computational solution of the direct problem, u_{obs} is the experimental data, α is the regularization parameter. Finite-difference or finite-element schemes are used to numerically solve the direct problem. Functional minimization is accomplished using iterative gradient methods [1,6].

The numerical implementation includes the discretization of the direct problem using the finite element method, computation of the sensitivity function via finite differences or the adjoint equation approach, solution of the resulting integral equation by quadrature methods with regularization, and iterative refinement of the solution. A series of numerical experiments was performed to identify the elasticity, viscosity, and fractionality coefficients for both homogeneous and inhomogeneous media. Analysis showed that when adding 5% noise to the initial data, the error in reconstructing the elastic modulus does not exceed 3%, the viscosity coefficient does not exceed 7%, and the fractionality parameter does not exceed 2%. Regularization ensures the algorithm remains operational even with disturbances of up to 15%. The iterative process is characterized by stable monotonic convergence and typically achieves a relative accuracy of 10^{-4} in 6–8 steps for various initial approximations. A comparison with the classical Kelvin–Voigt model shows that the fractional differential description provides a lower reconstruction error for the same noise level, which is due to a more adequate consideration of relaxation effects [5].

A mathematical model of wave propagation in a viscoelastic medium has been developed, and a numerical method for reconstructing its parameters has been proposed. It has been shown that the use of regularizing algorithms allows for obtaining stable and reliable solutions to the inverse problem. The results obtained can be applied in geophysics, non-destructive testing of materials, and medical diagnostics [1,3].

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26196267).

Keywords: viscoelastic medium, inverse problem, mathematical modeling, regularization, linearization method, frequency domain, parameter identification, fractional differential models.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 74D05, 26A33, 65N21

References

- [1] Vatulyan A.O. *Coefficient Inverse Problems in Mechanics*, Fizmatlit, Moscow (2019). (in Russian)
- [2] Lyapidevskii V.Yu., Neverov V.V., Karmushin S.R. Hyperbolic models of nonstationary flows of a viscoelastic medium, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **65**:5 (2024), 117–129. (in Russian)

- [3] Vatulyan A.O. *Inverse Problems in the Mechanics of Deformable Solids*, Fizmatlit, Moscow (2007). (in Russian)
- [4] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for Solving Ill-Posed Problems*, Nauka, Moscow (1986).
- [5] Bogachev I.V., Vatulyan A.O. On identification of characteristics of inhomogeneous viscoelastic bodies within a fractional-order model, *Bulletin of the Perm Federal Research Center*, **17:2** (2024), 261–272. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.2.17> (in Russian)
- [6] Uglich P.S. Inverse problem of reconstructing mechanical characteristics of a viscoelastic layer, *Bulletin of Kuban State University*, **20:4** (2023), 53–62. <https://doi.org/10.31429/vestnik-20-4-53-62> (in Russian)

Numerical Study of Wave Stability in a Porous Medium

K.M. SHIYAPOV¹, A.E. YUSSUPOVA², K.Zh. TURGANBEK³

^{1,2,3} Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

¹kadrzhan2019@gmail.com, ²ayakozuss@mail.ru, ³karakatturganbek@gmail.com

This paper considers a mathematical model of wave processes in a deformable, fluid-saturated porous medium based on Biot's theory. The finite difference method is employed to solve the system of equations, and the stability of the numerical scheme is analyzed based on the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition. The influence of physical parameters on the nature of the wave processes is investigated. The results can be applied in the fields of geophysical exploration and seismology.

The study of wave phenomena in fluid-saturated porous media is considered a crucial issue in geophysics, petroleum engineering, and seismology. The fundamental theory describing the dynamics of such media was proposed by M.A. Biot [1,2]. According to Biot's theory, two compressional waves (fast and slow) and one shear wave propagate in a fluid-saturated porous medium. The fast compressional wave describes the in-phase motion of the solid skeleton and the fluid, while the slow compressional wave arises due to relative motion between the phases and undergoes intense attenuation due to viscosity [3].

Contemporary research extensively utilizes various numerical methods for modeling wave processes in porous media: finite difference methods, finite element methods, spectral-element methods, etc. [4,5,6]. However, one of the most critical issues in applying numerical methods is ensuring the stability of the obtained numerical solutions. Unstable numerical schemes can lead to divergence of the computational process and inaccurate results.

The aim of this work is to analyze the stability of numerical solutions for wave equations describing the dynamics of a deformable, fluid-saturated porous medium and to determine the influence of physical parameters on the characteristics of the wave processes.

In the one-dimensional case, the dynamics of a fluid-saturated porous medium are described by Biot's equations [1]:

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial t} (u - U), \quad (1)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = Q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (u - U). \quad (2)$$

where u and U are the displacements of the solid and fluid phases, respectively; $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ are the mass density coefficients; P, Q, R are the elasticity coefficients; and b is the viscous friction coefficient.

The finite difference method is used to solve the system of equations (1)-(2). Derivatives with respect to time and space are approximated using centered difference schemes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (3)$$

A necessary condition for the stability of the explicit scheme is the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_{\max}}, \quad (4)$$

where $V_{\max}$ is the maximum wave velocity in the medium. The stability of the numerical scheme is also verified using the von Neumann method [5,6].

The viscous friction coefficient (b) characterizes the attenuation (or amplitude decay) of waves [4]. Three different cases are considered: for small values of the coefficient, waves propagate over long distances; for intermediate values, the amplitude gradually decreases; and for large values, waves decay (attenuate) very rapidly. These conclusions are consistent with the results presented in [6].

The elasticity coefficients (P, Q, R) affect the wave velocity. An increase in P raises the velocity of the fast compressional wave, Q enhances the coupling between phases, and R accelerates pressure propagation in the fluid.

The ratio between spatial and temporal steps directly impacts stability. For example, with $\Delta x = 0.1$ m and $\Delta t = 0.01$ s, the CFL condition $0.01 \leq 0.1/V_{\max}$ may not be satisfied if $V_{\max} > 10$ m/s.

In this study, a numerical model based on Biot's theory was developed, and its stability was thoroughly analyzed. The obtained results were as follows:

- 1) The stability of the numerical solution depends on the CFL condition;
- 2) An increase in b enhances wave attenuation;
- 3) The elasticity coefficients influence the wave velocity.

As a result of the conducted research, an efficient numerical model based on Biot's equations was developed for a deformable, fluid-saturated porous medium. It was established that the model's stability is closely related to the CFL condition, and the degree of influence of the main physical parameters on the evolution of the wave field was assessed. The results of the study may find applications in the fields of geophysical exploration and seismology. Future work plans to extend the model to two-dimensional and three-dimensional cases.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26196267).

Keywords: Biot's theory, porous medium, wave equations, finite difference method, numerical stability, CFL condition.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20 2020 Mathematics Subject Classification: 74F10, 35L05, 65M06, 65M12

References

- [1] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // Journal of the Acoustical Society of America. – 1956. – Vol. 28, No. 2. – P. 168-178.
- [2] Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // Journal of Applied Physics. – 1962. – Vol. 33, No. 4. – P. 1482-1498.
- [3] Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // Journal of the Acoustical Society of America. – 1962. – Vol. 34, No. 9. – P. 1254-1264.
- [4] Ahmad Q.A., Ehsan M.I., Khan N. et al. Numerical simulation and modeling of a poroelastic media for detection and discrimination of geo-fluids using finite difference method // Alexandria Engineering Journal. – 2022. – Vol. 61, No. 5. – P. 3447-3462.
- [5] Stokke J.S., Bause M., Margenberg N., Radu F.A. Biot's poro-elasticity system with dynamic permeability convolution: Well-posedness for evolutionary form // Applied Mathematics Letters. – 2024. – Vol. 158. – 109224.

[6] Hou Z., Wang Y., Quintal B. Seismic attenuation and dispersion in fractured porous media: The effect of heterogeneities in the background // Geophysical Journal International. – 2024. – Vol. 236, No. 2. – P. 891-908.

An Ill-Posed Inverse Problem for Hidden Cognitive Dynamics from Locomotion Time Data

M. SIGALOVSKY

KBTU / Al-Farabi KazNU, Almaty, Kazakhstan

m.sigalovskiy@kbtu.kz

We consider a nonlinear dynamical model describing the influence of hidden cognitive processes on physical performance during goal-directed locomotion. Empirical observations suggest that intrusive cognitive activity reduces effective walking speed and increases arrival time. Since cognitive dynamics are unobservable while arrival time is measurable, this leads naturally to an inverse problem formulation.

Direct model. Let $x(t)$ denote remaining distance to a target, $a(t) \in (0, 1]$ attentional engagement, and $s(t) \geq 0$ cognitive noise intensity. Baseline speed is $v_0 > 0$:

$$\dot{x}(t) = -v_0 a(t), \quad x(0) = x_0 > 0. \quad (1)$$

The coupled dynamics is

$$\dot{a}(t) = \nu(1 - a(t)) - \mu s(t)a(t), \quad (2)$$

$$\dot{s}(t) = \lambda - \beta s(t) - \delta a(t)s(t), \quad (3)$$

where all parameters are positive.

Arrival time T is defined by $x(T) = 0$, hence

$$\int_0^T a(t) dt = \frac{x_0}{v_0}. \quad (4)$$

Thus, the observable quantity is an integral functional of hidden states.

Inverse problem. Given arrival time T (and optionally velocity data $v(t) = v_0 a(t)$), determine parameters (μ, λ, δ) and/or reconstruct the hidden trajectory $s(t)$.

Ill-posedness.

Theorem 1 (Non-uniqueness). *Assume that only arrival time T is observed. Then the inverse problem of recovering (μ, λ, δ) and/or $s(t)$ from T is non-unique: there exist infinitely many distinct hidden trajectories and parameter configurations consistent with the same arrival time.*

Sketch. Let $a(t) \in (0, 1]$ be any sufficiently smooth function satisfying

$$\int_0^T a(t) dt = \frac{x_0}{v_0}.$$

Define

$$s(t) = \frac{\nu(1 - a(t)) - \dot{a}(t)}{\mu a(t)}.$$

For any admissible $a(t)$ yielding $s(t) \geq 0$, equation (2) holds by construction. Since infinitely many functions $a(t)$ satisfy the integral constraint, infinitely many trajectories $s(t)$ correspond to the same arrival time T . □

Consequently, the inverse problem is ill-posed in the sense of Hadamard: non-uniqueness, instability with respect to data perturbations, and limited identifiability from integral observations.

The walking-time experiment provides a minimal reproducible nonlinear inverse problem with hidden-state dynamics and integral data. It offers a tractable prototype for studying inverse problems involving internal control processes affecting measurable physical performance.

Keywords: inverse problem, ill-posedness, hidden state reconstruction, nonlinear dynamical systems, identifiability.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A55, 35R30, 93B30

Parameter Identification and Regularization in the Logistic Model of Tumor Growth

U.K. SOTSIALOVA¹, ZH.M. BEKTEMESOV²

¹*Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

²*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

^{1,2}*Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan*

¹ulpan.2017@mail.ru, ²zholaman.bektemessov@kaznu.kz

Mathematical models of tumor growth play a crucial role in planning oncological treatments and predicting their dynamics. However, in real clinical practice, the biological characteristics of a tumor are unknown in advance. Furthermore, observation data obtained via MRI or ultrasound devices always contain instrumental errors and noise. Consequently, estimating model parameters based on clinical data belongs to the class of ill-posed (in the sense of Hadamard) inverse problems [1]. The aim of this work is to construct a stable numerical solution to the coefficient inverse problem for determining the cell proliferation rate and the maximum carrying capacity of tissues in a logistic model of tumor growth based on noisy experimental data.

To describe the dynamics of tumor cells in a constrained environment, the logistic growth equation is used [2]:

$$\frac{dC_T}{dt} = \lambda C_T \left(1 - \frac{C_T}{K}\right), \quad (1)$$

where $C_T(t)$ is the tumor volume at time t , λ is the proliferation rate, and K is the maximum carrying capacity of the tumor. The problem of recovering the unknown parameter vector $q = (\lambda, K)$ is based on the least squares method.

To prevent solution instability (overfitting) due to measurement errors, Tikhonov regularization was applied. The regularized objective functional is constructed as follows:

$$J_\alpha(q) = \sum_{i=1}^M \left[C_T(t_i, q) - C_{T,exp}^\delta(t_i) \right]^2 + \alpha \|q - q_0\|^2 \rightarrow \min_q, \quad (2)$$

where $C_{T,exp}^\delta(t_i)$ represents the clinical data with measurement error δ , $\alpha > 0$ is the regularization parameter, and q_0 is the a priori parameter vector.

The optimal regularization parameter α is selected using Morozov's discrepancy principle. To find the global minimum of the resulting complex nonlinear optimization problem, a heuristic Differential Evolution (DE) algorithm is used.

The proposed mathematical apparatus and regularization approach allow for recovering the biologically meaningful parameters of tumor growth with high accuracy, regardless of the noise level in the initial data. This algorithm can serve as a mathematical basis for oncologists to predict future tumor volume and optimize treatment courses in a timely manner.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26103465).

Keywords: mathematical modeling, oncology, tumor growth, inverse problems, Tikhonov regularization, differential evolution.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 92B05, 92C50

References

- [1] Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, De Gruyter, Berlin (2011). <https://doi.org/10.1515/9783110224016>
- [2] Sotsialova U.K., Bektemessov ZH.M. Optimization of inverse problems in breast cancer tumor growth modeling, in: *Abstracts of CITech 2026* (2026).

Goursat Type Problem for a Degenerate Barenblatt–Zheltov–Kochina Type Equation with a Regularized Prabhakar Fractional Derivative

D.A. USMONOV

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

dusmonov909@gmail.com

Let us consider the following fractional Barenblatt–Zheltov–Kochina type equation

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t, x) - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - x^d b {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t, x) = f(t, x) \quad (1)$$

in a domain $\Omega = \{(t, x) : 0 < t < q, 0 < x < p\}$. Here $f(t, x)$ is a given function, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, d, q, p \in \mathbb{R}$ such that $d > 0$, $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ the regularized Prabhakar fractional derivative [1]

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = {}^PI_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta} \frac{d^m}{dt^m} y(t), \quad (2)$$

${}^PI_{at}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t)$ Prabhakar fractional integral operator [2]

$${}^PI_{at}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = \int_a^t (t - \xi)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma} [\delta(t - \xi)^{\alpha}] y(\xi) d\xi, \quad (3)$$

$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ generalized Mittag-Leffler (Prabhakar) function

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_m}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \frac{z^m}{m!}. \quad (4)$$

We note that at $d = 0$, $\beta = 1$, $\delta = 0$, Eq. (1) becomes the classical pseudo-parabolic equation:

$$u_{xxt}(t, x) - au_{xx}(t, x) - x^d bu_t(t, x) = f(t, x).$$

We formulate Goursat's type problem for Eq. (1) as follows:

Problem G. To find a solution of Eq. (1) in Ω , satisfying the following:

- 1) regularity conditions: $u(t, x) \in C(\bar{\Omega})$, $u_x(t, x) \in C(\bar{\Omega})$, $(\partial^2/\partial x^2) u(t, x) \in C(\Omega)$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t, x) \in C(\Omega)$, $(\partial^2/\partial x^2) {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t, x) \in C(\Omega)$;
- 2) initial condition: $u(0, x) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq p$;
- 3) boundary conditions: $u(t, 0) = \varphi_1(t)$, $u_x(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq q$.

Here $\tau(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_1(t)$ are given functions such that $\tau(0) = \varphi_1(0)$, $\tau'(0) = 0$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: Goursat type problem, degenerate Barenblatt–Zheltov–Kochina equation, regularized Prabhakar fractional derivative, Mittag-Leffler type function.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11

References

- [1] D’Ovidio M., Polito F. Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions. *Theor. Probab. Appl.* **62**. (2018), 552–574.
- [2] Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.* **19**. (1971), 7–15.

Inverse Problems for the Burgers Equation in a Degenerate Domain

M. YERGALIYEV

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

ergaliev@math.kz

Let us consider the following nonlinearly degenerate domain

$$\Omega = \{x, t \mid \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t), \ 0 < t < T < \infty\},$$

with the cross-section $\Omega_t = \{\varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\}$ for a fixed value of the time variable $t \in (0, T)$, and for which the condition

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0,$$

is satisfied.

In the domain Ω , we study the following inverse problems for the Burgers equation:

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) \partial_x u(x, t) - \nu \partial_x^2 u(x, t) = \lambda(t) u(x, t) + w(t) f(x, t),$$

with various combinations of unknowns and boundary conditions.

The main purpose of this work is to determine additional conditions under which these inverse problems are uniquely solvable.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26198551).

Keywords: inverse problem, a priori estimate, moving boundary.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35B45, 35R37

References

- [1] Jenaliyev M.T., Kabanikhin S.I., Kassen M., Yergaliyev M.G. On the solvability of an inverse problem for the Burgers equation with an integral overdetermination condition in a nonlinearly degenerating domain, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **33**:1 (2025), 93–106.
- [2] Cao K., Lesnic D. Determination of the time-dependent effective ion collision frequency from an integral observation, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **32**:4 (2024), 761–793.

**Ғылыми жасанды интеллект:
математикалық әдістер және өнеркәсіптік қолданыстар**

**Научный искусственный интеллект:
математические методы и промышленное применение**

**Scientific Artificial Intelligence:
Mathematical Methods and Industrial Applications**

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: Д.Ж. Ахмед-Заки

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: О.Н. Тұрар

Ұйымдастыру комитетінің тең төрағасы: А.К. Жанибеков

Ұйымдастыру комитетінің тең төрағасы: Б.К. Асилбеков

Конференция хатшысы: Салтанат Жилкибаева

ҚАШЫҚТЫҚТАН ЗОНДТАУ ДЕРЕКТЕРІ МЕН МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ НЕГІЗІНДЕ СУ НЫСАНДАРЫНЫҢ ЭКОЛОГИЯЛЫҚ ЖАҒДАЙЫН БАҚЫЛАУДЫҢ АВТОМАТТАНДЫРЫЛҒАН КЕШЕНДІ ЖҮЙЕСІН ӘЗІРЛЕУ

А.С. АТАНИЯЗОВА¹, А.Ж. ҚАЙЫРБЕКОВА²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹aissulu.12@mail.ru, ²ainammmk@gmail.com

Қазіргі уақытта дәстүрлі экспедициялық және зертханалық әдістер ірі су айдындарын толық қамти алмайды, әрі зор шығындарды талап етеді. Осы мәселені шешу үшін ұсынылған жаңа әдістеменің өзектілігі өте жоғары. Жобаның негізгі мақсаты — Жерді қашықтықтан зондтау деректері мен машиналық оқыту алгоритмдерін біріктіретін, су нысандарының экологиялық жағдайын бақылауға арналған автоматтандырылған кешенді жүйе әзірлеу. Зерттеу нысаны ретінде Балқаш көлі таңдалып, Sentinel-3 спутнигінің мультиспектралды деректері негізге алынды. Жобаның басты технологиялық міндеті — хлорофилл-а және өлшенген заттардың концентрациясы негізінде су сапасының кешенді индексі (WQI) есептеудің біріңғай стандартын қалыптастыру. Бұл әдістеме мемлекеттік органдарға ластанған аймақтарды қашықтықтан анықтап, жедел экологиялық шешімдер қабылдауға мүмкіндік беретін сенімді құрал болып табылады.

Зерттеудің өзектілігі Дүниежүзілік банктің Қазақстан бойынша соңғы есептеріне сүйенсек [1], қазіргі таңда еліміздің су қауіпсіздігі өте күрделі мәселе болып отыр: Қазақстанның жалпы су ресурстарының 44%-ы көршілес елдерден келетін трансшекаралық ағындарға тәуелді, бұл сыртқы факторларға осалдықты арттырады. Сонымен қатар, Қазақстанға келетін трансшекаралық су ағындары жалпы су сапасының төмендеуіне тікелей ықпал етуі мүмкін [2]. Статистика бойынша, ауыл шаруашылығындағы ирригациялық жүйелердің 60%-дан астамы тозған, соның салдарынан суды тасымалдау кезіндегі шығын 40%-ға жетеді, ал тиімсіз пайдалану жалғаса берсе, 2030 жылға қарай су тапшылығы жылына 15%-ға дейін артып, ел экономикасына (ЖІӨ) 6% көлемінде зиян келтіруі мүмкін. Су сапасының нашарлауы да өзекті, өйткені сарқынды суларды тазарту қондырғыларының жетіспеушілігі мен технологиялық ескіруі салдарынан өзен бассейндерінің экологиялық тепе-теңдігі бұзылуда, бұл жағдайды жақсарту үшін Дүниежүзілік банк Sentinel-3 спутниктік мониторингі мен машиналық оқыту алгоритмдерін енгізу арқылы суды басқару тиімділігін 20–30%-ға арттыру қажеттілігін ғылыми тұрғыдан негіздейді.

Әдістер Су сапасын қашықтықтан бақылауда Sentinel-3 спутнигінің OLCI сенсоры хлорофилл-а мен өлшенген заттарды анықтаудың негізгі құралы болып табылады [3]. Деректерді өңдеуде Random Forest алгоритмі шешім ағаштарының ансамблі арқылы 99.88% дәлдікке дейін жоғары тиімділік көрсетеді. Сонымен қатар, Gradient Boosting пен SVM модельдері күрделі байланыстарды жіктеуде оңтайлы шешім саналады. Барлық есептеулер Python тіліндегі Scikit-learn кітапханасымен жүзеге асырылады. Соңғы кезеңде халықаралық стандарттарға сай Water Quality Index (WQI) көрсеткіші судың экологиялық жағдайын сипаттауға мүмкіндік береді [4].

Нәтижелер мен күтілетін нәтижелер Зерттеу барысында ұсынылған су сапасын қашықтықтан бақылау жүйесі Қазақстанның экологиялық қауіпсіздігін нығайтуға тікелей үлес қосады. Дәстүрлі әдістермен салыстырғанда, Sentinel-3 деректері мен машиналық оқыту алгоритмдерін қолдану су айдындарының ластануын (хлорофилл-а, өлшенген заттар) нақты уақыт режимінде, жоғары дәлдікпен анықтауға мүмкіндік береді. Бұл әдістеме су сапасының кешенді индексі (WQI) есептеуді автоматтандыру арқылы мемлекеттік органдарға ластану ошақтарын жедел анықтауға және су ресурстарын тиімді басқаруға көмектеседі. Нәтижесінде, еліміздегі су экожүйелерінің бұзылу қаупі азайып, мониторинг жүргізудің технологиялық деңгейі халықаралық стандарттарға көтеріледі.

Кілт сөздер: су сапасы, Балқаш көлі, Sentinel-3, машиналық оқыту, WQI.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 86A10, 92D40

ӘДЕБИЕТ

- [1] World Bank Kazakhstan: Water Security Assessment, World Bank Group, Washington, DC, 2022.
- [2] Global Water Partnership Kazakhstan: Responding to water challenges in Ili-Balkhash River Basin, GWP, Stockholm, 2023.
- [3] European Space Agency (ESA) Sentinel-3 Online Document. <https://sentinels.copernicus.eu>
- [4] World Health Organization Guidelines for Drinking-water Quality, WHO Press, Geneva, 2022.

МЕДИЦИНАЛЫҚ ДЕРЕКТЕРДІ ӨНДЕУГЕ АРНАЛҒАН МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ ӘДІСІН ӘЗІРЛЕУ ЖӘНЕ КӨМЕКШІ КЕҢЕС АҚПАРАТЫН ҰСЫНУ

М.Ж. ЖҰМАҒАЛИЕВА¹, А. ЕРҚОС²

^{1,2}әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Компьютерлік ғылымдар
кафедрасы

¹zumagalievamaral28@gmail.com, ²yerkosova@gmail.com

Дәстүрлі диагностикалық әдістердің қымбаттылығы және экономикалық шектеулері бүгінгі таңда медициналық көмектің жеделдігі мен қолжетімділігіне басты кедергі болып отыр. Дамыған елдердің өзінде жоғары технологиялық тексерулер (МРТ, КТ немесе генетикалық скрининг) үлкен қаржылық шығындарды талап етеді[1]. Бұл мәселе әсіресе созылмалы аурулар мен онкологиялық дерттерді ерте анықтау кезеңінде айқын байқалады[2]. Қымбат жабдықтардың жетіспеушілігі мен білікті мамандарға жүктеменің артуы пациенттердің дер кезінде диагноз алу мүмкіндігін төмендетіп, емдеу процесін қиындатады [3].

Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымының зерттеу нәтижелері бойынша, диагностикалық қателіктердің басым бөлігі (79%) пациент пен дәрігердің тікелей клиникалық қарым-қатынасы кезінде орын алады. Бұдан бөлек, маманға жолдау мәселелері (20%), диагностикалық ақпаратты бақылау мен қадағалау (15%) және тест нәтижелерін интерпретациялау (14%) кезеңдерінде де айтарлықтай олқылықтар кездеседі. Статистикалық мәліметтер бойынша, қателіктердің жартысына жуығы бірнеше процестің бірдей бұзылуынан туындайды. Атап айтқанда, клиникалық қарым-қатынас кезіндегі қателердің 56%-ы анамнез жинауға, ал 57%-ы қосымша зерттеулерді дұрыс тағайындамауға байланысты [4]. Бұл зерттеу клиникалық тәжірибеде жасанды интеллект басқаратын автоматтандырылған медициналық тарихты жинау жүйесі енгізілген амбулаториялық бөлімшедегі диагностикалық қателіктердің жиілігін бағалауға бағытталған.

Зерттеу барысында медициналық деректерді алдын ала өңдеу мен модельдің дәлдігін арттыру мақсатында кешенді математикалық және статистикалық тәсілдер қолданылды. Ең алдымен, диагностикалық маңызы жоғары белгілерді іріктеу үшін сандық айнымалылар арасындағы сызықтық және бейсызықтық тәуелділіктер Pearson және Spearman корреляциялық коэффициенттері арқылы анықталып, мақсатты класс пен факторлар арасындағы айырмашылықтардың маңыздылығы ANOVA және Chi-square (χ^2) критерийлерімен бағаланды. Деректердің таралу заңдылығын қалыпты күйге келтіріп, дисперсияны тұрақтандыру үшін Box-Cox нормализациялау әдісі жүргізілді, бұл машиналық оқыту модельдерінің сезімталдығын арттыруға негіз болды. Медициналық мәліметтер жиынтығында жиі кездесетін класс теңгерімсіздігі мәселесін шешу мақсатында SMOTE және ProWSyn алгоритмдері біріктіріліп, аз кездесетін патологиялық жағдайлар үшін жасанды синтетикалық үлгілер жасау арқылы оқыту іріктемесінің балансы қамтамасыз етілді.

Зерттеу барысында Random Forest, LightGBM және XGBoost алгоритмдерінің тиімділігі салыстырмалы түрде талданып, жоғары тиімділік пен тұрақтылықты көрсетті. Салыстырмалы талдау нәтижесінде LightGBM алгоритмі үздік көрсеткішке (Accuracy: 0.8880, F1-score: 0.8814) ие болып, жоғары ажырату қабілетін дәлелдеді. Модельдердің Precision деңгейі 0.93-тен жоғары болуы клиникалық қателіктердің барынша азайтылғанын дәлелдейді. Әзірленген модель Django веб-фреймворкімен интеграцияланып, медициналық деректерді нақты уақыт режимінде өңдеуге және дәрігерге қосымша интеллектуалды кеңес ақпаратын жүйе пациентке өз денсаулық көрсеткіштерін қадағалау мен қауіп деңгейін жедел білуге мүмкіндік ұсынуға қауқарлы бағдарламалық интерфейс жасалды.

Жоба Қазақстанның денсаулық сақтау саласындағы өңірлік және инфрақұрылымдық технологиялық алшақтықты азайтуға, заманауи интеллектуалды шешімдерді қатардағы емханалар деңгейіне дейін жеткізуге бағытталған. Қымбат әрі күрделі тексерулердің орнына қолжетімді физиологиялық деректерді өңдеу арқылы ауруды ерте кезеңде анықтау мүмкіндігі артады.

Кілтті сөздер: деректерді алдын-ала өңдеу, машиналық оқыту, болжам, биоинформатика, жасанды интеллект.

ӘДЕБИЕТ

- [1] van Beek E.J.R., Kuhl C., Anzai Y. et al. Value of MRI in Medicine: More Than Just Another Test?, *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, **49:7** (2018), e14–e25.
- [2] Schwarz T., Schmidt A.E., Bobek J. et al. Barriers to accessing health care for people with chronic conditions: a qualitative interview study, *BMC Health Serv Res*, **22:1037** (2022), 1–15.
- [3] Hinrichs-Krapels S., Ditewig B., Boulding H. et al. Purchasing high-cost medical devices and equipment in hospitals: a systematic review, *BMJ Open*, **12:9** (2022), e057516.
- [4] Singh H., Giardina T.D., Meyer A.N.D. et al. Types and origins of diagnostic errors in primary care settings, *JAMA Intern Med*, **173:6** (2013), 418–425.

ӨНДІРІСТЕГІ БИОҚАУІПСІЗДІКТІ ҚАМТАМАСЫЗ ЕТУДЕ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ НЕГІЗІНДЕГІ ЖҮЙЕЛЕРДІ ҚОЛДАНУ

Д.Б. КАМБАРОВ

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Мақалада өндірістік нысандардағы биоқауіпсіздікті қамтамасыз ету үшін жасанды интеллект технологияларын қолдану тәсілдері қарастырылады. Биологиялық қауіп факторларын ерте анықтау, мониторинг жүргізу және тәуекелдерді болжау мақсатында интеллектуалды жүйе архитектурасы ұсынылады. Машиналық оқыту алгоритмдері негізінде қауіп деңгейін автоматты бағалау әдісі сипатталады.

Кіріспе Өндірістік кәсіпорындарда биоқауіпсіздік талаптарын сақтау өнім сапасы мен қызметкерлердің денсаулығын қамтамасыз етудің негізгі шарты болып табылады. Әсіресе тамақ, фармацевтика және биотехнология салаларында биологиялық агенттердің таралу қаупі жоғары. Дәстүрлі бақылау әдістері зертханалық талдауға және қолмен тексеруге негізделгендіктен, жедел әрекет ету мүмкіндігі шектеулі. Сондықтан цифрлық трансформация жағдайында жасанды интеллект (ЖИ) негізіндегі автоматтандырылған мониторинг жүйелерін енгізу биоқауіпсіздікті басқарудың тиімді құралы болып табылады.

Зерттеу мақсаты Зерттеудің мақсаты – өндірістік ортада биоқауіпсіздікті қамтамасыз ететін жасанды интеллект негізіндегі интеллектуалды мониторинг жүйесінің моделін ұсыну.

Ұсынылған жүйе архитектурасы Жүйе үш деңгейден тұрады: деректерді жинау, өңдеу және шешім қабылдау. Бірінші деңгейде IoT сенсорлары, камералар және басқа да дереккөздер арқылы ортаның биоқауіпсіздік параметрлері (температура, ылғалдылық, биологиялық аэрозольдар концентрациясы) нақты уақыт режимінде жиналады. Екінші деңгейде

жиналған деректер алдын ала өңделіп, шудан тазартылады және машиналық оқыту алгоритмдеріне дайындалады. Үшінші деңгейде интеллектуалды талдау жүргізіліп, қауіп деңгейі бағаланады және автоматты ескерту қалыптастырылады.

Әдістер Деректерді талдау үшін қадағаланатын машиналық оқыту алгоритмдері және аномалияларды анықтау әдістері қолданылды. Модельдерді оқыту кезінде деректерді алдын ала өңдеу, белгілерді таңдау және валидация кезеңдері жүзеге асырылды. Қауіп деңгейін классификациялау үшін ықтималдықтық бағалау әдістері пайдаланылды. Модельдердің өнімділігі дәлдік (accuracy), толықтық (recall) және F1-өлшемі арқылы бағаланды.

Нәтижелер Эксперименттік модельдеу нәтижелері ұсынылған жүйенің қауіп деңгейін болжау дәлдігі 92–94% аралығында екенін көрсетті. Жүйе нақты уақыт режимінде ауытқуларды анықтап, жауапты тұлғаларға хабарлама жібереді. Бұл өндірістік шығындарды азайтып, санитарлық бақылау тиімділігін арттырады.

Қорытынды Жасанды интеллект негізіндегі биоқауіпсіздік жүйесі өндірістік ортаның қауіпсіздігін арттыруға мүмкіндік береді. Ұсынылған тәсіл биологиялық тәуекелдерді ерте анықтап, олардың алдын алуды қамтамасыз етеді. Болашақта модельді жетілдіру үшін үлкен деректерді талдау және адаптивті алгоритмдерді енгізу жоспарлануда.

Кілт сөздер: биоқауіпсіздік, жасанды интеллект, өндіріс, машиналық оқыту, IoT, мониторинг.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 68M18, 92C50

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] Russell S., Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach. Pearson, 2021.
- [2] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
- [3] World Health Organization Laboratory Biosafety Manual. WHO, 2020.
- [4] Zhang Y., Tao D. Artificial Intelligence in Industrial Applications. Springer, 2022.

БИОСИГНАЛДАРДЫ МУЛЬТИМОДАЛЬДЫ ТАЛДАУ ЖӘНЕ БАЙЕС ҚОРЫТЫНДЫСЫ НЕГІЗІНДЕ АЛЛЕРГИЯЛЫҚ РЕАКЦИЯЛАРДЫ ЕРТЕ БОЛЖАУДЫҢ ИНТЕГРАЦИЯЛАНҒАН ЖҮЙЕСІН ӘЗІРЛЕУ

Н.А. КҮРІШБАЙ¹, А.С. ШАЯХМЕТОВА²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

kurishbaynurbol@gmail.com

Аллергиялық аурулар таралуының өсуі және анафилаксия кезіндегі өлім қаупінің жоғары болуы мониторингтің дербестендірілген жүйелерін енгізуді талап етеді. Бұл жұмыста объективті деректерді (тері-гальваникалық реакция, жүрек ырғағының құбылмалылығы) біріктіріп талдауға арналған Байес сенім желілері (BBN) әдісіне негізделген жаңа жүйенің алгоритмі ұсынылды. Әзірленген теориялық модель дағдарыс жағдайын дәстүрлі әдістерден ертерек анықтауға және жалған іске қосылуларды азайтуға бағытталды.

Аллергиялық реакцияларды ерте болжау үшін интеграцияланған жүйе үш деңгейден тұратын архитектура ретінде жобаланды: деректерді жинау (болашақ тағылатын құрылғы), сигналдарды алдын ала өңдеу (цифрлық сүзгілеуі бар микроконтроллер) және интеллектуалды талдау (Байес классификаторы). Объективті биосигналдарды (тері-гальваникалық реакция және жүрек ырғағының құбылмалылығы) кешенді талдау үшін Байес сенім желілері (BBN) әдісі қолданылды. Сенсорлардан алынатын бастапқы деректердегі шуды жою және негізгі көрсеткіштерді бөліп алу мақсатында цифрлық сүзгілеу (Баттерворт сүзгісі) алгоритмдері жасалды. Жүйенің логикасын тексеру үшін MATLAB ортасында бастапқы математикалық модельдеу аппараттары құрастырылды.

Зерттеу барысында мультимодальды талдауға (GSR + HRV) негізделген жүйенің теориялық негіздемесі мен математикалық алгоритмі жасалды. Байестік тәсілді қолдану арқылы жалған іске қосылуларды барынша азайтып, дағдарысты көрінетін белгілер пайда болғанға дейін ертерек анықтаудың логикалық моделі құрастырылды. Алгоритмдер сигналдардың дивергенциясын (HRV төмендеген кезде GSR-дің аномальды өсуін) тіркеуге қабілетті екенін көрсетті.

Жұмыс нәтижесінде предиктивті медицина принципін іске асыруға бағытталған жүйенің алгоритмдік қамтамасыз етуінің негізі қаланды. Келесі кезеңде әзірленген математикалық модельді нақты аппараттық прототипке (тағылатын құрылғыға) енгізіп, клиникалық сынақтардан өткізу жоспарлануда.

Кілт сөздер: дербестендірілген медицина, жасанды интеллект, Байес желілері, тағылатын электроника, анафилаксия, GSR, HRV.

2020 Mathematics Subject Classification: 92C55, 62F15, 68T05

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] Alsulaiman D., et al. A Microneedle-Based IgE Aptasensor for Transdermal Detection of Food Allergy Sensitization, *ACS Materials Letters*, 2025.
- [2] Gonzalez B.D., et al. Using Bayesian Networks to Predict Urgent Care Visits in Patients Receiving Systemic Therapy, *JCO Clinical Cancer Informatics*, 2025.
- [3] Rastgoo S., et al. IoT-Based Stress Monitoring Using CNN for HRV-GSR Analysis, *IEEE Internet of Things Journal*, 2026.
- [4] Jeong C., et al. Sense and Learn: Recent Advances in Wearable Sensing and Machine Learning, *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2022.

СҰРАҚ-ЖАУАП ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ БІЛІМ ҚАЙШЫЛЫҚТАРЫН АЗАЙТУ ӘДІСТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Т. ҚҰРМЕТҚАН¹, Ө.Ж. МАМЫРБАЕВ²

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

²Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан

turdybek.narat86@gmail.com

Соңғы онжылдықта жасанды интеллект пен табиғи тілдерді өңдеу саласында ірі жетістіктердің бірі – үлкен тілдік модельдердің (LLMs) дамуы. GPT, BERT, LLaMA, Mistral, Qwen секілді архитектуралар адам тіліне жақын мәтін генерациялап, сұрақ-жауап, аударма, реферат жасау, мәтінді жалғастыру сияқты күрделі тапсырмаларды сенімді орындай алады. Қазіргі кезде әлемде бір-біріне бәсекеге түсе алған бірнеше көпмодальды LLM өнімдері жиі қолданыста.

Сұрақ-жауап (QA) жүйелері – LLM қолданылатын ең маңызды бағыттардың бірі. QA жүйелері пайдаланушы қойған сұраққа тікелей және дәл жауап қайтаруды көздейді. Олар білім беру, денсаулық сақтау, мемлекеттік қызмет көрсету, ғылыми зерттеу салаларында кеңінен қолданылады.

Алайда, LLM-дердің ең үлкен мәселелерінің бірі – білім қайшылығы. Бұл құбылыс модельдің ішкі параметрлерінде сақталған білім мен сыртқы контекст арасындағы сәйкессіздіктен туындайды. Нәтижесінде модель нақты дерекке сүйенбей, жалған жауап құрастырады. Мұндай құбылыс ғылымда галлюцинация (hallucination) деп аталады [1]. Галлюцинация құбылысы тілдік модельдердің тиімділігі мен қауіпсіздігіне елеулі әсер етеді. Ол модельдің мағыналық тұрғыда шынайы деректерден алшақтап кетуіне, жеке ақпараттың әдейі немесе кездейсоқ жариялануына, сондай-ақ алынған жауаптардың сенімділігі мен дәлдігінің төмендеуіне себеп болады. Сондықтан қазіргі заманғы зерттеулерде галлюцинацияны анықтау, болдырмау және азайту бағыттары негізгі міндеттердің бірі болып отыр [2].

Қазақ тіліндегі сұрақ-жауап жүйелерінің тиімділігін арттыру үшін модельдің ішкі параметрлеріндегі білім мен сыртқы контекст арасындағы байланысты күшейту қажет. Осы мақсатта зерттеу барысында бірқатар архитектуралық шешімдер мен әдістер қолданылды. Бұл әдістердің әрқайсысы модельдің дәлдігін арттыру, галлюцинацияны азайту және нақты дерекке сүйенуді қамтамасыз ету тұрғысынан маңызды рөл атқарады.

Модель архитектурасының жалпы құрылымы 1-суретте көрсетілгендей жалпы сұрақ-жауап жүйесінің архитектурасы бірнеше негізгі модульдерден тұрады. Пайдаланушыдан келіп түскен сұрақ алдымен іздеу модуліне түседі. Бұл модуль сұраққа сәйкес келетін мәтін үзінділерін деректер базасынан іздеп табады. Кейін бұл үзінділер сұрақпен бірге біріктіру қабатына беріледі. Мұнда контекст пен сұрақ біріктіріліп, тілдік модельге беріледі. Соңғы кезеңде үлкен тілдік модель (LLM) алынған ақпарат негізінде жауап құрастырады немесе контекст ішінен нақты үзіндіні таңдайды. Жауап пост-өңдеу модулінде морфологиялық нормализациядан өтіп, соңғы пайдаланушыға беріледі.



Сурет 1: Сұрақ-жауап жүйесінің алгоритмы

Бұл көпсатылы құрылым модельдің жауап сапасын арттырып қана қоймай, контекстке тәуелділігін күшейтіп, параметрлік білімге шамадан тыс сүйенуін азайтады.

Антифактілік (anti-factual) оқыту әдісі Модельдің ішкі параметрлерінде сақталған білім кейде дұрыс емес немесе ескірген ақпаратқа негізделіп, нақты контекстпен қайшылыққа түсуі мүмкін. Мұндай жағдайда модель шынайы жауаптың орнына жалған немесе бұрмаланған жауап бере алады. Осы мәселені шешу үшін зерттеу барысында антифактілік оқыту әдісі қолданылды.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{real}}(Q, C, A) + \lambda \mathcal{L}_{\text{false}}(Q, C', A'),$$

мұндағы Q – сұрақ, C – нақты контекст, C' – жалған контекст, A – дұрыс жауап, A' – бұрмаланған жауап, λ – жалған жауапты тану салмағы. Бұл әдістің негізгі идеясы – модельге әдейі бұрмаланған немесе қате мәліметтер беріп, оларды «жалған» ретінде тануды үйрету. Мысалы, «Қазақстанның астанасы – Алматы» сияқты жалған сөйлемдер енгізілгенде модель оларды дұрыс емес деп анықтап, контексттегі шынайы ақпаратты таңдауға машықтанады. Нәтижесінде модель параметрлік білімге сүйенбей, нақты дереккөздерге жүгінуді үйренеді. Бұл тәсіл галлюцинация деңгейін айтарлықтай төмендетіп, жүйенің сенімділігін арттырады [3].

Іздеуге негізделген генерация (RAG) әдісі QA жүйелерінің өнімділігін арттырудың тағы бір тиімді тәсілі – Retrieval-Augmented Generation (RAG) әдісі. Бұл әдістің негізгі ерекшелігі – үлкен тілдік модельдің тек ішкі біліміне емес, сонымен бірге сыртқы ақпарат көздеріне сүйенуіне мүмкіндік беру. RAG архитектурасының ықтималдық формуласы:

$$P(A | Q) = \sum_C P(C | Q) P(A | Q, C),$$

мұндағы: Q — сұрақ, C — іздеу нәтижесіндегі контекст, A — модель генерациялаған жауап, $P(C | Q)$ — сұраққа қатысты контексттің ықтималдығы, $P(A | Q, C)$ — сол контекст негізінде жауап құру ықтималдығы.

RAG архитектурасы екі негізгі компоненттен тұрады:

1. *Retriever* – сұраққа сәйкес келетін құжаттар немесе контекст үзінділерін үлкен деректер базасынан іздеп табады [4].
2. *Generator* – табылған контекст пен сұрақты бірге талдап, дәл және толық жауап құрастырады.

Осылайша, модель сұраққа жауап бергенде тек жатталған білімге емес, нақты және өзекті ақпаратқа сүйенеді. Бұл тәсіл әсіресе домендік (мысалы, тарих, медицина немесе заң) сұрақтарға жауап беру кезінде аса тиімді, себебі ол нақты деректерге негізделген жауаптарды қамтамасыз етеді.

Тиімді параметрмен қайта оқыту (PEFT) әдісі Қазақ тілі сияқты ресурсы шектеулі тілдерде үлкен тілдік модельдерді қайта оқыту есептеу ресурстарын көп талап етеді. Мұндай жағдайда Parameter-Efficient Fine-Tuning (PEFT) әдісі тиімді шешім болып табылады. Бұл әдіс модельдің барлық параметрлерін емес, тек шағын бөлігін ғана қайта бейімдеуге мүмкіндік береді [5].

PEFT-тің негізгі тәсілдеріне мыналар жатады:

- *LoRA (Low-Rank Adaptation)*: үлкен матрицаларды төмен рангілі жақындаулар арқылы бейімдейді.
- *Prefix-tuning*: модельдің енгізу сигналын кеңейтіп, қосымша контекст береді.
- *Adapters*: модельге шағын қосымша модульдер енгізіліп, жаңа доменге тез бейімделеді.

LoRA тәсілінде негізгі салмақ матрицасы W өзгеріссіз қалады, тек қосымша төмен ранкті матрицалар (A , B) үйретіледі:

$$W' = W + BA,$$

мұндағы W – бастапқы салмақтар, B және A – төмен ранкті матрицалар, $r \ll d$ – бейімделетін параметрлер саны аз екенін көруге болады. Бұл тәсіл есептеу ресурстарын 70%-ға дейін үнемдеуге және шағын деректермен де тиімді бейімдеуге мүмкіндік береді. Осы әдістерді қолдану арқылы модельді қазақ тіліндегі шағын көлемдегі деректермен де тиімді түрде қайта оқытуға болады. Нәтижесінде модельдің жауап сапасы артып, оқыту уақыты мен есептеу шығыны айтарлықтай азаяды.

Қазақ тіліндегі сұрақ-жауап жүйелерінде үлкен тілдік модельдердің білім қайшылықтарын азайтуға арналған тиімді әдістерімізді сынақтан өткіздік. Зерттеу нәтижеміз бойынша

Антифактілік деректер құру, Retrieval-Augmented Generation және Parameter-Efficient Fine-Tuning тәсілдері модельдің контекстке сүйенуін күшейтіп, галлюцинация деңгейін үш есеге дейін төмендетті.

Кілт сөздер: үлкен тілдік модельдер, сұрақ-жауап жүйелері, галлюцинация, RAG, PEFT, LoRA.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T50, 68T05, 68U15

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] Yeshpanov R., Efimov P., Boytsov L., Shalkarbayuli A., Braslavski P. KazQAD: Kazakh Open-Domain Question Answering Dataset, *Proceedings of the 2024 Joint International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC-COLING)*, Torino, Italy, pp. 4321–4330, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2405.10218.
- [2] Maxutov A., Myrzakhmet A., Braslavski P. Do LLMs Speak Kazakh? A Pilot Evaluation of Seven Large Language Models on Kazakh Tasks, *Proceedings of the SIGTURK Workshop on Turkic Languages and NLP*, Istanbul, Turkey, pp. 115–126, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2406.08472.
- [3] Touvron H., Martin L., Stone K., Albert P., Lample G. LLaMA: Open and Efficient Foundation Language Models, *arXiv preprint arXiv:2302.13971*, 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2302.13971.
- [4] Yang Y., Wang H., Lu P. XLQA: A Locale-Aware Multilingual Benchmark for Open-Domain Question Answering, *Proceedings of ACL 2025*, pp. 1352–1368, 2025. DOI: 10.18653/v1/2025.acl-main.102.
- [5] Hu E.J., Shen Y., Wallis P., Allen-Zhu Z., Li Y., Wang L., Chen W. LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models, *arXiv preprint arXiv:2106.09685*, 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2106.09685.
- [6] Lewis P., Perez E., Piktus A., Petroni F., Karpukhin V., Goyal N., Küttler H., Lewis M., Yih W.-t., Rocktäschel T., Riedel S., Kiela D. Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks, *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 33, pp. 9459–9474, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2005.11401.

НАН-ТОҚАШ ӨНІМДЕРІН ПІСІРУ ПРОЦЕСІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Т.Ж. МАЗАКОВ¹, Т.Т. ДУЗБАЕВ²

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан

²Халықаралық инженерлік-технологиялық университет, Алматы,

¹tmazakov@mail.ru, ²talgat.duzbaev@mail.ru

Мақалада нан-тоқаш өнімдерін өндірудің жай дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын көпсатылы процесінің математикалық модельдеуі қарастырылады. Жұмыстың маңыздылығы математикалық модельдеу және басқару теориясы әдістерін қолдана отырып технологиялық процестердің тиімділігі мен орнықтылығын арттыруға негізделген. Химия-технологиялық және жылу-зат алмасу процестерін талдауға арналған заманауи әдістер жүйенің динамикасын болжап қана қоймай, оның жұмыс жасауының тиімді режимдерін қалыптастыруға септігін тигізеді. Нан пісірудің технологиялық циклі келесі кезеңдерден тұрады: шикізатты жұмсау, қамырды илеу және ашыту, қалыптау, пісіру және дайын өнімді шығару. Процестің динамикасын сипаттау үшін уақыттың әрбір мезетіндегі әр кезеңдегі өнім мөлшерін сипаттайтын күй айнымалылары енгізіледі. Кезеңдер арасындағы өтулер температураға тәуелді қарқындылықтармен модельденеді, ал температура басқарушы әсер ретінде қарастырылады. Осылайша, есеп басқару әсеріне және бастапқы шарттарға шектеулер қойылған басқарылатын динамикалық жүйе түрінде қарастырылады. Бастапқы уақытта шикізат қоры максималды, ал аралық және соңғы өнімдер жоқ деп ұйғарылады. Басқарушы әсер — температура — технологиялық тұрғыдан рұқсат етілген мәндер аралығында шектелген. Негізгі мәселе жетімділік есебі ретінде тұжырымдалады: берілген уақыт ішінде жүйені қажетті көлемдегі дайын өнім шығаруды

қамтамасыз ететін күйге ауыстыратын температуралық режим бар ма, соны анықтау қажет. Бастапқы дифференциалдық теңдеулер жүйесі матрицалық түрге келтіріліп, әрі қарай екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне түрлендіріледі. Алынған теңдеу үшін бекітілген параметрлер жағдайында үздіксіз шешімнің бар болуы мен бірегейлігі дәлелденеді. Шешім Вольтерра операторы мен оның қайталама ядроларын пайдалану арқылы бірізді жуықтаулар әдісімен құрылады. Нәтижесінде жинақталатын функционалдық қатар түріндегі аналитикалық өрнек алынады, бұл жүйенің әртүрлі параметр мәндеріндегі мінез-құлқын зерттеуге мүмкіндік береді. Басқарылғыштық критерийі тұжырымдалып, ол температуралық режим, бастапқы шикізат қоры, процестің ұзақтығы және дайын өнімнің қажетті көлемі арасындағы байланысты анықтайды. Соңғы күйге жету алынған теңдікті қанағаттандыратын басқару параметрлерінің болуымен анықталатыны көрсетіледі. Жұмыстың практикалық маңызы — ұсынылған тәсілді әртүрлі табиғаттағы технологиялық процестерді талдау мен оңтайландыруда қолдану мүмкіндігі. Ұсынылған әдістер тек тағам өнеркәсібінде ғана емес, сонымен қатар сызықтық және квазисызықтық динамикалық модельдермен сипатталатын химиялық, энергетикалық және робототехникалық жүйелерді зерттеуде де пайдаланылуы мүмкін.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант №BR24992975) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: кинетика, математикалық модель, тамақ өнеркәсібі, басқару, нан-тоқаш өнімдері, технологиялық процесс, оңтайландыру, сандық модельдеу.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Соловьев М.Е., Соловьев М.М. *Компьютерная химия*, – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 536 с. ISBN: 5-98003-188-X
- [2] Акрамов Т.А. *Качественный анализ эволюционных уравнений, описывающих химические процессы* // Автореф. доктор.диссер. по спец. 05.13.16, Новосибирск: 1997. – 33 с.
- [3] Мазақова Ә.Т., Шаймерден Б.О., Сейлхан Б.Ж., Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А. *Химиялық реакторды басқару туралы* // *Материалы VII междунар. научно-практ. конф. «Информатика и прикладная математика»*, – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 536 с. ISBN: 5-98003-188-X

MDH ҚОЛДАНА ОТЫРЫП CG ӘДІСІ ҮШІН ПАРАЛЛЕЛЬ АЛГОРИТМДІ ӘЗІРЛЕУ

Б. МӘТКЕРІМ¹, Н.М. ҚАСЫМБЕК², Н.Қ. ҚАБДЫҒАЛИЕВ³,
М.Т. НАКИБАЕВА⁴

^{1,2,4}Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан

³Сафи Өтебаев атындағы Атырау Мұнай және Газ Университеті, Атырау, Қазақстан

¹bazargul.matkerim@gmail.com, ²nuryslam.qassymbek@gmail.com,

³nureek2001@gmail.com, ⁴m.nakibaeva@gmail.com

Бұл мақалада екі өлшемді Пуассон теңдеуін шешуге арналған жаңа параллель алгоритм ұсынылады. Алгоритм Күрделі градиент (CG) әдісіне негізделген және Көпөлшемді гомоморфизмдер (MDH) шеңберінде тұжырымдалған. MDH — көпөлшемді деректер құрылымдарында параллель есептеулерді өрнектеуге арналған алгебралық тәсіл. Пуассон теңдеуі екінші ретті ақырлы айырымдық сұлба арқылы дискреттеледі, нәтижесінде сирек, симметриялы және оң анықталған сызықтық жүйе алынады. CG әдісінің негізгі компоненттері, мысалы матрица-вектор көбейтуі, векторларды жаңарту және ішкі көбейтінділерді редукциялау операциялары, есептеу өлшемдері бойынша жүйелі түрде бөлу және параллель орындауды қамтамасыз ету үшін MDH арқылы қайта тұжырымдалды. MDH негізінде жүзеге асырылған CG алгоритмі

тізбекті нұсқамен, PPCG арқылы құрылған нұсқамен және cuBLAS кітапханасына негізделген нұсқамен салыстырылып бағаланды.

Нәтижелер MDH өнімділікті едәуір арттыратынын көрсетті: PPCG-мен салыстырғанда 2.2 есеге дейін жеделдеу байқалды, ал жинақталу қасиеттері эталондық шешіммен толық сәйкес келеді. Өнімділіктің артуы иерархиялық редукциялар, біріктірілген операторлық конвейерлер және MDH моделі қамтамасыз ететін автоматты жоспарлауды баптау мүмкіндіктері арқылы түсіндіріледі. Сонымен қатар, MDH құрылымы «дұрыстығы құрылымнан туындайтын» қағидатты қамтамасыз етіп, GPU архитектуралары арасында жоғары өнімділік пен тасымалданымдылықты ұсынады. Зерттеу нәтижелері MDH-тің итерациялық шешушілер үшін бірыңғай абстракция беретінін және көпөлшемді сандық алгоритмдерді гетерогенді платформаларда жүзеге асыруда болашағы зор құрал екенін растайды. Бұл нәтижелер жоғары өнімді есептеулер ортасында өнімділік тасымалданымдылығы мен алгоритмдік өрнектілікті қатар қамтамасыз етуде MDH-тің қуатты құрылым екенін көрсетеді.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант №AP23488807) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: күрделі градиент әдісі, Пуассон теңдеуі, көпөлшемді гомоморфизмдер, GPU, параллель алгоритмдер, өнімділік тасымалданымдылығы.

2020 Mathematics Subject Classification: 65F10, 65Y20

ӘДЕБИЕТ

- [1] Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd ed.; SIAM: Philadelphia, PA, USA (2003).
- [2] Barrett, R., Berry, M., Chan, T.F., et al. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd ed.; SIAM: Philadelphia, PA, USA (1994).
- [3] Rasch, A., Schulze, R., Gorlatch, S. Generating Portable High-Performance Code via Multi-Dimensional Homomorphisms, in: *Proceedings of the 28th International Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT)*, Seattle, WA, USA, 21–25 September 2019.

ГИБРИДТІ ИНТЕЛЛЕКТУАЛДЫ КІРІСТІЛІКТІ БОЛЖАУ ЖҮЙЕСІ: ФУНДАМЕНТАЛДЫ ФАКТОРЛАРДЫ ЖӘНЕ НЕЙРОЖЕЛІЛІК ТҮЗЕТУДІ ИНТЕГРАЦИЯЛАУ

Г.Ш. МУСАГУЛОВА¹, Қ.С. БАЙШОЛАНОВА²

¹Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Қызылорда, Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹gulnurmussagulova88@gmail.com, ²baisholanova.k@gmail.com

Қаржылық уақыт серияларын болжау олардың жоғары сызықтық емес, тұрақсыз және шулы болуына байланысты деректерді өндіру саласындағы ең қиын міндеттердің бірі болып қала береді.

Классикалық авторегрессия және интеграцияланған жылжымалы орташа (ARIMA) модельдері дәстүрлі түрде сызықтық трендтерді түсірудің тиімді құралы ретінде танылады, бірақ олар нарықтың жоғары құбылмалылық кезеңдеріне тән күрделі сызықтық емес тәуелділіктерді модельдей алмайды. Сонымен қатар, қайталанатын нейрондық желілер, атап айтқанда ұзақ мерзімді тәуелділікті модельдеуде жоғары нәтижелерді көрсететін ұзақ мерзімді жад архитектурасы (LSTM) кеңінен қолданылады. Дегенмен, таза нейрондық желі тәсілдері көбінесе «шулы» қаржылық деректерге қайта даярлау қаупі және экономикалық интерпретацияның болмауы үшін сынға ұшырайды. Бұл мәселені шешу үшін Arima-LSTM типті гибридті архитектураларды ұсынамыз, мұнда статистикалық модель сызықтық компонентті бөліп көрсетеді, ал нейрондық желі сызықтық емес және стохастикалық компонент болып табылатын қалдықтардан оқытылады. ARIMAX модификациясын қолдану экзогендік айнымалыларды одан әрі

біріктіруге мүмкіндік береді, бұл сыртқы макроэкономикалық шоктарды есепке алу үшін өте маңызды.

Біз ұсынатын гибриді интеллектуалды жүйе көп деңгейлі аналитикалық құбыр тұжырымдамасына негізделген, мұнда әр кезең деректерді өңдеудің нақты мәселесін шешеді: факторларды құрылымдық сәйкестендіруден бастап болжамды сызықтық емес түзетуге дейін.

1 кезең: Кобб-Дуглас функциясына негізделген факторларды анықтау, алгоритмдік қамтамасыз етудің бірінші кезеңі экономикалық субъектінің кірістілігін анықтайтын іргелі факторларды анықтау болып табылады. Ол үшін Кобб-Дуглас өндірістік функциясы қолданылады. Математикалық моделі түрі:

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

Онда Y — қорытынды көрсеткіші (кірістілігі), L — еңбек шығындары, K капитал — A — жиынтық факторная өнімділік.

2 кезең: сызықтық уақыт қатарын модельдеу (ARIMAX). Екінші кезеңде таңдалған факторлар сызықтық трендтер мен циклдік компоненттерді түсіру үшін ARIMAX моделіне біріктіріледі. Стандартты ARIMA-дан айырмашылығы, бұл модель Қазақстан Республикасының сыртқы макроэкономикалық көрсеткіштерінің әсерін ескереді. Модель теңдеуі:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^m \beta_k X_{k,t} + \eta_t$$

Мұндағы $x_{k,t}$ - бірінші кезеңде алынған экзогендік факторлардың векторы. Модель серияның негізгі динамикасын анықтайды, бірақ болжам қалдықтары ретінде көрсетілген сызықтық емес компонентті шешілмеген күйінде қалдырады: $\epsilon_t = y_t - \hat{y}_{linear,t}$.

3 кезең: сызықтық емес қалдықтарды нейрондық түзету қатені азайту және стохастикалық тербелістерді модельдеу үшін қайталанатын LSTM нейрондық желісі қолданылады. Желі архитектурасы ARIMAX моделінің "шулы" қалдықтарымен жұмыс істеу үшін арнайы жасалған.

Архитектура параметрлері: кіріс деңгейі: ретроспективалық терезе - 50 күн.

Жасырын қабаттар: әрқайсысында 50-64 нейроннан тұратын екі дәйекті LSTM қабат.

Реттеу: қайта оқытуды болдырмау үшін қабаттар арасында 0.2 коэффициенті бар Dropout қабаттары біріктірілген.

Белсендіру функциясы: сигмоид.

Нейрондық желіні оқыту Adam оңтайландырғышын және MSE жоғалту функциясын қолдана отырып, қалыпқа келтірілген деректерде жүзеге асырылады.

Соңғы болжам сызықтық және сызықтық емес модельдердің нәтижелерін аддитивті біріктіру арқылы қалыптасады. Каскадты өңдеу алгоритмі LSTM тек статистикалық әдіспен түсірілмеген қателерді түзетуге мамандануын қамтамасыз етеді.

$$\hat{y}_{hybrid,t} = \hat{y}_{linear,t} + \hat{\epsilon}_{LSTM,t}$$

Мұндағы $\hat{y}_{linear,t}$ — ARIMAX-тен алынған мән, ал $\hat{\epsilon}_{LSTM,t}$ — нейрондық желі болжаған қателік мөлшері. Мұндай интеграция жүйенің нарықтық күйзелістерге жоғары төзімділігіне қол жеткізуге және оқшауланған тәсілдермен салыстырғанда болжау дәлдігін (MAPE) 2-3% арттыруға мүмкіндік береді.

Ұсынылған алгоритмді техникалық іске асыру үшін деректерді өндіру және қаржылық модельдеу үшін ең дамыған кітапхана экожүйесі бар Python бағдарламалау тілі таңдалды. Бағдарламалық жасақтама модульдік архитектура түрінде жасалған, бұл болжаудың әр кезеңін тәуелсіз жөндеуге мүмкіндік береді.

Эконометрикалық Arimax моделін құру үшін экзогендік айнымалылардың интеграциясын және диагностикалық сынақтарды жүргізуді қолдайтын statsmodels кітапханасы пайдаланылды. Нейрондық желі компоненті жоғары деңгейлі Keras API бар TensorFlow шеңберіне негіз-

делген. Деректерді өңдеу, көрсеткіштерді есептеу және атрибуттық инженерия scikit-learn, pandas және numpy кітапханаларының көмегімен жүзеге асырылады.

Барлық кіріс уақыт қатарлары $[-1, 1]$ ней диапазонында қалыпқа келтірудің Min-Max әдісімен масштабталды, бұл нейрондық желіні оқытудың градиенттік әдістерінің конвергенциясының тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Әзірленген жүйенің тиімділігін бағалау үшін гибриді алгоритмді оның дербес компоненттерімен салыстырмалы тестілеу жүргізілді. Алынған мәліметтерге сәйкес, екі сатылы бөлу стратегиясы бар гибриді модель MAPE мәніне 2.60% жетеді, бұл оның жоғары болжау қабілетін растайды. Статистикалық талдау көрсеткендей, arimax автономды моделі трендтерді жақсы басқарады, бірақ нарықтың күрт күйзелістеріне сезімтал емес. Өз кезегінде, жалғыз lstm желісі "шулы" қаржылық деректерде қайта оқытуға бейім.

Осылайша, жұмыс нәтижелері классикалық экономикалық заңдар мен заманауи ат технологияларының синтезі инвестицияларды стратегиялық басқарудың сенімді құралын жасауға мүмкіндік береді деген гипотезаны қолдайды. Жүйенің одан әрі дамуы биржалық нарықтардағы өзара әрекеттесуді дәлірек модельдеу үшін күшейтілген мультиагентті оқыту әдістерін енгізумен байланысты болуы мүмкін.

Кілтті сөздер: гибриді зияткерлік жүйелер, табыстылықты болжау, ақпараттық жүйелер LSTM нейрондық желісі, ARIMAX моделі, Кобб-Дуглас функциясы, инвестициялық саясат, динамикалық режим

ӘДЕБИЕТ

- [1] Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory, *Neural Computation*, 9:8 (1997), 1735–1780.
- [2] Fischer T., Krauss C. Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions, *European Journal of Operational Research*, 270:2 (2018), 654–669.
- [3] Pokou F., Sadefo Kamdem J., Benhmad F. Hybridization of ARIMA with learning models for forecasting of stock market time series, *Computational Economics*, 63:4 (2024), 1349–1399.
- [4] Hajirahimi Z., Khashei M. Hybrid structures in time series modeling and forecasting: a review, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 86 (2019), 83–106.

ТҮРІК ТІЛІНДЕ СӨЙЛЕУДІ ТАҢУ ЖӘНЕ МӘТІНДІ ҚОРЫТЫНДЫЛАУДЫҢ НЕЙРОНДЫҚ МОДЕЛЬДЕРІН ЖАСАУ ЖӘНЕ ЗЕРТТЕУ

Н.Г. ОМАРХАЛИЕВА¹, У.А. ТУКЕЕВ²

^{1,2}эл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹nazekaomar749@gmail.com, ²ualsher.tukeyev@gmail.com

Қазіргі уақытта сөйлеуді автоматты түрде тану (Automatic Speech Recognition, ASR) және мәтінді автоматты қорытындылау табиғи тілдерді өңдеу саласының маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Түрік тілі агглютинативті тілдер қатарына жатады, сондықтан сөздердің морфологиялық құрылымы күрделі болып келеді. Бұл ерекшелік нейрондық модельдерді оқыту мен бағалау үдерісін күрделендіреді.

Зерттеу мақсаты – түрік тіліндегі сөйлеуді тану модельдерінің тиімділігін салыстыру және алынған мәтіндерді автоматты түрде қорытындылау әдістерін зерттеу.

Сөйлеуді тану есебінің формализациясы.

Аудиожазба $X = \{x_t\}_{t=1}^T$, мұнда x_t — уақыт сәтіндегі акустикалық белгілер векторы. Сөйлеуді автоматты тану есебі келесі бейнелеуді табудан тұрады:

$$\hat{Y} = F_{\theta}(X), \quad (1)$$

мұнда $\hat{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ — болжанған мәтіндік тізбек, θ — модель параметрлері. Сөйлеуді тану сапасы Word Error Rate (WER) метрикасы арқылы бағаланады:

$$WER = \frac{S + D + I}{N}, \quad (2)$$

мұнда S — сөздерді алмастыру саны, D — өшіру саны, I — қосу саны, N — эталондық мәтіндегі сөздер саны.

Мәтінді қорытындылау есебінің формализациясы.

Берілген мәтін $T = \{w_i\}_{i=1}^M$. Мәтінді автоматты қорытындылау келесі түрде сипатталады:

$$S = G_\phi(T), \quad (3)$$

мұнда S — алынған қорытынды мәтін, ϕ — модель параметрлері.

Анықтама 1. Абстрактивтік қорытындылау деп бастапқы мәтіннің мағынасын сақтай отырып, жаңа сөйлемдер құрастыру арқылы қысқаша мазмұнын жасау процесі аталады.

Сөйлеуді тану үшін Whisper Large және MMS сияқты заманауи нейрондық модельдер қарастырылады. Бағалау барысында модельдердің дәлдігі, тұрақтылығы және шу жағдайындағы өнімділігі салыстырылады.

Алдын ала нәтижелер трансформер негізіндегі модельдердің қысқа және орташа ұзындықтағы аудиожазбаларда жоғары дәлдік көрсететінін көрсетеді. Алайда ұзақ аудиожазбаларда қателік көрсеткіші артуы мүмкін.

Қорытындылау кезеңінде экстрактивтік және абстрактивтік тәсілдер салыстырылып, олардың түрік тілінің морфологиялық ерекшеліктеріне бейімділігі талданады. Қорытындылау сапасын бағалау үшін ROUGE метрикаларын қолдану жоспарлануда.

Бұл зерттеу түрік тіліндегі ASR және мәтінді қорытындылау жүйелерін жетілдіруге бағытталған. Нәтижелер дауыстық көмекшілерді, автоматты субтитрлеу жүйелерін және ақпараттық талдау платформаларын дамытуда қолданылуы мүмкін.

Кілтті сөздер: сөйлеуді тану, ASR, мәтінді қорытындылау, түрік тілі, нейрондық желілер, трансформер модельдері.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T50, 68T07, 68T10

ӘДЕБИЕТ

- [1] Vaswani A. et al. Attention is All You Need. NeurIPS, 2017.
- [2] Radford A. et al. Whisper: Robust Speech Recognition via Large-Scale Weak Supervision, 2022.
- [3] Lewis M. et al. BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation. ACL, 2020.

ҚАЗАҚ ТІЛІНЕ АРНАЛҒАН ТРАНСФОРМЕРЛІК МОДЕЛЬДЕРДІ КОМПРЕССИЯЛЫҚ-САНАЛЫ ОҒТАЙЛАНДЫРУ: ДИСТИЛЛЯЦИЯ ЖӘНЕ КВАНТИЗАЦИЯНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

А.Ж. САЙЛАУ¹, М.Е. МАНСУРОВА², Ә.Ғ. ОСПАН³

^{1,2,3}әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Жасанды интеллект және Big Data кафедрасы,
Алматы, Қазақстан

¹sailauaisha@mail.ru, ²madina.mansurova@kaznu.edu.kz, ³assel.ospan@kaznu.edu.kz

Ғылыми жасанды интеллекттің қарқынды эволюциясы ресурстық базасы шектеулі тілдер үшін теориялық тұрғыдан дәйектелген және есептеу тиімділігі жоғары модельдер әзірлеу

мәселесін стратегиялық басымдық деңгейіне шығарады [1]. Агглютинативті морфологиялық құрылымымен, күрделі сөзжасам механизмдерімен және таңбаланған мәтіндік корпусардың салыстырмалы түрде шағын көлемімен сипатталатын қазақ тілі ірі параметрлі модельдерді үлестірімдік, морфологиялық және статистикалық факторларды есепке алмай тікелей масштабтау жеткіліксіз болатын тілдік жүйе ретінде қарастырылады [2].

Осы жұмыста қазақ тіліндегі жаңалық мәтіндерін көпклассты жіктеу міндетіне бағытталған иерархиялық компрессиялық-саналы оқыту парадигмасы ұсынылып, эмпирикалық валидациядан өткізіледі [3]. Ұсынылған әдіснамалық құрылым төрт өзара тәуелді кезеңді қамтиды: (1) деректер үлестірімін бақыланатын тұрақтандыру; (2) жоғары параметрлі мұғалім-модельді оқыту; (3) жұмсақ мақсаттық үлестірімдер негізінде білімді дистилляциялау; (4) модель параметрлерінің сандық дәлдігін кезең-кезеңімен редукциялау (INT8 және 4-bit NF4 форматтары).

Аталған зерттеуде компрессия постфактум қысқарту процедурасы ретінде емес, керісінше есептеу ресурстары шектеулі жағдайда шешуші шекаралар геометриясын ықшам гипотезалық кеңістікке проекциялаудың құрылымдық-математикалық механизмі ретінде интерпретацияланады.

Кластар арасындағы айқын дисбалансты әлсірету мақсатында үлестірімді бақылауға негізделген сүзгілеу стратегиясы қолданылды [4]. Бұл тәсіл градиенттік бағалаулар дисперсиясын төмендетіп, оқыту траекториясының тұрақтылығын арттыруға және эмпирикалық тәуекелдің мажоритарлық кластар бағытына жүйелі ығысуын шектеуге мүмкіндік береді. Мұғалім-модель ретінде 560 млн параметрі бар, Meta AI әзірлеген XLM-RoBERTa Large архитектурасы пайдаланылды. Бұл модель көптілді семантикалық кеңістікте кластар ықтималдықтарының ақпараттық қанық және құрылымданған үлестірімін қалыптастырады.

83 млн параметрлі студент-модель температурамен масштабталған логиттер арасындағы KL-дивергенцияны және кросс-энтропиялық шығынды біріктіретін композициялық мақсаттық функция арқылы оқытылды. Мұндай формализация студент-модельдің тек қатаң белгілерге сәйкестігін ғана емес, сонымен қатар мұғалім-модель индукциялаған ықтималдықтық құрылымды аппроксимациялауын қамтамасыз етеді.

Мұғалім-модельдің шығын функциясы:

$$\mathcal{L}_{teacher} = \mathcal{L}_{CE}(y, p_{teacher}), \quad (1)$$

Студент-модель үшін жиынтық мақсаттық функция:

$$\mathcal{L}_{student} = \alpha \mathcal{L}_{CE}(y, p_{student}) + (1 - \alpha) \mathcal{L}_{KD}, \quad (2)$$

мұндағы дистилляциялық құрамдас:

$$\mathcal{L}_{KD} = T^2 \cdot KL \left(\sigma \left(\frac{z_{teacher}}{T} \right) \parallel \sigma \left(\frac{z_{student}}{T} \right) \right), \quad (3)$$

Температурамен масштабталған softmax функциясы:

$$\sigma(z_i/T) = \frac{\exp(z_i/T)}{\sum_j \exp(z_j/T)}. \quad (4)$$

Эксперименттік нәтижелер жұмсақ дистилляцияның 6,7 еселік құрылымдық редукция жағдайында сапалық метрикаларды сақтай алатынын көрсетті: Масго F1 = 0,6701 және дәлдік = 0,6548, бұл мұғалім-модель деңгейімен салыстырмалы. INT8 форматына дейінгі квантизация статистикалық тұрғыдан мәнді деградация туындатпайды, бұл салмақ матрицалары спектрінің салыстырмалы тегістігін және энкодерлік репрезентациялардың дөңгелектеу шуының орташа деңгейіне орнықтылығын көрсетеді.

Ал 4-биттік NF4 квантизациясы Масго F1 көрсеткішінің 0,6510-ға дейін төмендеуіне алып келеді. Деградация негізінен морфологиялық тұрғыдан күрделі және семантикалық қабаттасуы жоғары кластарда шоғырланған. Соған қарамастан, бұл төмендеу селективті сипатқа ие және шешуші шекаралардың жаһандық топологиялық құрылымын бұзбайды.

Қателерді талдау модель сапасының лимиттеуші факторы архитектуралық сыйымдылықтан гөрі деректер үлестірімінің ішкі құрылымдық қасиеттері екенін айқындайды. Атап айтқанда, категорияаралық семантикалық көпмәнділік, журналистік тақырыптардың өзара қиылысуы және жоғары морфологиялық вариативтілік негізгі қателік көздері болып табылады. Бұл нәтиже модель сапасының жоғарғы шегі деректер кеңістігінің құрылымдық сипаттамаларымен детерминацияланады деген гипотезаны эмпирикалық тұрғыдан қолдайды.

Ұсынылған интеграцияланған тәсіл – үлестірімді тұрақтандыру, құрылымдық білімді дистилляциялау және көпдеңгейлі сандық компрессия – математикалық негізделген қысу механизмдерінің семантикалық дәлдікті елеулі жоғалтусыз, қазақ тіліне арналған трансформерлік модельдерді ресурсы шектеулі есептеу инфрақұрылымында тиімді орналастыруға мүмкіндік беретінін көрсетеді. Бұл нәтижелер мәтіндерді автоматтандырылған талдау, медиамониторинг және зияткерлік деректер өңдеу жүйелерін енгізу тұрғысынан қолданбалы маңызға ие әрі морфологиялық тұрғыдан бай, корпустары шектеулі басқа тілдерге трансферлеуге жарамды әдіснамалық негіз қалыптастырады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылды, грант № BR24993001 – «Қазақ тілін дамыту мен технологиялық прогресті жеделдетуді қамтамасыз етуге арналған ірі тілдік модельді (LLM) әзірлеу».

Кілтті сөздер: трансформерлік модельдер, компрессия, дистилляция, квантизация, қазақ тілі, жасанды интеллект.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T50, 68T07, 68Q32

ӘДЕБИЕТ

- [1] Cruz J. C. B. *Extracting general-use transformers for low-resource languages via knowledge distillation*, Proceedings of the first workshop on language models for low-resource languages (2025), 219–224.
- [2] Karyukin V. et al. The neural machine translation models for the low-resource Kazakh–English language pair, *PeerJ Computer Science*, **9** (2023), e1224.
- [3] Luo Y. et al. Beyond Decoder-only: Large Language Models Can be Good Encoders for Machine Translation, *Findings of the Association for Computational Linguistics: ACL 2025* (2025), 9399–9431.
- [4] Kadyrbek N. et al. The development of small-scale language models for low-resource languages, with a focus on kazakh and direct preference optimization, *Big Data and Cognitive Computing*, **9:5** (2025), 137.

YOLOv11 АРХИТЕКТУРАСЫ НЕГІЗІНДЕ ЖОЛ ТӨСЕМІНІҢ ЗАҚЫМДАНУЫН НАҚТЫ УАҚЫТ РЕЖИМІНДЕ ЖОҒАРЫ ДӘЛДІКПЕН АНЫҚТАУ

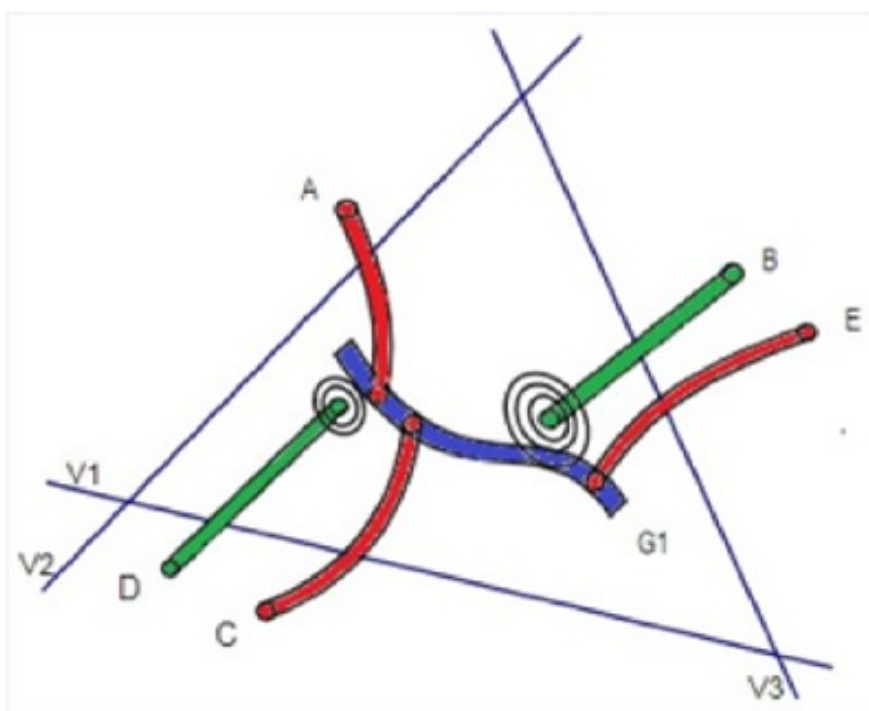
А.К. САМБЕТБАЕВА

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан
sambetbaeva@gmail.com

YOLOv11 архитектурасы жол төсемінің зақымдануларын нақты уақыт режимінде автоматты түрде анықтауға мүмкіндік беретін заманауи нейрондық детекция жүйесі ретінде жоғары тиімділігімен ерекшеленеді. Жол-құрылыс инфрақұрылымының сенімділігі көлік қауіпсіздігіне тікелей әсер ететіндіктен, жарықтар, шұңқырлар, қабыршақтану, доңғалақ іздері сияқты зақымдануларды ерте кезеңде дәл анықтау маңызды міндет болып табылады. Дәстүрлі визуалды тексеру әдістерінің баяулығы және адам факторына тәуелділігі оларды кең ауқымды қолдануға шектеу қояды. Осыған байланысты нақты уақыт режимінде жұмыс істейтін, жоғары дәлдікке ие компьютерлік көру шешімдері өзекті болып отыр.

YOLOv11 архитектурасы жетілдірілген көпмасштабты механизмдері арқылы әртүрлі геометриялық пішіндегі зақымдануларды тұрақты тануға қабілетті. Модельдің есептеу құрылымы тиімді оңтайландырылғандықтан, ол ресурсы шектеулі құрылғыларда да жоғары жылдамдықпен жұмыс істей алады, бұл өз кезегінде дрондарда, роботтандырылған жүйелерде және мобильді диагностика кешендерінде қолдануды мүмкін етеді. Жол төсемінің айнымалы фактурасы, жарықтандырудың тұрақсыздығы мен көлеңкелердің пайда болуы сияқты күрделі жағдайлар детекция сапасына әсер ететіндіктен, деректерді жасанды кеңейту әдістері осы ерекшеліктерді барынша ескеретіндей етіп қайта конфигурацияланады [1].

YOLOv11-де қолданылатын anchor-free детекция айтарлықтай деформацияланған және созылыңқы жарықтарды жоғары дәлдікпен бөліп көрсетуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, модельдің бейімделген шығын функциясы (loss function) аз көрінетін немесе жұқа жарықтарды тану қабілетін арттырады. Зерттеу барысында алынған нәтижелер YOLOv11-дің дәстүрлі YOLO-нұсқаларымен салыстырғанда дәлдік пен жылдамдық көрсеткіштерінде тұрақты артықшылыққа ие екенін көрсетті. Бұл архитектура жол активтерін басқару жүйелеріне интеграцияланған жағдайда жөндеу және қызмет көрсету жоспарларын автоматтандыруды айтарлықтай жеңілдетеді. Модельдің нақты уақыттағы детекция мүмкіндігі апаттық жағдайлардың алдын алуға және жол-көлік оқиғаларының санын азайтуға үлес қосады. Сонымен қатар, алгоритмді ауқымды мониторинг желілеріне енгізу жол сапасын бағалаудың объективтілігін қамтамасыз етеді. YOLOv11-дің әрі қарайғы дамуы сегментациялық нейрожелілермен біріктіру немесе көпмодальды датчиктермен синергия құру арқылы жүйенің аналитикалық мүмкіндіктерін кеңейтуді көздейді.



Сурет 1: «Binding-pointing-crossword» негіздемесі

Жарықтарды анықтауда «binding-pointing-crossword» негіздемесін пайдалану көпөлшемді сипаттамаларды бөліп көрсете отырып, аймақтар мен қиылыстарды нақты ажыратуға мүмкіндік берді. Жарықтардың бейнесіндегі көзге көрінбейтін микрожарықтарды анықтау осы негіздеменің көмегімен жүзеге асты. Егер микрожарықтарды уақытында анықтамаса, олардың ішіне әртүрлі лас заттар және су кіріп, жарықтың ұлғаюына алып келеді [2].

Зерттеу барысында жол төсемінің әртүрлі типтегі зақымдануларын қамтитын кескіндер жиынтығы дайындалды: бойлық және көлденең жарықтар, шұңқырлар, жамаулар, қабыршақтану және деформацияланған аймақтар. Деректер жиыны жарықтық, перспективалық

бұрмалану, түс ауытқуы және шу моделдері арқылы кеңейтіліп, модельдің нақты жағдайларда жұмыс істеу қабілеті арттырылды. YOLOv11 моделін жол фактурасының күрделі құрылымына бейімдеу мақсатында әртүрлі конфигурациялар салыстырылып, көпмасштабты ерекшеліктерді біріктіру модульдері оңтайландырылды. Сонымен қатар, детекция механизмі жарықтарды сенімді тануға мүмкіндік берді.

Эксперименттік нәтижелер ұсынылған модельдің жоғары тиімділігін көрсетті: mAP@0.5 метрикасы 92,8%-ға, mAP@0.5:0.95 68,4%-ға жетті. Бұл көрсеткіштер модельдің нақты уақыттағы бейнеағындарды кідіріссіз өңдеп, бірнеше зақымдану типін бір мезетте дұрыс анықтай алатынын дәлелдейді. Ұсақ жарықтарды тану сезімталдығы 19%-ға артса, жалған детекция деңгейі 12%-ға төмендеді. Нәтижесінде YOLOv11 жол-көлік инспекциясы, дрондық мониторинг, интеллектуалды жол жүйелері және қалалық инфрақұрылымды басқару платформалары сияқты қолданбалы салаларда тиімді шешім ретінде қолдануға жарамды.

Жалпы алғанда, YOLOv11 архитектурасына негізделген ұсынылған тәсіл жол төсемінің зақымдануларын автоматты түрде, нақты уақыт режимінде және жоғары дәлдікпен анықтауға мүмкіндік береді. Модель жол инфрақұрылымын цифрландыру, жөндеу жұмыстарын жоспарлау және төтенше жағдайлардың алдын алу процестерін айтарлықтай оңтайландырады. Болашақта әдісті сегментациялық нейрондық желілермен біріктіру және көпмодальды сенсорлық деректерді қолдану мүмкіндіктері қарастырылады.

Кілт сөздер: YOLOv11, жол төсемі, зақымдануларды анықтау, нейрондық желілер, нақты уақыт детекциясы, компьютерлік көру.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 68T45, 68U10

ӘДЕБИЕТ

- [1] Woo, S., Park, J., Lee, J. Y., & Kweon, I. S. CBAM: Convolutional block attention module, *In Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pp. 3–19, 2018.
- [2] Cha, Y. J., Choi, W., & Buyukozturk, O. Deep learning-based crack damage detection using convolutional neural networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, No. 32(5), pp. 361–378, 2017.

СПУТНИКТИК ДЕРЕКТЕР МЕН МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУДЫ ҚОЛДАНА ОТЫРЫП, АУА САПАСЫН БАҚЫЛАУ ЖҮЙЕСІНІҢ МОДУЛІН ӨЗІРЛЕУ

А. СЫДЫҒАЛЫ¹, А. АТАНИЯЗОВА²

^{1,2}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹geraasydygalievaa@gmail.com, ²aissulu.12@mail.ru

Дәстүрлі жер үсті ауа сапасын бақылау станциялары уақыттық ажыратымдылығы жоғары деректер бергенімен, олардың кеңістіктік қамтуы шектеулі және оларды қала бойынша жиі орналастыру экономикалық тұрғыдан өте қымбатқа түседі. Осы шектеулерді еңсеру үшін Google Earth Engine сияқты бұлтты платформалар арқылы қашықтықтан зондтау (Sentinel-5P) деректерін өңдеу аумақты толық қамтитын тиімді әрі өзекті шешім болып табылады [1]. Қазіргі таңда қалалық ауаның ластануын болжауда жерсеріктік бақылаулар мен машиналық оқытуды біріктіру ең озық бағыттардың бірі ретінде танылуда [2]. Әсіресе, Қазақстанның ірі мегаполистеріндегі ауа сапасының төмендеуі және оның денсаулыққа кері әсері бұл мәселенің экологиялық қауіптілігін арттыра түседі [3]. Осыған орай, ұлттық гидрометеорологиялық қызметтердің (мысалы, Қазгидромет) жер үсті деректері мен спутниктік мәліметтерді кешенді түрде талдау зерттеудің ғылыми әрі практикалық маңыздылығын айқын көрсетеді [4].

Зерттеудің өзектілігі мен мақсаты Алматы қаласының тау бөктерінде орналасуы мен қысқы инверсиялық құбылыстар атмосферада ластаушы заттардың шамадан тыс жиналуына әкеліп, тұрғындар денсаулығына тікелей қауіп төндіреді. Ресми статистикалық және халықаралық экологиялық ұйымдардың мәліметтеріне сүйенсек, Алматыдағы қыс мезгіліндегі

PM2.5 бөлшектерінің шоғырлануы 100–150 мкг/м³-қа дейін жетеді. Бұл Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымының белгілеген тәуліктік қауіпсіздік нормасынан (15 мкг/м³) шамамен 7–10 есеге жоғары. Қазақстанда ауаның ластануы жыл сайын мыңдаған адамның тыныс алу және жүрек-қан тамырлары ауруларына шалдығуына әкеліп, экономикаға айтарлықтай нұқсан келтіреді. Бұл нақты сандар ластануды бақылау мен кеңістіктік болжаудың инновациялық модулін шұғыл енгізу қажеттілігін дәлелдейді.

Әдістер Зерттеу барысында спутниктік деректер мен жер үсті көрсеткіштері арасындағы бейсызықтық байланыстарды анықтау үшін бірнеше машиналық оқыту модельдері пайдаланылды. Деректерді алдын ала өңдеу, нормализациялау және маңызды белгілерді іріктеу процестерінен кейін дәстүрлі сызықтық регрессия, сондай-ақ ансамбльдік Random Forest және XGBoost алгоритмдері оқытылып, салыстырмалы талдау жасалды.

Нәтижелер Нәтижесінде базалық модельдер (сызықтық регрессия) төмен көрсеткіш ($R^2 = 0.62$, RMSE = 21.4) берсе, Random Forest алгоритмі ең жоғары тиімділікті ($R^2 = 0.86$, RMSE = 11.2) көрсетті, ал XGBoost оған өте жақын нәтиже ($R^2 = 0.84$) ұсынды. Бұл ансамбльдік тәсілдердің көпөлшемді экологиялық деректерді өңдеудегі айтарлықтай артықшылығын дәлелдейді. Модельді бағалау барысында кросс-валидация әдістері қосымша қолданылып, оның жаңа деректерге бейімделу қабілеті мен тұрақтылығы толық дәлелденді.

Қорытынды Әзірленген бағдарламалық модуль қала экологиясын басқарудағы технологиялық алшақтықты азайтып, қымбат жер үсті сенсорларына тәуелділікті төмендетеді. Нақты уақыт режимінде ауа сапасының жоғары ажыратымдылықтағы картасын ұсыну арқылы бұл жоба тиімді экологиялық шешімдер қабылдауға көмектеседі. Сонымен қатар, жоба қазіргі таңда Алматы қаласының деректері негізінде жасалғанымен, жүйенің икемді архитектурасы оны болашақта Қазақстанның өзге де қалаларына оңай масштабтауға толық мүмкіндік береді. Келешекте бұл бағдарламалық шешімді «Ақылды қала» (Smart City) экожүйесіне біріктіру арқылы тұрғындарды экологиялық қауіптерден алдын ала хабардар ету мүмкіндігі ашылады.

Кілт сөздер: жерсеріктік деректер, Sentinel-5P, машиналық оқыту, Random Forest, ауа сапасы, экологиялық мониторинг.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 86A10, 62M20

ӘДЕБИЕТ

- [1] Gorelick N., Hancher M., Dixon M., et al. Google Earth Engine: Planetary-scale geospatial analysis for everyone, *Remote Sensing of Environment*, vol. 202, pp. 18–27, 2017.
- [2] D’Amore et al. Urban Air Pollution Forecasting: a Machine Learning Approach leveraging Satellite Observations, *arXiv*, 2024.
- [3] Kerimray A., Baimatova N., Ibragimova O., et al. Assessing air quality and its health impact in Kazakhstan, *Environmental Pollution*, vol. 235, pp. 45–52, 2018.
- [4] РМК «Қазгидромет» Қазақстан Республикасының қоршаған ортасының жай-күйі туралы ақпараттық бюллетені, Астана, 2024. <https://www.kazhydromet.kz/>

НАН ЗАУЫТЫНДА ӨНІМ МЕН ИНГРЕДИЕНТ ҚОРЛАРЫН ПРЕДИКТИВТІ АНАЛИТИКА НЕГІЗІНДЕ БАСҚАРУДЫ ОҢТАЙЛАНДЫРУ

Ш.Т. ТЛЕТАЙ¹, Г.А. АМИРХАНОВА²

^{1,2}әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

¹Sholpantletay@gmail.com, ²Gulshat.Amirkhanova@kaznu.edu.kz

Кіріспе

Нан өндірісі – әлеуметтік маңызы жоғары, үздіксіз өндірістік циклмен жұмыс істейтін және сұранысы тәуліктік, апталық және маусымдық ауытқуларға тәуелді сала. Нан және

нан-тоқаш өнімдерінің қысқа сақтау мерзімі, шикізат сапасының (ұн, ашытқы, тұз, қант және т.б.) өзгергіштігі, сондай-ақ жеткізу мерзімдерінің тұрақсыздығы қорларды басқару процесін күрделендіреді.

Диссертациялық зерттеудің мақсаты – нан зауытында өнім мен негізгі ингредиент қорларын предиктивті аналитика негізінде басқаруды оңтайландыру әдістерін әзірлеу және тәжірибелік тұрғыда енгізу. Бұл зерттеу заманауи өндірістік жүйелерді цифрлық трансформациялау контекстінде өзекті болып табылады.

Ғылыми мәселенің қойылуы

Нан зауытындағы қорларды басқару келесі ерекшеліктермен сипатталады:

- дайын өнімнің қысқа жарамдылық мерзімі;
- тәуліктік және апталық сұраныстың ауытқуы;
- маусымдық және мерекелік факторлар;
- шикізат сапасының өзгергіштігі (әсіресе ұнның ылғалдылығы мен клейковинасы);
- энергия және логистикалық шығындардың тұрақсыздығы.

Дәстүрлі жоспарлау әдістері көбінесе өткен кезең көрсеткіштеріне сүйенеді, бірақ қазіргі жағдайда бұл артық қор немесе өнім тапшылығына әкелуі мүмкін. Сондықтан зерттеудің міндеті – сұранысты дәл болжау және қорларды бірлескен түрде оңтайландыру алгоритмін әзірлеу болып табылады.

Заманауи тәсілдер

Қорларды басқарудағы соңғы әдістер:

1. Уақыттық қатарларды болжау (ARIMA, SARIMA, LSTM) арқылы сұранысты модельдеу;
2. Стохастикалық оңтайландыру, қауіпсіз қор деңгейін есептеу;
3. Reinforcement Learning негізіндегі динамикалық шешім қабылдау;
4. Digital Twin – өндірістік процестерді виртуалды модельдеу;
5. Big Data және ERP жүйелерін қолдану арқылы нақты уақыт режимінде басқару.

Пәнаралық ықпалдастық

Зерттеу келесі салаларды біріктіреді:

- Математика – сұранысты болжау және қорларды оңтайландыру модельдерін құру;
- Механика – өндірістік желілер мен жабдықтарды талдау;
- Ақпараттық технологиялар – деректерді жинау, сақтау және өңдеу архитектурасын ұйымдастыру;
- Жасанды интеллект – болжау және шешім қабылдау алгоритмдерін әзірлеу.

Ғылыми жаңалық

Зерттеу барысында:

- нан өнімдерінің тәуліктік сұранысын болжаудың предиктивті моделі ұсынылады;
- дайын өнім мен ингредиенттер қорын оңтайландыру алгоритмі әзірленеді;
- тәуекелге сезімтал басқару стратегиясы қалыптастырылады;

- нақты өндірістік деректер негізінде модельдің тиімділігі тексеріледі.

Практикалық маңыздылығы

Ұсынылған модельді қолдану нәтижесінде:

- артық өндіріс көлемі азаяды;
- жарамдылық мерзімі өткен өнім шығыны төмендейді;
- шикізат жеткізілімін жоспарлау дәлдігі артады;
- айналым капиталы тиімді пайдаланылады;
- өндірістік және логистикалық шығындар қысқарады.

Қорытынды

Өнім мен ингредиент қорларын предиктивті аналитика негізінде басқаруды оңтайландыру – нан өндірісіндегі тұрақтылық пен тиімділікті қамтамасыз етудің маңызды ғылыми бағыты болып табылады. Модельдерді енгізу цифрлық өндірістік жүйелерді жетілдіруге мүмкіндік береді.

Кілтті сөздер: қорларды басқару, предиктивті аналитика, уақыттық қатарлар, стохастикалық оңтайландыру, reinforcement learning, нан өндірісі, өндірістік жүйелер, цифрлық трансформация, жасанды интеллект.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Box, G.E.P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., Ljung, G. M Time Series Analysis, Forecasting and Control. 5th ed: *Hoboken: Wiley, (2015)*,
- [2] Hochreiter, S., Schmidhuber, J. Long Short-Term Memory // *Neural Computation., Journal*, 1997. — Vol. 9(8). — P. 1735–1780.
- [3] Silver, E. A., Pyke, D. F., Thomas, D. J. Inventory and Production Management in Supply Chains: *Boca Raton: CRC Press, (2017)*,
- [4] Snyder, L. V., Shen, Z.-J. M. Fundamentals of Supply Chain Theory: *2nd ed. — Hoboken: Wiley, (2019)*,
- [5] Sutton, R. S., Barto, A. G. Reinforcement Learning: An Introduction: 2nd ed. *Cambridge: MIT Press, (2018)*,
- [6] Tao, F., Zhang, H., Liu, A., Nee, A. Y. C. Digital Twin in Industry: *State-of-the-Art // IEEE Transactions on Industrial Informatics. — Vol. 15(4). — P. 2405–2415., (2019)*,
- [7] Chopra, S., Meindl, P. Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation. 7th ed. — Boston: *Pearson, (2019)*,

ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНЫЕ ГИБРИДНЫЕ КВАНТОВЫЕ PINN ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА

Н. АЗАТБЕКУЛЫ¹, А.А. МУХАНБЕТ², Б.С. ДАРИБАЕВ³, Т.С. ИМАНКУЛОВ⁴

^{1,2,4}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

³НАО “Шәкәрім университет”, Семей, Казахстан

nurtugang17@gmail.com

Моделирование двухфазного вытеснения в пористых средах, описываемое гиперболическим уравнением Бакли-Левверетта, представляет собой сложную вычислительную задачу из-за формирования резких разрывов (скачков) насыщенности [1]. Физико-информированные

нейронные сети (PINN) часто не справляются с разрешением таких скачков без введения нефизической искусственной диффузии, так как классические архитектуры обладают «спектральным смещением» (spectral bias), отдающим предпочтение низкочастотным аппроксимациям [2]. В данной работе представлена последовательная гибридная квантово-классическая физико-информированная нейронная сеть (HQPINN), предназначенная для решения уравнения Бакли-Левретта с сохранением четких профилей скачков за счет квантового индуктивного смещения.

Применение вариационных квантовых схем с угловым кодированием обеспечивает отображение пространственно-временных координат в высокоразмерное тригонометрическое пространство признаков. Такой подход согласует выразительную мощность сети с периодической природой распространения волн, что позволяет точно фиксировать крутые градиенты без артефактов размытия, характерных для монотонных функций активации. Основным вкладом данной работы является демонстрация беспрецедентной параметрической эффективности: архитектура HQPINN достигает точности, сопоставимой с классическими многослойными перцептронами, используя при этом примерно на 89% меньше обучаемых параметров. В частности, эффективное моделирование выполняется всего с 157–253 параметрами, в то время как классические базовые модели обычно требуют более 3000.

Сокращение пространства параметров снижает риск переобучения в точках коллокации и открывает масштабируемый путь к решению многомерных задач моделирования резервуаров. Анализ гибридных топологий, включая методы повторной загрузки данных (data re-uploading) и сильно запутывающие слои (strongly entangling layers), подтверждает, что периодическое отображение признаков обеспечивает надежную основу для решения гиперболических законов сохранения. Данная методика является эффективной альтернативой при решении задач многомерной фильтрации, для которых применение стандартных численных схем сопряжено с избыточной вычислительной сложностью.

Ключевые слова: квантовые вычисления, эффективность параметров, физически-информированные нейронные сети, PINN, модель Бакли-Левретта, HQPINN.

2020 Mathematics Subject Classification: 76S05, 35L67, 68T07, 81P68

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands, *Transactions of the AIME*, **146** (1942), 107–116.
- [2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, **378** (2019), 686–707.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ДЕТЕКТОРА FAST ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК НА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ МЕСТНОСТИ

А.А. АНЕТБАЕВ¹, Д.Ш. АХМЕДОВ²

¹КазНУ, Алматы, Казахстан

²Институт развития геоинформационных технологий, Кыргауылды, Казахстан

¹aslan.assylkhanovich@gmail.com, ²akhmedov.daulet@gmail.com

В последнее время в связи с широким применением средств радиоэлектронной борьбы для подавления спутниковых навигационных систем беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) стали интенсивно разрабатываться альтернативные системы навигации. Одним из направлений развития альтернативных систем навигации являются системы автономной навигации, функционирование которых основано на применении цифровых фотокамер с последующей

обработкой полученных цифровых изображений алгоритмами компьютерного зрения для выявления ключевых точек с известными координатами и определение на этой основе текущих координат БПЛА.

Ключевые точки — это характерные признаки, которые выделяются на цифровом изображении и могут быть использованы для сравнения, сопоставления и распознавания объектов. Алгоритмы ключевых точек (или алгоритмы вычисления ключевых точек) играют важную роль в задачах автономной навигации и могут использоваться в различных приложениях, таких как позиционирование робототехнических устройств, системы беспилотного вождения автомобилей, поиск похожих изображений в Интернете, распознавание лиц, построение 3D-моделей и др.

Основной сутью решения задачи автономной навигации для БПЛА с помощью компьютерного зрения на основе ключевых точек является следующее. Пусть имеется цифровое изображение предполагаемого района действия БПЛА, которое назовем базовым цифровым изображением (БЦИ). Предварительно, до вылета БПЛА, на этом БЦИ должны быть детектированы ключевые точки, вычислены соответствующие им дескрипторы, для каждой ключевой точки определены точные геодезические координаты, и эта информация записывается в память бортового вычислительного устройства БПЛА. БПЛА, совершая полет над районом действия, при помощи фотокамеры получает текущее цифровое изображение (ТЦИ), которое соответственно обрабатывается теми же алгоритмами, которыми было обработано БЦИ предполагаемого района действия БПЛА, и также выделяет и описывает ключевые точки. Сравнивая описания ключевых точек БЦИ и ТЦИ, выделяем такие ключевые точки, дескрипторы которых на БЦИ и на ТЦИ совпадают с наперед заданной точностью. Принимая во внимание, что все ключевые точки на БЦИ, хранящиеся в памяти бортового вычислительного устройства, имеют геодезическую привязку, т.е. геодезические координаты, то соответственно ключевые точки ТЦИ, совпадающие с ключевыми точками БЦИ, будут также иметь геодезические координаты, что позволяет определить текущие трехмерные координаты БПЛА.

Для выделения из цифрового изображения некоторой интерпретируемой информации необходимо привязаться к локальным особенностям изображения, в которых возможно выделение особых точек. Особая точка m , или точечная особенность (англ. point feature, key point, feature) изображения — это точка изображения, окрестность которой $o(m)$ можно отличить от окрестности любой другой точки изображения $o(n)$ в некоторой другой окрестности особой точки $o_2(m)$. Процесс определения особых точек достигается путём использования детектора, которые затем описываются дескрипторами.

В статье излагаются теоретические аспекты нового метода описания ключевых точек — дескриптора, работа которого основана на использовании метода PSI-преобразования, адаптированного к описанию ключевых точек, и который удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к ключевым точкам.

Ключевые слова: автономная навигация, цифровое изображение, ключевая точка, дескриптор.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

- [1] Cuiyin Liu, Jishang Xu, Feng Wang. A Review of Keypoints' Detection and Feature Description in Image Registration. Hindawi Scientific Programming. Volume 2021, Article ID 8509164, 25 pages. <https://doi.org/10.1155/2021/8509164>
- [2] Converting a digital color photo into black and white. [Электронный ресурс]: <https://www.cambridgeincolour.com/tutorials/color-black-white.htm> (дата обращения: 14.02.2026)
- [3] Красковский П.Н. Алгоритмы быстрого размытия изображений, основанные на фильтре Гаусса. Информатика: проблемы, методы, технологии. Материалы XXI Международной научно-методической конференции. Воронеж, 2021, с.776–781
- [4] Rosten, Edward; Drummond, Tom Machine Learning for High-speed Corner Detection. Computer Vision – ECCV 2006. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3951, pp. 430–443. doi:10.1007/11744023_34. ISBN 978-3-540-33832-1. S2CID 1388140
- [5] Шапиро Л., Стокман Д. Компьютерное зрение. – БИНОМ. Лаб. знаний, 2006.

- [6] Ethan Rublee, Vincent Rabaud, Kurt Konolige, Gary Bradski ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF. Computer Vision (ICCV), IEEE International Conference on. IEEE, pp. 2564–2571, 2011
- [7] X. Yang, K. T. Cheng LDB: An ultra-fast feature for scalable augmented reality. In IEEE and ACM Intl. Sym. on Mixed and Augmented Reality (ISMAR), pp. 49–57, 2012
- [8] Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 256 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ЖИДКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОРИЕНТАЦИИ АВТОНОМНОГО РОБОТА

Ә.Б. АХМЕТОВА¹, Е.Е. ӨКСІКБАЕВ²

^{1,2}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
baltabekova1994@gmail.com

В данной работе предложена жидкая нейронная сеть (Liquid Neural Network, LNN) для ориентации мобильного робота в открытом пространстве. В отличие от обычных рекуррентных или сверточных нейронных сетей, модель рассматривает каждый нейрон как систему с непрерывным временем, управляемую обыкновенным дифференциальным уравнением с переменной во времени постоянной. Это позволяет сети адаптироваться в реальном времени к сенсорным данным, включая асинхронные и шумные сигналы от IMU, LIDAR и камер. Для оценки эффективности архитектуры был проведен сравнительный эксперимент с использованием синтетического датасета, имитирующего данные сенсоров мобильного робота. Предложенная модель сравнивалась с классическими архитектурами RNN, LSTM и CNN по метрикам точности, устойчивости к шуму, адаптивности к асинхронным данным, вычислительной сложности и скорости предсказания.

В настоящее время автономная ориентация робота в открытом пространстве является важной задачей современной робототехники. Традиционные методы, которые основаны на классических алгоритмах ориентации, навигации и глубоких нейронных сетях имеют ограничения, связанные с низкой адаптивностью к динамическим изменениям окружающей среды и высокой вычислительной сложностью.[2,4]

Одним из перспективных направлений решения данной проблемы является использование жидких нейронных сетей (Liquid Neural Network), обладающих способностью адаптироваться к изменяющимся условиям открытой среды и эффективно обрабатывать временные данные. Данные сети основаны на динамических моделях нейронов и позволяют устойчивую и точную ориентацию робота.[1,3]

Целью данного исследования является разработка архитектуры жидкой нейронной сети для ориентации мобильного робота в открытом пространстве на основе сенсорных данных. В данной работе рассматриваются принципы построения архитектуры сети, методы ее обучения и интеграция в систему управления роботом.[3,4]

Ожидается, что предложенная архитектура позволит повысить точность ориентации, устойчивость к шумам и неопределенности среды, а также снизить вычислительные затраты по сравнению с традиционными подходами. Полученные результаты могут быть использованы при разработке автономных робототехнических систем, применяемых в сельском хозяйстве, мониторинг окружающей среды и автономном транспорте.[2,5] В отличие от обычных рекуррентных или сверточных нейронных сетей, модель рассматривает каждый нейрон как систему с непрерывным временем, управляемую обыкновенным дифференциальным уравнением с переменной во времени постоянной. Это позволяет сети адаптироваться в реальном времени к сенсорным данным, включая асинхронные и шумные сигналы от IMU, LIDAR и камер.[1,2]

Модель состоит из трех взаимосвязанных компонентов: Модульная обработка входных данных: Предобработка, нормализация и временное выравнивание сенсорных данных с IMU,

LIDAR и камеры. Для асинхронных данных используется интерполяция. Жидкое ядро: Основной слой состоит из нейронов с жидкой временной константой (Liquid Time Constant, LTC), описываемых дифференциальным уравнением:

$$\tau_i(t) \frac{dh_i(t)}{dt} = -h_i(t) + f \left(\sum_j W_{ij} x_j(t) + \sum_k U_{ik} h_k(t) + b_i \right) \quad (1)$$

где $h_i(t)$ – скрытое состояние нейрона i , $x_j(t)$ – входной сигнал, W_{ij} и U_{ik} – матрицы весов, b_i – сдвиг (bias), f – нелинейная функция активации (например, $\tanh$ или ReLU), а $\tau_i(t)$ – обучаемая, зависящая от входа, постоянная времени.[1,3]

Для проверки эффективности предложенной архитектуры жидкой нейронной сети (LNN) был проведен эксперимент по сравнению с классическими моделями такие как RNN, LSTM, CNN. Данные для эксперимента были синтетически сгенерированы, имитируя сенсорные показания мобильного робота в открытом пространстве: сенсорные сигналы IMU (акселерометр и гироскоп), LIDAR и камера, формат данных: многомерная временная последовательность с длиной 1000 шагов и 3 входных признаками, шум и асинхронность для моделирования реальных условий были добавлены гауссовский шум и случайные пропуски значений. так же асинхронные сенсорные данные интерпретировались во временной сетке. Все четыре модели были обучены на синтетических данных для задачи предсказания ориентации робота. Метрики оценки включали: точность предсказания, устойчивость к шуму, адаптивность к асинхронным данным, вычислительная сложность, скорость предсказания.

Таблица 1: Сравнение методов ориентации робота

Метод	RMSE	Шум	Асинхронность	Параметры	Время (мс)
RNN	0.112	0.112	0.164	7.8k	1.99
LSTM	0.108	0.108	0.110	31k	0.43
CNN	0.165	0.165	0.165	35k	0.06
LNN	0.198	0.198	0.134	7.8k	7.67

В результате точность LNN показала чуть более высокий RMSE на синтетических данных по сравнению с LSTM и RNN, что связано с ограниченной размерностью синтетического датасета. LNN продемонстрировала высокую устойчивость к шуму, превосходя CNN и RNN, что подтверждает ее способность корректно работать в условиях неидеальных сенсорных сигналов. Так же LNN показала хорошую адаптивность уступая лишь LSTM, что подтверждает преимущество ее жидких временных констант (LTC) в обработке асинхронных сигналов. Кроме того, LNN потребляет мало ресурсов что делает ее перспективно для встраивания в автономные системы с ограниченными вычислительными мощностями.

Разработанная концепция может быть использована при создании автономных робототехнических систем в сельском хозяйстве, мониторинг окружающей среды, автономном транспорте и других областях, где требуется адаптивная навигация и ориентация в открытом пространстве. В дальнейшем планируется проведение экспериментальной проверки предложенной архитектуры и оптимизация ее параметров для реальных роботов.

Ключевые слова: мобильный робот, жидкие нейронные сети, автономная навигация, ориентация робота, нейронные сети.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chahine M., Hasani R., Kao P., et al. *Robust flight navigation out of distribution with liquid neural networks*, Science Robotics, 2023, DOI:10.1126/scirobotics.adc8892.
- [2] MIT CSAIL Drones navigate unseen environments with liquid neural networks, *MIT News*, 2023.
- [3] Zhang Y., Chen Q., Gao L., et al. Invertible liquid neural network-based learning of inverse kinematics and dynamics for robotic manipulators, *Scientific Reports*, **15:3** (2025), 1–15.

- [4] Karn P.K., Ardekani I., Abdulla W.H. Generalized Framework for Liquid Neural Network upon Sequential and Non-Sequential Tasks, *Mathematics*, **12:16** (2024), 2525.
- [5] Unite.ai Жидкие нейронные сети: определение, приложения и проблемы, *Unite.ai*, 2023.

МИГРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КЫРГЫЗСТАНЕ И ИХ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

А.Ж. АШИРБАЕВА¹, Г.К. САДЫКОВА², Ж.Э. САПИЕВ³

¹Ошский технологический университет им. М.М. Адышева, Ош, Кыргызская Республика

^{2,3}Ошский Государственный Университет, Ош, Кыргызская Республика

¹ajjarkyn.osh@mail.ru, ²gsadykova@oshsu.kg, ³jsapiev@oshsu.kg

Аннотация. В статье анализируются миграционные процессы в Кыргызстане как фактор социально-экономического развития. Предложено моделирование с использованием экспоненциального сглаживания Брауна. Применена схема адаптивного прогнозирования. Высокая зависимость Кыргызстана от ремиттансов превращает миграцию в фактор одновременно стабилизирующий (снижение бедности, поддержка платежного баланса) и дестабилизирующий (утечка квалифицированных кадров, депопуляция регионов) [3-4]. Таким образом, прогнозирование трудовой миграции является актуальным вопросом. С помощью эконометрической модели можно сделать анализ и прогнозирование по статистическим данным [1]. Модель Брауна – одна из наиболее широко используемых адаптивных моделей прогнозирования [2]. Рассмотрен исходный временной ряд, который содержит двадцать уровней наблюдения заданного показателя $Y(t)$ (количество выбывших мигрантов за последние 20 лет). Данные за 2006-2025 годы, использованные в прогнозировании, были получены с сайта <https://stat.gov.kg/ru/publications/demograficheskiy-ezhegodnik-kyrgyzskoj-respubliki/> [5].

2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
34423	54608	41287	33380	54531	45740	49349	44209	43171	38169	38367
2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
42876	51248	48989	69136	45970	53410	57229	61978	67000	?	?

В данной статье была использована линейная модель Брауна. Расчёты проведены в Microsoft Excel с использованием метода двойного экспоненциального сглаживания Брауна, что позволило учесть линейный тренд и получить прогноз за 2026 год 69380 выбывших и за 2027 год 72696 выбывших, то есть об увеличении количества выбывших, который можно применить со связанными с ним показателями для анализа влияния миграции на социально-экономические показатели устойчивого развития Кыргызстана.

Ключевые слова: Миграция, ремиттансы, устойчивое развитие, миграционные процессы, моделирование, экспоненциальное сглаживание Брауна.

2020 Mathematics Subject Classification: 314.745, 519.86

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Айвазян С.А. *Методы эконометрики*, М.:Магистр: ИНФРА, М (2010).
- [2] Аширбаева А.Ж., Каракозуев М.М. Прогноз по линейной модели Брауна количества больных детей из города Ош, поступивших в Ошскую межобластную детскую клиническую больницу, *Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана*, **2:** (2022), 69–72.
- [3] Эргешбаев У.Ж., Макыев С.Т., Кутушева Н.Т. Современные тенденции внешней трудовой миграции населения Кыргызстана, *Вестник ОшГУ. Экономика*, **2:**(5) (2024), 22–32.
- [4] Эргешбаев У.Ж. Миграция населения Киргизской Республики в Россию: социально-экономические последствия, *Регион: экономика и социология*, **2:** (2010), 156–165.
- [5] *Демографический ежегодник Кыргызской Республики за 2006-2024 гг.*, –Б: Нацстатком Кыргызской Республики.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЯЗКОСТЕЙ В МОДЕЛИ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА С ПОМОЩЬЮ PINN

С.Д. БЕКЕЛЕ¹, Т. ИМАНКУЛОВ², Е. КЕНЖЕБЕК³

^{1,2,3}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, 050040, Алматы, Казахстан

samsondawitb@gmail.com

Надёжное управление подземными энергетическими системами требует оценивания параметров течения, которые трудно измерить напрямую. Отношение вязкостей M существенно определяет эффективность вытеснения и скорость распространения фронтов насыщенности в переносе Бакли–Лeverетта [1]. Мы разрабатываем инверсную физически информированную нейронную сеть (physics-informed neural network, PINN), которая восстанавливает поле насыщенности $S(x, t)$ и одновременно идентифицирует M по редким зашумлённым наблюдениям насыщенности [2], в духе постановок согласования истории (history matching) с разрывами.

Прямая модель задаётся гиперболическим законом сохранения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S; M)}{\partial x} = 0,$$

где $f(S; M)$ – функция дробного потока, параметризованная квадратичными относительными проницаемостями. Насыщенность аппроксимируется многослойным перцептроном $S_\theta(x, t)$; сигмоидальный выход обеспечивает физические ограничения $0 < S < 1$, а параметр M рассматривается как обучаемый скаляр, оптимизируемый совместно с весами сети. Обучение минимизирует составную функцию потерь, включающую: (i) невязку уравнения в коллокационных точках, выбранных методом латин гиперкуба в пространстве–времени, (ii) начальные и граничные условия, (iii) слагаемое несоответствия данным для N синтетических наблюдений с аддитивным гауссовым шумом. Подход следует практике инверсии PINN и одновременно учитывает структуру закона сохранения для гиперболических задач [3].

Поскольку решение содержит движущийся скачок, положение которого нелинейно зависит от M , для стабилизации оптимизации мы добавляем в невязку член исчезающей вязкости εS_{xx} на этапе обучения и затем уменьшаем ε , чтобы в пределе сходимости сохранить невязкую (inviscid) постановку; это соответствует стратегиям искусственной вязкости, улучшающим работу PINN на разрывных решениях, включая фронты Бакли–Лeverетта [4]. Оптимизация выполняется методом Adam с последующим уточнением L-BFGS, при этом для M используется отдельное масштабирование скорости обучения. Численные эксперименты оценивают зависимость от объёма данных (10–500 точек), робастность при уровне шума 0–50%, устойчивость при наличии/отсутствии привязки к данным и чувствительность в диапазоне $M \in [1.5, 10]$. Предлагаемый подход обеспечивает точную идентификацию M при редких и зашумлённых данных одновременно с восстановлением $S(x, t)$ и тем самым даёт физически согласованную альтернативу чисто данным-ориентированной калибровке.

Ключевые слова: PINN, инверсные задачи, закон сохранения, перенос Бакли–Лeverетта, отношение вязкостей, насыщенность, ударный фронт.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L65, 35R30, 68T07

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, **146** (1942), 107–116.
- [2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, **378** (2019), 686–707.

[3] Jagtap A.D., Kharazmi E., Karniadakis G.E. Conservative physics-informed neural networks on discrete domains for conservation laws: Applications to forward and inverse problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **365** (2020), 113028.

[4] Coutinho E.J.R., Dall'Aqua M., McClenney L., Zhong M., Braga-Neto U., Gildin E. Physics-informed neural networks with adaptive localized artificial viscosity. *Journal of Computational Physics*, **489** (2023), 112265.

АЛГОРИТМЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ТЕРРИТОРИЙ РАЙОНОВ ПАДЕНИЯ ОТДЕЛЯЮЩИХСЯ ЧАСТЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

С.З. ДЭРУШ¹, А.У. УТЕГЕНОВА²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²КазНИТУ им. К. И. Сатпаева, г. Алматы, Казахстан

¹daruish_serik@live.kaznu.kz, ²an.utegenova@satbayev.university

Ракетно-космическая деятельность на космодроме «Байконур» оказывает системное воздействие на экосистемы районов падения отделяющихся частей ракет-носителей (РП ОЧРН). Экологический мониторинг этих территорий генерирует пространственно-временные данные: результаты химических анализов проб почв, воды и воздуха, координаты точек отбора, контуры зон загрязнения [1]. Действующая Методика оценки воздействия [2] основана на детерминированном сравнении концентраций с ПДК и вычислении суммарного показателя загрязнения $Z_c = \sum_{i=1}^n K_{c,i} - (n - 1)$, где $K_{c,i} = c_i/c_{\phi,i}$ — коэффициент концентрации i -го загрязнителя относительно фона. Однако данный подход не решает задач прогнозирования: предсказания динамики концентраций во времени и оценки пространственного распространения загрязнений за пределами точек отбора проб [3].

Постановка задачи. Пусть $c_i(t, \mathbf{s})$ — концентрация i -го загрязнителя в момент t в точке $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$, наблюдаемая в конечном наборе точек $\{(\mathbf{s}_j, t_k)\}$. Рассматриваются две задачи: (а) временное прогнозирование — по наблюдениям $\{c_i(t_1, \mathbf{s}), \dots, c_i(t_T, \mathbf{s})\}$ предсказать $\hat{c}_i(t_T + H, \mathbf{s})$ на горизонте H ; (б) пространственное прогнозирование — по значениям $\{c_i(t, \mathbf{s}_1), \dots, c_i(t, \mathbf{s}_N)\}$ оценить $\hat{c}_i(t, \mathbf{s}_0)$ в произвольной точке $\mathbf{s}_0$ территории РП.

Временное прогнозирование.

Задача (а) решается рекуррентной сетью LSTM. Модель принимает скользящее окно длиной w с вектором признаков $\mathbf{x}_t = (c_i(t), d_t, \bar{T}_t, h_t, \tau_t)$, где d_t — глубина отбора, $\bar{T}_t$ — среднемесячная температура, h_t — влажность, τ_t — время после последнего пуска. Горизонт прогноза $H = 6\text{--}12$ мес. Обучение выполняется с функцией потерь Huber:

$$L_\delta(y, \hat{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2, & |y - \hat{y}| \leq \delta, \\ \delta(|y - \hat{y}| - \frac{1}{2}\delta), & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

обеспечивающей робастность к аномальным выбросам концентраций [4].

Пространственное прогнозирование. Задача (б) решается гибридным методом. Базовая оценка получается ординарным кригингом с экспоненциальной моделью вариограммы:

$$\gamma(h) = C_0 + C(1 - e^{-h/a}), \quad (2)$$

где h — расстояние между точками, C_0 — наггет-эффект, a — радиус корреляции. Невязки кригинга корректируются моделью градиентного бустинга (XGBoost) по вектору признаков $\mathbf{x} = (K_{c,1}, \dots, K_{c,m}, d, \text{type}, \Delta t)$, учитывающему тип почвы, характеристики топлива и время после воздействия Δt . Итоговая оценка:

$$\hat{c}_i(\mathbf{s}_0) = \hat{c}_i^{\text{krig}}(\mathbf{s}_0) + f_{\text{XGB}}(\mathbf{x}_{\mathbf{s}_0}), \quad (3)$$

что позволяет учесть нелинейные зависимости, недоступные классическому кригингу [6].

Адаптивность. При поступлении новых данных обследований модели обновляются инкрементально: LSTM дообучается (fine-tuning) с фиксацией нижних слоёв, XGBoost расширяется добавлением деревьев, параметры вариограммы (2) пересчитываются. Момент запуска переобучения определяется тестом Page–Hinkley: если кумулятивное отклонение $U_T = \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x}_t - \nu)$ превышает порог λ , инициируется обновление модели.

Результаты. Алгоритмы реализованы в составе ГИС экологического мониторинга на базе PostgreSQL/PostGIS и апробированы на данных полевых обследований РП ОЧРН космодрома «Байконур» за 2018–2020 гг. [5] (1737 записей, 322 точки отбора, аналиты: рН, NO₃, ТНП, НДМГ, НДМА; значения ниже предела обнаружения заменены по методу ПО/2). Гибридный кригинг + XGBoost (3) при пространственном прогнозировании рН снизил RMSE на 45,2 % по сравнению с ординарным кригингом ($R^2 = 0,74$, MAPE = 3,4 %, 5-fold CV, $n = 187$); параметры вариограммы (2): $C_0 = 0,043$, $C = 1,644$, $a = 0,077^\circ$. Тест Page–Hinkley обнаружил статистически значимый сезонный дрейф рН (осень $7,27 \pm 0,79$ vs весна $8,25 \pm 0,81$; критерий Уэлча $p < 10^{-4}$), что подтверждает необходимость адаптивного пересчёта моделей. Классификация зон загрязнения по четырём категориям (эпицентр, ближняя, дальняя, фон) на основе XGBoost достигла взвешенного $F_1 = 0,63$ (5-fold stratified CV, $n = 636$). Предложенный подход обеспечивает переход от констатации текущего состояния к предсказательной экологической аналитике РП ОЧРН.

Финансирование. Исследования проведены при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках гранта № AP23488291 «Разработка многофункционального ресурса экологической паспортизации районов падения отделяющихся частей ракет-носителей методом адаптивного представления интерактивных ГИС».

Ключевые слова: прогнозирование загрязнений, машинное обучение, градиентный бустинг, кригинг, геоинформационная система, районы падения ракет-носителей, адаптивные алгоритмы.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 62M20, 86A10, 62H30, 60G25

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зяблицкая А.Н., Новикова И.И., Щучинов Л.В. Результаты проведения эколого-гигиенического мониторинга в районах падения отделяющихся частей ракет-носителей, *Медицина труда и экология человека*, **4** (2023), 82–94.
- [2] Методика оценки воздействия на окружающую среду в районах падения отделяющихся частей ракет-носителей. Приказ Министра экологии и природных ресурсов РК от 15 ноября 2023 г. № 321.
- [3] Сегал А.М., Арустамов Э.А., Балакин В.А. Оценка экологического состояния территории и мониторинг окружающей среды с использованием ГИС-технологий, *Вестник Евразийской науки*, **2** (2018).
- [4] Yermoldina G.T., Trushlyakov V.I., Alipbayev K.A., Utegenova A.U. Information and forecasting system for determining the launch and impact areas of ultralight launch vehicles, *J. Theor. Appl. Inf. Technol.*, **100**:1 (2022), 52–60.
- [5] Bekeshev Y., Semenov I.N., Stepanova Y., Karpachevskiy A., Lednev S.A., Klink G.V., Yezhanov Y., Bapyshev A., Koroleva T.V. Data on the temporal changes in soil properties at the emergency crash site of the launch vehicle «Soyuz-FG» in Kazakhstan, *Data in Brief*, **55** (2024), 110646.
- [6] Кузнецова М.Н., Мелихова А.В. Использование ГИС-технологий при экологической оценке территорий, *Международ. журнал гуманитарных и естественных наук* (2024), 44–47.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРОВ В ЗАДАЧАХ ПРОМЫШЛЕННОЙ РОБОТОТЕХНИКИ

С.К. ЖИЛКИБАЕВА¹, М.У. УТЕНОВ², Д.А. ЖУНИСБЕКОВА³

^{1,3}Южно-Казахстанский исследовательский университет им. М. Ауезова, Шымкент,
Казахстан

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
Saltanat.Zhilkibaeva@auezov.edu.kz

Одним из определяющих факторов при проектировании манипуляторов является обеспечение требуемых показателей прочности и жёсткости звеньев в течение всего рабочего цикла. Оценка их напряжённо-деформированного состояния осложняется тем, что элементы конструкции функционируют в условиях движения. В результате в звеньях возникают распределённые инерционные нагрузки сложного характера, обусловленные собственной массой и её распределением по длине. Значения и направление этих нагрузок являются переменными и зависят от текущих кинематических параметров — скорости, ускорения и характера движения звеньев.

Поскольку манипулятор работает в условиях переменного движения, предварительно установить критическое сечение звена и соответствующее ему положение, при котором достигаются максимальные значения внутренних усилий или деформаций, затруднительно. Это обусловлено изменяемостью инерционных и внешних нагрузок в течение цикла функционирования. В этой связи перспективным является применение методов научного искусственного интеллекта, основанных на математическом моделировании, численных методах и алгоритмах обработки больших массивов расчётных данных. Интеллектуальные модели позволяют выявлять критические режимы нагружения, прогнозировать распределение напряжений и деформаций во времени, а также учитывать взаимосвязь кинематических и динамических параметров системы.

Особое значение приобретает динамическая визуализация напряжённо-деформированного состояния звеньев, позволяющая отразить распределение нагрузок и внутренних усилий по длине элементов и их поперечным сечениям во времени. Совмещение современных математических методов анализа с инструментами искусственного интеллекта формирует научно обоснованную базу для принятия инженерных решений при проектировании и промышленной реализации манипуляторов, обеспечивая повышение их надёжности, эксплуатационной эффективности и долговечности.

Среда Maple 2023 с использованием трёхмерных примитивов пакета *plottools* позволяет формировать объёмные элементы манипуляторов — звенья, стойки, захваты и кинематические пары — и собирать их в 3D-модель с возможностью пространственного перемещения и вращения [1]. Соединение звеньев через кинематические пары обеспечивает построение динамической модели, управляемой обобщёнными координатами, с заданным числом степеней свободы. Разработанные алгоритмы позволяют визуализировать движение манипуляторов различных структур.

Для расчёта кинематических, динамических и прочностных характеристик применяется построение систем координат Денавита–Хартенберга, при этом геометрия звеньев 3D-модели согласуется с соответствующими осями данной системы [2]. Специальный выбор систем координат звеньев манипулятора позволяет с помощью лишь четырёх параметров (не шести, как в общем случае) описать переход из одной системы в другую. Очевидно, что систему координат $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ можно преобразовать в систему $O_iX_iY_iZ_i$ с помощью поворота, двух переносов и ещё одного поворота. Результирующая матрица перехода из системы координат $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ в систему координат $O_iX_iY_iZ_i$ имеет вид, как написано в уравнении (1).

Векторы угловых скоростей и ускорений звеньев, а также линейные скорости и ускорения

точек звеньев манипулятора определяются относительно базовых систем координат $O_0X_0Y_0Z_0$ и систем координат Денавита-Хартенберга, связанных со звеньями $O_iX_iY_iZ_i$, с помощью рекуррентных уравнений Ньютона-Эйлера. Компоненты этих векторов позволяют определить все виды динамических нагрузок и установить закономерности их распределения. Кроме составляющих этих векторов, для определения динамических нагрузок, возникающих на сечениях звеньев, необходимы линейные размеры сечений и удельный вес материала звеньев.

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В статье рассматривается 3D-модель манипулятора RRRRT типа, управляемого обобщёнными координатами. Для получения числовых значений кинематических и динамических характеристик звеньев этого манипулятора необходимо жестко связать звенья с системами координат Денавита-Хартенберга. Эти системы координат нужно построить в соответствии с правилами метода Денавита-Хартенберга [3].

Ключевые слова: промышленные манипуляторы, распределенные динамические нагрузки, математическое моделирование, интеллектуальные алгоритмы, 3D-визуализация.

2020 Mathematics Subject Classification: 70B15, 70E60, 68T40

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Maplesoft. *Maple User Manual*, Maplesoft, Waterloo, Canada (2005).
- [2] Fu K.S., Gonzalez R.C., Lee C.S.G. *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, New York (1987).
- [3] Utenov M., et al. Analysis of Distributed Dynamic Loads Induced by the Own Mass of Manipulator Links and Their Visualization on Interactive 3D Computer Models, *MDPI Robotics*, (2025).

ИННОВАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КАРЬЕРНЫХ ПЕРСПЕКТИВ ИТ-КАДРОВ

А.Б. ЗАКИРОВА¹, Ж.Б. АХАЕВА²

^{1,2}Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

¹zakirova_b@enu.kz, ²akhayeva_hb@enu.kz

Представлена инновационная технология обучения высшей математике с использованием искусственного интеллекта (ИИ), направленная на повышение карьерных перспектив будущих ИТ-кадров. Описана математическая модель адаптивного обучения, архитектура образовательной платформы и результаты педагогического эксперимента ($n = 224$). Внедрение технологии способствует повышению успеваемости на 23–27 процентов и улучшает показатели трудоустройства выпускников на 24 процента.

Современный ИТ-рынок требует от выпускников не только фундаментальных знаний высшей математики, но и способности применять их в реальных профессиональных задачах. Традиционные методы обучения часто не обеспечивают необходимого уровня практической подготовки, что создаёт разрыв между академическим образованием и требованиями работодателей. Искусственный интеллект открывает новые возможности для персонализации образовательного процесса. Адаптивные системы способны анализировать индивидуальные траектории обучения, выявлять пробелы в знаниях и предлагать оптимальные пути их устранения.

Цель работы — разработка инновационной технологии обучения высшей математике с использованием ИИ для повышения карьерных перспектив будущих ИТ-кадров.

Математическая модель адаптивного обучения Процесс обучения формализуем как динамическую систему. Пусть $K_i(t)$ — уровень компетенций i -го студента в момент времени t , A_j — набор образовательных активностей, предоставляемых ИИ-платформой.

Определение 1. Индивидуальная траектория обучения — последовательность образовательных активностей $\{A_{j_k}\}_{k=1}^n$, оптимизирующая функционал успеваемости при заданных ограничениях времени.

Динамика накопления компетенций описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK_i}{dt} = \alpha_i E(t) + \beta_i P(t) - \gamma_i K_i(t), \quad (1)$$

где $E(t)$ — эффективность образовательного контента, $P(t)$ — уровень педагогической поддержки, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — индивидуальные коэффициенты студента.

Теорема 1 (О сходимости траектории). Пусть ИИ-платформа выбирает активности A_j так, что $E(t) \geq E_{\min} > 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ уровень компетенций $K_i(t)$ стремится к целевому значению:

$$K^* = \frac{\alpha_i E_{\min} + \beta_i P_{\max}}{\gamma_i}. \quad (2)$$

Замечание 1. Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ оцениваются методами машинного обучения на основе данных о взаимодействии студента с платформой (время решения задач, количество попыток, запросы помощи).

Архитектура ИИ-платформы

Таблица 1: Модули платформы

Модуль	Функция	Технология
Адаптивный движок	Подбор задач оптимальной сложности	Machine Learning, Knowledge Tracing
Система рекомендаций	Материалы для устранения пробелов	Collaborative Filtering, NLP
Карьерный модуль	Связь учебных достижений с требованиями работодателей	Skills Mapping, Labor Market Analysis

Принцип работы: (1) входное тестирование студента; (2) формирование персонализированной траектории; (3) адаптация сложности задач в реальном времени; (4) интеграция с требованиями рынка труда; (5) выдача цифрового сертификата с детализацией навыков.

Результаты педагогического эксперимента Эксперимент проводился в ЕНУ им. Гумилева в 2024–2025 гг. В исследовании приняли участие 224 студента ИТ-специальностей, разделённых на контрольную (традиционное обучение) и экспериментальную (ИИ-платформа) группы.

Утверждение 1. Внедрение ИИ-платформы статистически значительно повышает успеваемость ($p < 0.01$, t -критерий Стьюдента).

Дополнительно зафиксировано: снижение отсева на 18 процентов, увеличение времени самостоятельной работы на 42 процента, рост мотивации к изучению математики (по данным опроса UTAUT2).

5. Обсуждение и заключение Разработанная технология демонстрирует эффективность в трёх аспектах:

1. Академическая успеваемость — персонализация снижает когнитивную нагрузку и повышает усвоение материала.

Таблица 2: Сравнение показателей успеваемости

Показатель	Контрольная группа	Экспериментальная группа
Средний балл (экзамен)	3.42	4.15
Процент сдавших с первого раза	68%	89%
Удовлетворенность курсом	72%	94%
Получение офферов по выпуску	34%	58%

- Карьерная подготовка — интеграция требований работодателей обеспечивает формирование востребованных компетенций.
- Масштабируемость — платформа адаптируема для других дисциплин и вузов.

Предложение 1. Интеграция карьерного модуля повышает мотивацию студентов к изучению высшей математики на 31%.

Основные выводы:

- Математическая модель обеспечивает сходимость к целевому уровню компетенций.
- Внедрение ИИ-платформы повышает успеваемость на 23–27%.
- Карьерный модуль увеличивает трудоустройство выпускников на 24%.
- Технология масштабируема для применения в других вузах Казахстана.

Внедрение ИИ-платформ в обучение высшей математике является эффективным инструментом подготовки конкурентоспособных ИТ-кадров для цифровой экономики.

Финансирование: Исследование выполнено при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489530).

Ключевые слова: искусственный интеллект, высшая математика, адаптивное обучение, ИТ-образование, карьерные перспективы, персонализация.

2020 Mathematics Subject Classification: 97B20, 68T05, 97U50

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Davis F.D. Perceived usefulness, perceived ease of use, and user acceptance of information technology, *MIS Quarterly*, vol. 13, no. 3, pp. 319–340, 1989.
- [2] Chen L. et al. AI-powered adaptive learning systems: a systematic review, *Computers & Education*, vol. 198, 104789, 2023.
- [3] Holmes W. et al. Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning, Center for Curriculum Redesign, Boston, 2022.
- [4] Venkatesh V. et al. Unified Theory of Acceptance and Use of Technology: UTAUT2, *MIS Quarterly*, vol. 37, no. 2, pp. 157–178, 2012.

ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫЕ КАН сети для РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ

Т. ИМАНКУЛОВ¹, Е. КЕНЖЕБЕК², С.Д. БЕКЕЛЕ³, Д. АХМЕД-ЗАКИ⁴

^{1,2,3}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

⁴Южно-Казахстанский исследовательский университет имени Мухтара Ауэзова,
Шымкент, Казахстан

timur.imankulov@kaznu.edu.kz

Гиперболический перенос с движущимися скачками описывает ключевые подповерхностные процессы, включая фронты заводнения, несмешиваемое вытеснение и разрывные профили

насыщенности в задачах геологического хранения. Физически информированные нейронные сети (PINN) позволяют строить бессеточные суррогатные модели, однако при обучении в сильной форме (strong form) испытывают трудности в задачах, где доминируют ударные волны. Сети Колмогорова–Арнольда (Kolmogorov–Arnold Networks, KAN) — архитектуры с обучаемыми одномерными сплайн-функциями на рёбрах графа — демонстрируют высокую параметрическую эффективность на гладких задачах, но их поведение в режимах с разрывами остаётся недостаточно изученным. В работе представлена первая систематическая оценка физически информированных KAN (PIKAN) для захвата ударных фронтов в многофазной фильтрации на эталонной задаче двухфазного переноса Бакли–Левретта [1].

Методика экспериментов Проведён вычислительный эксперимент на 2592 запусках с варьированием ключевых параметров архитектуры KAN: глубину (5–20 слоёв), ширину (8–64 нейрона), порядок В-сплайнов (2–5), детализацию сетки (3–9 узлов на интервал), плотность коллокационных точек и конфигурации оптимизаторов. Все модели обучаются при одинаковой постановке физической функции потерь в сильной форме, что позволяет изолировать влияние архитектуры. Качество оценивается по четырём взаимодополняющим метрикам: ошибка L_2 (глобальная точность), расстояние Васерштейна–1 (точность положения скачка), полунорма H^1 (достоверность градиента) и энергетическая норма (комбинация первых двух характеристик). Многокритериальный анализ показывает, что оптимальная архитектура существенно зависит от выбранной метрики: низкопорядковые модели с грубой сплайн-сеткой лучше воспроизводят глобальную структуру решения, тогда как для разрешения резких градиентов и локальной структуры скачка требуются высокие порядки и плотная узловная сетка.

Результаты При согласованных протоколах обучения оптимизированная PIKAN достигает ошибки L_2 , сопоставимой с классической PINN (в пределах одного порядка), используя при этом на 67% меньше параметров (1140 против 3462). Однако для устойчивости обучения PIKAN систематически требует более сильной искусственной диффузии: оптимальные коэффициенты исчезающей вязкости составляют $\varepsilon = 0.00575$ для PIKAN и $\varepsilon = 0.0025$ для PINN. Мы интерпретируем это как следствие обучения в сильной форме на разрывных решениях: повышенная чувствительность сплайн-представления к осцилляциям вблизи скачка требует более жёсткой регуляризации на этапе оптимизации, при этом обученная модель при выводе сохраняет корректное энтропийное решение при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заключение Полученные результаты дают практические рекомендации для подповерхностных приложений нейросетевых суррогатов. Когда критичен размер модели — например, при многократных прямых расчётах в анализе неопределённости, согласовании истории или оптимизации в замкнутом контуре — PIKAN обеспечивают компактную и эффективную альтернативу PINN при условии корректной настройки стабилизации исчезающей вязкостью и выбора метрик, согласованных с физическими целями.

Ключевые слова: физически информированные нейросети, KAN, закон сохранения, уравнение Бакли–Левретта, ударная волна, искусственная вязкость, расстояние Васерштейна.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L65, 76S05, 68T07

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, vol. 146, pp. 107–116, 1942.
- [2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686–707, 2019.
- [3] Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljačić M., Hou T.Y., Tegmark M. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2025 (Oral).

О РОЛИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Б.Р. ИСМАИЛОВ¹, Х.Б. ИСМАИЛОВ², О.М. СУЛЕЙМЕН³

^{1,2,3}Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
ismailb@mail.ru

В работе рассматривается роль искусственного интеллекта (ИИ) в развитии методов математического моделирования промышленных процессов. Показаны преимущества интеграции методов ИИ с классическими физико-математическими моделями, включая повышение точности, устойчивости и обобщающей способности решений. Рассматриваются подходы к идентификации параметров, восстановлению неизвестных членов моделей и ускорению вычислений. Приведён пример применения гибридного подхода для моделирования процесса гидратации зерна.

Модели промышленных процессов характеризуются высокой сложностью, нелинейностью и наличием существенных неопределённостей. Классические методы, основанные на дифференциальных уравнениях, обеспечивают физическую интерпретируемость, однако часто требуют упрощающих допущений и не всегда позволяют учитывать все значимые факторы. Интеграция методов ИИ с физико-математическими моделями расширяет возможности повышения эффективности моделирования. Гибридные модели позволяют сочетать интерпретируемость классических подходов с гибкостью методов машинного обучения и демонстрируют более устойчивое поведение и лучшую обобщающую способность по сравнению с чисто эмпирическими алгоритмами [1, 2].

Методы ИИ применяются для решения ряда задач, включая идентификацию параметров, аппроксимацию сложных нелинейных зависимостей, восстановление неизвестных членов уравнений и построение суррогатных моделей. Это особенно важно при работе с многомерными зашумлёнными экспериментальными данными. При этом ключевая роль в построении математических моделей по-прежнему принадлежит исследователю: постановка задачи, выбор допущений и интерпретация результатов требуют глубокого понимания физической природы процессов. Автоматизации в основном подлежат обработка данных, первичная идентификация параметров и настройка моделей.

Предложенный подход применён для моделирования процесса гидратации зерна перед помолом [3]. Процесс проникновения влаги в зерновку описывается классическим уравнением диффузии в цилиндрической системе координат с соответствующими начальными и граничными условиями, включая условия непроницаемости оболочки и симметрии. Анализ известных моделей гидратации, проведённый с ИИ, показал, что для повышения точности моделирования необходимо учитывать дополнительные факторы, такие как температура и кавитационные эффекты. Это приводит к необходимости введения в модель дополнительной функции потенциала, определяющей направленный перенос влаги. Поскольку аналитический вид данной функции неизвестен, её восстановление осуществляется с использованием методов ИИ на основе экспериментальных данных.

Таким образом, интеграция методов искусственного интеллекта и классического математического моделирования является перспективным направлением развития. Гибридные модели обеспечивают повышение точности и устойчивости решений при сохранении физической интерпретируемости. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность данного подхода при решении прикладных задач.

Ключевые слова: искусственный интеллект, математическое моделирование, промышленные процессы, идентификация параметров, диффузия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Willard J., et al. Integrating Physics Based Modeling with Machine Learning, *Nature Reviews Physics* (2022).

[2] Rackauckas C., et al. Universal Differential Equations for Scientific Machine Learning, *Nature Machine Intelligence* (2023).

[3] Ismailov B., Urinboev A., Ismailov Kh., Kuchkarov A. Modelling the hydration process of wheat grain with layer-dependent diffusion coefficients, *Research in Agricultural Engineering*, **72**:1 (2026), 25–40.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ ТРАНСФОРМЕРНОЙ АРХИТЕКТУРЫ

Н.К. КЕМЕЛБЕКОВ¹, Д.Р. РАХИМОВА²

^{1,2}Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

kemellbekov@gmail.com

В задачах прогнозирования временных рядов традиционно применяются авторегрессионные модели и рекуррентные нейронные сети. Однако с появлением трансформерной архитектуры открылись новые возможности для моделирования долгосрочных зависимостей в последовательных данных. В настоящей работе исследуются математические основы применения трансформеров к задачам прогнозирования временных рядов и анализируется их эффективность по сравнению с классическими подходами.

Пусть дан временной ряд $\{x_t\}_{t=1}^T$, $x_t \in \mathbb{R}^d$. Задача прогнозирования состоит в нахождении отображения

$$\hat{x}_{T+h} = \mathcal{F}_\theta(x_{T-L+1}, \dots, x_T), \quad (1)$$

где $h \geq 1$ — горизонт прогнозирования, L — длина входного окна, θ — параметры модели.

Ключевым элементом трансформерной архитектуры является механизм многоголового самовнимания (Multi-Head Self-Attention). Для входной последовательности $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times d}$ механизм внимания вычисляется как:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^\top}{\sqrt{d_k}}\right) V, \quad (2)$$

где матрицы запросов Q , ключей K и значений V получаются линейными проекциями входа, d_k — размерность ключей.

Определение 1. Трансформером для временных рядов называется архитектура глубокого обучения, основанная на механизме самовнимания (2), дополненная позиционным кодированием и нормализацией слоёв, обеспечивающая моделирование нелинейных зависимостей произвольной длины в последовательных данных.

Позиционное кодирование задаётся функциями:

$$PE_{(pos, 2i)} = \sin\left(\frac{pos}{10000^{2i/d}}\right), \quad PE_{(pos, 2i+1)} = \cos\left(\frac{pos}{10000^{2i/d}}\right), \quad (3)$$

где pos — позиция элемента, i — индекс измерения.

Теорема 2. Пусть функция потерь $\mathcal{L}(\theta)$ является L -гладкой и ограниченной снизу. Тогда для алгоритма Adam с шагом обучения $\eta \leq 1/L$ выполняется:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[\|\nabla \mathcal{L}(\theta_t)\|^2] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

В ходе численных экспериментов на открытых наборах данных (ETTh1, ETTh2, ExchangeRate) модель Informer продемонстрировала снижение среднеквадратичной ошибки на 15–25% по сравнению с LSTM при горизонте прогнозирования $h = 336$ шагов.

Замечание 3. Несмотря на высокую точность, трансформерные модели обладают квадратичной вычислительной сложностью $O(L^2)$ по длине входной последовательности, что мотивирует разработку эффективных аппроксимаций механизма внимания.

Ключевые слова: временные ряды, трансформерная архитектура, механизм внимания, прогнозирование, глубокое обучение, математическое моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 62M10, 65C20.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. et al. Attention is all you need, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **30** (2017), 5998–6008.
- [2] Zhou H., Zhang S., Peng J. et al. Informer: Beyond efficient transformer for long sequence time-series forecasting, *Proceedings of AAAI*, **35**:12 (2021), 11106–11115.
- [3] Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., Ljung G.M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 5th ed., Wiley, Hoboken (2015).

ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННАЯ НЕЙРОСЕТЬ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В МОДЕЛИ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА

Е. КЕНЖЕБЕК¹, Т. ИМАНКУЛОВ², С.Д. БЕКЕЛЕ³, Д. АХМЕД-ЗАКИ⁴

^{1,2,3}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

⁴Южно-Казахстанский исследовательский университет имени Мухтара Ауэзова,
Шымкент, Казахстан

yerzhan.kenzhebek@kaznu.edu.kz

Точное совместное прогнозирование давления и насыщенности критически важно для подземных энергетических приложений, где при вытеснении нередко формируются резкие фронты насыщенности. В модели Бакли–Левретта [1] уравнение насыщенности нелинейно и гиперболично; его энтропийное решение содержит движущиеся разрывы, которые стандартные физически-информированные нейронные сети (PINN) [2], являющиеся ключевым инструментом физически-информированного машинного обучения [3], как правило, чрезмерно сглаживают.

Метод Мы предлагаем единую PINN на базе одной сети, одновременно предсказывающую давление и водонасыщенность. Обучение минимизирует совместную физическую функцию потерь: (i) невязку уравнения водонасыщенности, где поток воды определяется законом Дарси, и (ii) невязку эллиптического уравнения для давления, выведенного из закона Дарси и сохранения суммарной подвижности. Начальные и граничные условия задаются дополнительными членами функции потерь, что позволяет избежать расщепления операторов и многосетевых архитектур.

Результаты В более чем 500 абляционных экспериментах модель устойчиво восстанавливает давление, но демонстрирует размытие фронта и фазовую ошибку в поле насыщенности; увеличение емкости сети или плотности выборки не устраняет эту проблему, что согласуется с анализом динамики обучения PINN [4]. Для улучшения захвата разрывов мы добавляем при обучении к остатку уравнения насыщенности член с исчезающей вязкостью, опираясь на идеи стабилизации искусственной вязкостью для PINN на гиперболических уравнениях. Далее мы комбинируем это с весами потерь, учитывающими положение фронта, и стратегиями наложения условий, обеспечивающими сохранение, вдохновленными консервативными PINN [5]. По сравнению с одной лишь диффузией оптимальная конфигурация снижает среднюю относительную ошибку на 44.4% (насыщенность) и 27.86% (давление), улучшая локализацию фронта без ухудшения гладкости поля давления [6].

Ключевые слова: физически-информированные нейронные сети, PINN, модель Бакли–Лeverетта, двухфазная фильтрация, давление, водонасыщенность, захват разрывов.

2020 Mathematics Subject Classification: 76S05, 65M60, 68T07

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands, *Transactions of the AIME*, vol. 146, pp. 107–116, 1942.
- [2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686–707, 2019.
- [3] Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. Physics-informed machine learning, *Nature Reviews Physics*, vol. 3, pp. 422–440, 2021.
- [4] Wang S., Yu X., Perdikaris P. When and why PINNs fail to train: A neural tangent kernel perspective, *Journal of Computational Physics*, vol. 449, 110768, 2022.
- [5] Jagtap A.D., Kharazmi E., Karniadakis G.E. Conservative physics-informed neural networks on discrete domains for conservation laws: Applications to forward and inverse problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 365, 113028, 2020.
- [6] Kenzhebek Y., Imankulov T., Bekele S.D., Panfilova I., Akhmed-Zaki D. Coupled pressure and saturation prediction for two-phase flow in porous media using physics-informed neural networks (PINNs), *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 446, 118229, 2025.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОСЕВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL SOLVER И АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

К.М. МААТОВ ¹, Ж.И. МАМБЕТОВ ²

^{1,2}Ошский технологический университет имени М.М. Адышева

Maatov.k.m@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимизации структуры посевных площадей сельскохозяйственного предприятия Кыргызстана на основе методов линейного программирования и алгоритмов машинного обучения. Разработана экономико-математическая модель распределения земельных ресурсов с учётом ограничений по площади, трудовым и материальным ресурсам, а также минимальным объёмам производства. Для численной реализации использована надстройка Solver в MS Excel. Алгоритмы машинного обучения применены для прогнозирования урожайности культур с учётом климатических и агротехнических факторов. Интеграция оптимизационной модели и прогнозной аналитики обеспечивает повышение эффективности планирования сельскохозяйственного производства.

Эффективное распределение посевных площадей является одной из ключевых задач управления аграрным производством в условиях ограниченности земельных и материальных ресурсов Кыргызстана. Горный рельеф и климатическая нестабильность требуют применения методов математического моделирования [1].

В работе построена модель линейного программирования, где переменные отражают площади посева основных культур, а целевая функция направлена на максимизацию прибыли предприятия при ограничениях по земельным, трудовым и техническим ресурсам, а также по минимальному объёму производства [2]. Численная реализация выполнена в MS Excel с использованием надстройки Solver, что обеспечивает практическую доступность метода.

Для повышения точности планирования применены алгоритмы машинного обучения, позволяющие прогнозировать урожайность на основе климатических и агротехнических данных. Прогнозные показатели интегрированы в оптимизационную модель, что повышает устойчивость решений к изменению внешних условий [3].

Апробация модели на примере хозяйства Ошской области показала возможность увеличения потенциальной прибыли на 8–12% по сравнению с традиционным планированием и более рационального использования ресурсов

Таким образом, интеграция методов линейного программирования и машинного обучения является эффективным инструментом формирования рациональной структуры посевных площадей и повышения устойчивости агропредприятия.

Ключевые слова: оптимизация, линейное программирование, посевные площади, MS Excel Solver, машинное обучение, аграрное планирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 569.8

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Асанкулова М., Жусупбаев А. Математическая модель оптимизации производства и ввоза сельхозпродукции, *Успехи современной науки и образования*, 5 (2016), 121–123.
- [2] Асанкулова М., Жусупбаев А., Жусупбаев Г.А. Определение максимального дохода предприятия при ограниченном объеме финансов, *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*, 3:7 (2015), 101–105.
- [3] Маатов К.М. Ишкананын айдоо аянтына айыл чарба эгиндерин өстүрүүнү математикалык моделдештирүү, *Ош мамлекеттик университетинин жарчысы. Математика. Физика. Техника*, 1:4 (2024), 131–135.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ И GPU-АРХИТЕКТУРАХ

М.Б. МУСТАФИН¹, А.А. МУХАНБЕТ², Н.М. КАСЫМБЕК³

^{1,2,3}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
mustafin.mb@mail.com

Современные задачи машинного обучения (МО) требуют обработки постоянно растущих объемов данных, что делает вычислительную эффективность критически важным фактором. Традиционные последовательные алгоритмы часто становятся узким местом, ограничивая применение сложных моделей. В данной работе исследуется применение технологий параллельных вычислений, в частности стандарта MPI (Message Passing Interface) и графических процессоров (GPU), для ускорения обучения и повышения точности моделей [1].

Целью данного исследования является комплексный сравнительный анализ производительности алгоритмов МО в рамках различных стратегий параллелизации: MPI на CPU и гибридный подход MPI-GPU. Для оценки были выбраны пять распространенных алгоритмов: линейная регрессия (LR), полиномиальная регрессия (PR), дерево решений (DT), случайный лес (RF) и регрессия опорных векторов (SVR). Эксперименты проводились на наборах данных, содержащих более 369 600 точек данных, полученных с использованием моделирования математической модели Black Oil, что позволяет моделировать различные сценарии поведения нефтяных месторождений [2]. Оценка производительности проводилась с использованием 1, 2, 4 и 8 параллельных процессов, с измерением метрик точности (R^2 , MSE, MAE) и времени обучения. Для реализации на GPU использовалась библиотека NVIDIA RAPIDS, а для межпроцессного взаимодействия - библиотека mpi4py [3].

Экспериментальные результаты показали значительные различия в поведении алгоритмов. RF и SVR продемонстрировали наилучшую масштабируемость и точность на GPU - архитектуре, особенно при работе с большими наборами данных, где значения R^2 приближались к 1.0. Использование GPU позволило не только сократить время обучения, но и повысить точность предсказаний за счет эффективной обработки больших объемов данных. В то же время PR, реализованный исключительно на ЦПУ, показал высокую чувствительность к параллелизации: по мере увеличения числа процессов наблюдалось резкое снижение точности

из-за эффекта переобучения на разделенных данных. На малых наборах данных накладные расходы на параллелизацию иногда превышали выгоду от ускорения. Таким образом, важно выбирать стратегию в зависимости от объема данных.

Исследование показало, что гибридные системы MPI-GPU могут значительно повысить производительность для рабочих нагрузок МО. Оптимальная конфигурация зависит от типа алгоритма и характеристик данных: для задач большого масштаба и сложных моделей (RF, SVR) предпочтительнее использовать GPU, в то время как для простых моделей и небольших выборок может быть достаточно эффективности ЦПУ. Полученные результаты предоставляют практические рекомендации для инженеров по данным по разворачиванию эффективных систем машинного обучения в высокопроизводительных вычислительных средах [4].

Ключевые слова: параллельные алгоритмы машинного обучения, MPI, графические процессоры, эффективность вычислений, машинное обучение, гибридная параллелизация MPI-GPU, высокопроизводительные вычисления.

2020 Mathematics Subject Classification: 68Q25, 68T05, 68U05, 65Y05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Patterson, D., and Hennessy, J. L. Computer Organization and Design: The Hardware/Software Interface, *Elsevier*, (2017).
- [2] Matkerim, B., Mukhanbet, A., Kassymbek, N., Daribayev, B., Mustafin, M., and Imankulov, T. Machine Learning Analysis Using the Black Oil Model and Parallel Algorithms in Oil Recovery Forecasting, *Algorithms*, **17**:8 (2024), 354.
- [3] Mustafin, M., Mansurova, M., Zhakyp, A., Mukhanbet, A., Kenzhebek, Y., and Kassymbek, N. Efficiency of Parallel Machine Learning Algorithms on Multiprocessor and GPU Architectures, in Malyshkin, V. (ed.) *Parallel Computing Technologies*, PaCT 2025, *Lecture Notes in Computer Science*, **16185** (2026), Springer, Cham.
- [4] Srinivasan, A., and Jain, A. Machine learning and data mining approaches to predictive modeling in oil reservoir simulation, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **165** (2018), 348–359.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ С УЧЁТОМ АІ-ОБНАРУЖЕНИЯ И РЕСУРСА РЕАГИРОВАНИЯ

Д.М. МУХАММЕДЖАНОВА

КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

m.dinargul.14@gmail.com

Интегрированные медицинские информационные системы обрабатывают большие объёмы чувствительных данных и функционируют в условиях устойчивых внешних киберугроз, что делает актуальной задачу формального анализа процессов компрометации и защиты информации. Для количественной оценки влияния АІ-обнаружения инцидентов и управляемого реагирования на уровень безопасности медицинских данных предлагается нелинейная динамическая модель в виде пятимерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Состояние системы описывается переменными $V(t)$, $T(t)$, $C(t)$, $D(t)$ и $R(t)$, где $V(t)$ характеризует уровень уязвимости медицинской информационной системы, $T(t)$ — интенсивность внешних киберугроз, $C(t)$ — долю скомпрометированных данных, $D(t)$ — качество АІ-детекции инцидентов, а $R(t)$ — доступный ресурс реагирования.

Математическая постановка задачи основана на следующих предпосылках: увеличение уязвимости системы и активности угроз приводит к росту компрометации медицинских данных; повышение качества АІ-детекции сокращает время выявления инцидентов и уменьшает масштаб их последствий; увеличение ресурса реагирования усиливает способность системы

к локализации и нейтрализации атак. Параметры модели отражают процессы появления и устранения уязвимостей, изменения интенсивности атак, обучения и деградации AI-модуля, а также восстановления и расходования ресурсов реагирования. Тем самым модель формализует причинно-следственные связи между атакующей средой, интеллектуальным обнаружением, защитными ресурсами и итоговым уровнем компрометации данных в медицинской среде.

Цель исследования заключается в анализе динамики системы, определении условий существования устойчивого режима функционирования и оценке влияния параметров защиты на снижение доли скомпрометированных медицинских данных. Задача Коши для построенной системы решается численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Анализ временных рядов и фазовых портретов показывает, что даже при ненулевой интенсивности угроз система способна выходить на благоприятный установившийся режим при достаточной эффективности AI-обнаружения и наличии необходимого ресурса реагирования. Локальная устойчивость подтверждается спектральным анализом матрицы Якоби: отрицательные действительные части собственных значений указывают на асимптотическую устойчивость равновесного состояния без выраженных колебательных режимов.

В сценариях с усиленной атакующей средой модель также демонстрирует возможность стабилизации: при повышении качества AI-детекции и существенном наращивании ресурса реагирования уровень компрометации данных снижается на порядки. Полученная постановка может служить математической основой для сравнительного анализа стратегий AI-киберзащиты, оценки устойчивости медицинских информационных систем и оптимизации параметров реагирования в организациях здравоохранения.

Ключевые слова: нелинейные ОДУ, кибербезопасность, медицинские данные, AI-обнаружение, устойчивость, численное моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 92C50, 34D20, 68M25, 93A30.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Paraschiv E.A., Cirnu C.E., Vevera A.V. Integrating Artificial Intelligence and Cybersecurity in Electronic Health Records: Addressing Challenges and Optimizing Healthcare Systems, *Biomedical Engineering*, (2024). DOI: 10.5772/intechopen.1007041.
- [2] Damar M., Ozen A., Yilmaz A. Cybersecurity in the Health Sector in the Reality of Artificial Intelligence, and Information Security Conceptually, *Journal of AI*, **8**:1 (2024), 61. DOI: 10.61969/jai.1466340.
- [3] Arefin S. Strengthening Healthcare Data Security with AI-Powered Threat Detection, *International Journal of Scientific Research and Management*, **12**:10 (2024), 1477. DOI: 10.18535/ijssrm/v12i10.ec02.
- [4] Qurashi S.N., Sobia F., Hetany W.A., Sultan H. Enhancing Cybersecurity Defenses in Healthcare Using AI: A Pivotal Role in Fortifying Digital Health Infrastructure, *Bonview Medical Intelligence*, (2025). DOI: 10.47852/bonviewmedin52024121.
- [5] Sinha R.K. The Role and Impact of New Technologies on Healthcare Systems, *Discover Health Systems*, **3**:1 (2024). DOI: 10.1007/s44250-024-00163-w.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Е.Е. ОКСИКБАЕВ¹, Э.Б. АХМЕТОВА²

^{1,2}Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
yoxikbayev@gmail.com¹

В последние годы наблюдается значительный прогресс в области мультиагентных систем (МАС), обусловленный слиянием технологий больших данных и больших языковых моделей (LLM). Библиометрические исследования показывают стремительный рост числа публикаций,

посвященных этой теме. Масштабное эмпирическое исследование МАС с открытым исходным кодом, охватывающее десятки тысяч вкладов разработчиков и решенных проблем в популярных системах, выявило разнообразие подходов к разработке, что свидетельствует о зрелости и универсальности этой экосистемы [1,2]. В этой статье мы анализируем текущие исследования и определяем ключевые направления для разработки интеллектуальных многоагентных систем (ИМАС), которые предназначены для работы с большими объемами данных.

Архитектурные инновации

Гибридная иерархическая структура, использующая большие языковые модели для планирования. Новая архитектура L2M2 (Large Language Model and Multi-agent Reinforcement Learning) воплощает переход к многоуровневым системам: LLM выступает в роли стратегического планировщика (формирует задачи высокого уровня), в то время как многомерное обучение с подкреплением (MARL) обеспечивает детальную координацию действий. Исследования показывают, что L2M2 более эффективен, чем традиционные решения — требуется менее 20% обучающих данных, и система остается надежной даже при отсутствии заранее определенных промежуточных целей [3].

Единая архитектурная модель вместо распределенной команды. ПЛАТФОРМА IMAGINE (INTEGRATING MULTI-AGENT SYSTEM INTO ONE MODEL) предлагает радикально новое решение: вместо набора взаимодействующих агентов используется единая компактная модель, в которой сконцентрирован функционал полноценной мультиагентной системы. Эксперименты показали, что такая модель, обученная в соответствии с принципами IMAGINE, демонстрирует выдающиеся результаты в сложных тестовых наборах, превосходя масштабные модели и традиционные MAS, без потери производительности из-за необходимости мультисенсорного диалога [4].

Автоматическая генерация агентов в режиме реального времени. Ограничение фиксированного числа агентов было характерной чертой первых реализаций MAS. Технологии IAAG (Initial Automatic Agent Generation) и DRTAG (Dynamic Real-Time Agent Generation) обеспечивают динамическую генерацию новых агентов "в процессе адаптивно реагируя на изменения условий задачи благодаря передовому промышленному управлению. DRTAG продемонстрировал заметный рост качества выходных данных — увеличение охвата тем, разнообразия лексики и точности соответствия контексту в сгенерированном материале [5].

Алгоритмические сдвиги

Современные архитектурные решения предполагают коллективное принятие решений. Фреймворк JoyAgent-JDGenie объединяет агентов планирования и исполнения с моделью голосования критиков, дополняя их иерархической памятью (рабочей, семантической, процедурной) и расширенной функциональностью [2].

Сочетание LLM и традиционных методов. При анализе данных основной проблемой остаются ложные выводы LLM при создании SQL-запросов. Решением являются многопроцессорные системы RAG, в которых статические и адаптивные агенты взаимодействуют для создания контента, адаптированного к потребностям менеджеров разных уровней. Тестирование различных моделей показало повышение точности семантической привязки сгенерированных отчетов к эталонным образцам [6].

Заключение

Проведенный анализ современного состояния интеллектуальных мультиагентных систем свидетельствует о переходе от экспериментальных разработок к промышленным решениям, интегрирующим большие языковые модели, механизмы динамической адаптации и гибридные архитектуры. Наибольший интерес представляют подходы L2M2, сочетающие стратегическое планирование на основе LLM с тактической координацией через обучение с подкреплением, а также методы динамической генерации агентов, позволяющие масштабировать системы без экспоненциального роста коммуникационных издержек. Критически важными направлениями дальнейших исследований остаются обеспечение безопасности и доверия при взаимодействии автономных агентов, разработка универсальных онтологий для семантической интероперабельности и снижение стоимости инференса до уровней, обеспечивающих экономическую

целесообразность внедрения в широком спектре приложений обработки больших данных.

Ключевые слова: мультиагентные системы, большие данные, агентный ИИ, LLM-агенты, распределенная обработка, динамическая адаптация, L2M2, AutoGen.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T42, 68T05, 68P05, 68M14

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Liu D., et al. *A Large-Scale Study on the Development and Issues of Multi-Agent AI Systems*, arXiv:2601.07136 (2026).
- [2] Liu J., et al. JoyAgent-JDGenie: Technical Report on the GAIA, arXiv:2510.00510 (2025).
- [3] Geng M., et al. L2M2: A Hierarchical Framework Integrating Large Language Model and Multi-agent Reinforcement Learning, *Proceedings of IJCAI (2025)*, 99–107.
- [4] Zhang X., et al. IMAGINE: Integrating Multi-Agent System into One Model for Complex Reasoning and Planning, arXiv:2510.14406 (2025).
- [5] Auto-scaling LLM-based multi-agent systems through dynamic integration of agents, *Frontiers in Artificial Intelligence*, 8 (2025), 1638227.
- [6] Naik V.S. The Agentic Paradigm in Data Analytics: Architectures, Benchmarks, and Socio-Economic Trajectories, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 35:1 (2026), 423–435.

ГЛУБОКОЕ ОБУЧЕНИЕ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМИ ЗДАНИЯМИ

Алмаз САПАРГАЛИ¹, Серик АЙБАГАРОВ², Аксултан МУХАНБЕТ³

^{1,2,3}ТОО „DigitAlem“, Алматы, Казахстан

sapargali_almaz@live.kaznu.kz

Повышение энергоэффективности интеллектуальных зданий при одновременном обеспечении приемлемого уровня теплового комфорта в помещениях представляет собой сложную задачу управления. Это обусловлено нелинейным характером поведения системы, запаздывающими тепловыми откликами, а также наличием конфликтующих целей, связанных с обеспечением комфорта и снижением энергопотребления. Системы HVAC дополнительно усложняют задачу вследствие их тепловой инерции и ограничений исполнительных механизмов. В результате простые алгоритмы управления на основе правил зачастую оказываются недостаточными. В последние годы активно исследуются методы глубокого обучения с подкреплением для оптимизации работы HVAC; однако большинство существующих подходов предполагают идеализированное пространство действий и не учитывают ограничения скорости изменения управляющих сигналов и физические ограничения динамического отклика системы.

Цель и подход В данной работе основное внимание уделяется повышению реалистичности пространства действий, используемого в многокритериальном глубоком обучении с подкреплением для управления HVAC в интеллектуальных зданиях. Задача управления формулируется как баланс между тепловым комфортом и энергопотреблением с использованием взвешенной многокритериальной функции вознаграждения. Вместо непосредственной передачи управляющих воздействий в среду вводится дополнительный этап обработки действий. На этом этапе реализуются базовые ограничения безопасности, нормализация, ограничения на скорость изменения управляющих сигналов, а также простое сглаживание. Эти элементы учитывают поведение исполнительных механизмов и тепловую инерцию системы, предотвращая формирование нереалистичных управляющих воздействий в процессе обучения.

Результаты Предложенный подход оценивается в физически обоснованной модели EnergyPlus для многозонного здания и сравнивается со случайным управлением и управлением на

основе правил. Политика, обученная методом многокритериального обучения с подкреплением, демонстрирует существенно более выгодный компромисс между комфортом и энергопотреблением: средняя потребляемая мощность HVAC снижается приблизительно с 480–500 Вт до 410–420 Вт (снижение на 12–15%), при этом средний штраф за нарушение комфорта уменьшается примерно с 2.3 до 1.8. Кроме того, 95-й перцентиль штрафа за нарушение комфорта снижается с приблизительно 1.21 до 0.42. В ходе оценки температура воздуха в помещениях сохраняется в стабильном диапазоне 15–20.5°C и характеризуется более плавной динамикой по сравнению с базовыми стратегиями управления.

Заключение В целом полученные результаты обеспечивают перспективную первичную валидацию многокритериального обучения с учётом ограничений исполнительных механизмов и создают основу для дальнейшего развития более продвинутых цифровых двойников систем управления.

Ключевые слова: глубокое обучение с подкреплением, энергоэффективность, интеллектуальные здания, HVAC, многокритериальная оптимизация.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 93C40, 90C29

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schulman J., et al. Proximal Policy Optimization, *arXiv:1707.06347*, 2017.
- [2] U.S. Department of Energy EnergyPlus Energy Simulation Software, <https://energyplus.net>

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СОПОСТАВЛЕНИЯ ДИСЦИПЛИН КОЛЛЕДЖА И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

А.Э. САРБАСОВА

НАО «Казахский агротехнический исследовательский университет имени
С.Сейфуллина», Астана, Казахстан
sarbasovaaruhan2@gmail.com

В условиях цифровой трансформации образования возрастает необходимость формализации и автоматизации процедур сопоставления дисциплин между уровнями профессионального образования [1,7]. В работе рассматривается задача разработки математической модели и алгоритма автоматизированного сопоставления дисциплин колледжа и образовательных программ высшего образования на основе методов искусственного интеллекта [2,3,6].

Предложена модель представления дисциплины в виде многомерного векторного пространства признаков, формируемого на основе анализа текстовых описаний целей обучения, результатов, компетенций и тематического содержания [3,4]. Для оценки степени соответствия дисциплин используется мера семантической близости, реализованная с применением методов обработки естественного языка и алгоритмов машинного обучения [2,5,8]. На основе вычисленных значений формируется матрица соответствия, позволяющая количественно оценить релевантность сопоставляемых курсов и определить оптимальные пары дисциплин с использованием пороговых критериев [4,6].

Эффективность алгоритма оценивается с применением метрик Precision, Recall и F1-score. Разработанный подход обеспечивает снижение субъективности экспертных решений и может быть интегрирован в информационные системы управления образовательным процессом для поддержки академической мобильности и оптимизации процедур перезачёта дисциплин [1,2,7].

Введение В условиях цифровой трансформации образования и внедрения интеллектуальных информационных систем возрастает необходимость формализации процессов академической преемственности между уровнями профессионального образования [1]. Одной из

ключевых задач является объективное и обоснованное сопоставление дисциплин колледжа и образовательных программ высшего образования при переводе обучающихся, перезачёте дисциплин и формировании индивидуальных образовательных траекторий [2,4,9].

Существующая практика сопоставления дисциплин основывается преимущественно на экспертной оценке содержания рабочих программ [3]. Такой подход характеризуется субъективностью, высокой трудоёмкостью и отсутствием формализованных критериев количественной оценки степени соответствия дисциплин [1,2,7]. В этой связи актуальной является разработка математической модели и алгоритмического инструментария, обеспечивающих автоматизированное сопоставление на основе методов искусственного интеллекта [2,3].

Цель и задачи Целью исследования является разработка формализованной математической модели представления образовательных дисциплин и алгоритма их автоматизированного сопоставления с использованием методов научного искусственного интеллекта.

В рамках исследования решаются следующие задачи:

- формализация структуры образовательной дисциплины как набора параметризованных характеристик (цели, результаты обучения, компетенции, тематическое содержание, трудоёмкость) [3,4];
- построение векторного представления дисциплин на основе методов обработки естественного языка [5,8];
- разработка функции меры сходства между дисциплинами [8,9];
- формирование матрицы соответствия и алгоритма выбора оптимального сопоставления [4,6];
- оценка качества алгоритма на основе количественных метрик [5,6].

Математическая модель Предлагаемая математическая модель основывается на представлении каждой дисциплины в виде многомерного вектора признаков:

$$D_i = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где x_k — количественная оценка семантического или структурного признака дисциплины [3,4].

Для вычисления степени близости дисциплин колледжа D_i^c и вуза D_j^u используется функция сходства:

$$\text{Sim}(D_i^c, D_j^u) = \frac{\langle D_i^c, D_j^u \rangle}{\|D_i^c\| \|D_j^u\|}, \quad (2)$$

что соответствует косинусной мере сходства векторных представлений [2,5].

На основе полученных значений формируется матрица соответствия:

$$M = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \text{Sim}(D_i^c, D_j^u), \quad (3)$$

где элементы матрицы отражают степень релевантности сопоставляемых дисциплин. Далее применяется алгоритм оптимального выбора соответствий с учётом пороговых значений и ограничений образовательного стандарта [4,6,9].

Методы искусственного интеллекта В качестве инструментов искусственного интеллекта рассматриваются методы машинного обучения и семантического кодирования текстов (word embeddings, трансформерные модели), позволяющие учитывать не только формальное совпадение терминов, но и глубинную смысловую близость учебных курсов [2,3].

Для оценки эффективности разработанного алгоритма используются стандартные метрики качества классификации и сопоставления: Precision, Recall и F1-score, что позволяет количественно оценить точность автоматизированных решений по сравнению с экспертной разметкой [5,6,9].

Научная новизна и практическая значимость Научная новизна работы заключается в интеграции методов семантического анализа текстов, математического моделирования и алгоритмов оптимизации для решения задачи академического сопоставления дисциплин. В отличие от существующих экспертных процедур, предложенный подход обеспечивает формализованную количественную оценку степени соответствия и позволяет масштабировать процесс на большие массивы образовательных данных [1,3,7].

Практическая значимость исследования определяется возможностью внедрения разработанного алгоритма в информационные системы управления образовательным процессом [1,2]. Реализация модели позволит повысить объективность решений о перезачёте дисциплин, сократить временные затраты административных подразделений и обеспечить прозрачность процедур академической мобильности [4,6].

Заключение Таким образом, разработанная математическая модель и алгоритм автоматизированного сопоставления дисциплин представляют собой прикладное направление научного искусственного интеллекта, ориентированное на цифровизацию и интеллектуализацию управления образовательными программами.

Ключевые слова: математическая модель, искусственный интеллект, машинное обучение, семантическое сходство, алгоритм сопоставления, цифровизация образования.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 68T50, 97B20

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Pearson, London, 2020.
- [2] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*, MIT Press, Cambridge, 2016.
- [3] Jurafsky D., Martin J.H. *Speech and Language Processing*, Pearson, London, 2023.
- [4] Camacho D., et al. Automated Curriculum Mapping Using Machine Learning, *Computers & Education*, vol. 180, 104410, pp. 1–15, 2022.
- [5] Mitra B., et al. Semantic Similarity in Education: Applications of NLP in Course Matching, in *Educational Data Mining and Learning Analytics*, Springer, Cham, pp. 55–72, 2021.
- [6] Chen X., et al. Applying AI Techniques for Curriculum Alignment, *Journal of Artificial Intelligence in Education*, vol. 31, no. 2, pp. 123–145, 2021.
- [7] Al-Mahmood R., et al. AI-Based Course Matching and Academic Mobility in Higher Education, *IEEE Access*, vol. 10, pp. 10532–10546, 2022.
- [8] Singh A., et al. Transformer Models for Semantic Analysis of Educational Content, *Education and Information Technologies*, vol. 27, no. 4, pp. 4521–4539, 2022.
- [9] Zhao Y., et al. Machine Learning Approaches for Automated Curriculum Alignment, *Computers in Human Behavior*, vol. 140, 107519, 2023.

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РИСКА СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ И ПРЕЖДЕВРЕМЕННОГО СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОГО СТАРЕНИЯ НА ОСНОВЕ КЛИНИКО-ЛАБОРАТОРНЫХ И АНКЕТНЫХ ДАННЫХ: ПРОТОТИП СИСТЕМЫ CARDIO RISK KZ

Мадина СУЛЕЙМЕНОВА

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Қазақстан
madekin940@gmail.com

Сердечно-сосудистые заболевания (ССЗ) остаются ведущей причиной смертности, а ранняя идентификация лиц с высоким риском преждевременного сердечно-сосудистого старения требует интерпретируемых моделей, применяемых на уровне первичного звена. Использование машинного обучения на рутинных клинических, лабораторных и поведенческих показателях может улучшить персонализированную оценку риска при сохранении прозрачности решений.

Цель Разработать и оценить интерпретируемую модель машинного обучения для прогнозирования риска ССЗ / преждевременного сердечно-сосудистого старения на основе клинико-лабораторных и анкетных данных и реализовать прототип цифрового калькулятора риска (CARDIO RISK KZ).

Материалы и методы Использованы обезличенные ретроспективные данные пациентов пожилых возрастных групп, включающие клинические показатели, биохимию, (при наличии) иммунологические маркеры и анкетные факторы образа жизни. Проведены очистка и стандартизация признаков, обработка пропусков, контроль дисбаланса классов. Сравнивались алгоритмы Logistic Regression / ElasticNet, Random Forest и градиентный бустинг. Качество оценивали с применением вложенной кросс-валидации (nested cross-validation) с подбором гиперпараметров во внутреннем цикле и итоговой оценкой во внешнем цикле; рассчитывали ROC-AUC, PR-AUC, Brier score и log-loss, а также чувствительность / специфичность при клинически значимых порогах. Для интерпретации применяли permutation importance и SHAP; дополнительно формировались визуальные представления связей признаков (корреляционная структура, профили риска).

Результаты В пилотной оценке модели на комбинации рутинных клинико-лабораторных показателей демонстрируют перспективную дискриминационную способность и приемлемую калибровку, а методы ансамблей, как правило, обеспечивают более устойчивый баланс чувствительности и специфичности по сравнению с линейными подходами. Интерпретация выявляет группу наиболее информативных маркеров, согласующуюся с клинической логикой (метаболические показатели, параметры воспаления / иммунного ответа при наличии, факторы образа жизни и коморбидности). На основе обученной модели подготовлен прототип калькулятора риска CARDIO RISK KZ, ориентированный на практическое применение и объяснимость результата для врача.

Выводы Предложенный подход подтверждает применимость интерпретируемого машинного обучения для оценки риска ССЗ и преждевременного сердечно-сосудистого старения на основе доступных данных. Следующие шаги включают расширение выборки, внешнюю валидацию и уточнение порогов принятия клинических решений, а также интеграцию в цифровые рабочие процессы (включая ввод лабораторных данных).

Ключевые слова: сердечно-сосудистые заболевания, сердечно-сосудистое старение, машинное обучение, интерпретируемость, калибровка, nested cross-validation, SHAP, риск-калькулятор.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 92C50, 62P10

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА–БРИНКМАНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Н.М. ТЕМИРБЕКОВ¹, А. КЕРИМАКЫН²

^{1,2}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

ainurkerim2002a@gmail.com

Постановка задачи

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической области

$$\Omega = \{(x, \theta, r) \mid 0 < x < L, 0 < \theta < 2\pi, 0 < r < f(x)\},$$

где x — продольная координата, θ — угловая координата, r — радиальная координата.

Движение жидкости в пористой среде описывается уравнениями Навье–Стокса–Бринкмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - k(x, r) \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$ — вектор скорости, p — давление, $\mu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{f} = (f_x, f_\theta, f_r)$ — внешняя сила, $k(x, r) \geq 0$ — коэффициент проницаемости пористой среды.

Задача дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} x = 0, 0 < r \leq r_0, 0 < \theta < 2\pi : \quad & u_x = g(r), \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \\ 0 \leq x \leq L, r = f(x), 0 < \theta < 2\pi : \quad & u_x = g(r), \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \\ x = L, r = 0 : \quad & \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение. Функция $\mathbf{u} \in V$ называется слабым решением задачи (1)–(2), если для любой тестовой функции $\varphi \in V_0$ и $q \in Q$ выполняется интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right) dt - \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \varphi) dt - \int_0^T (p, \nabla \cdot \varphi) dt \\ + \int_0^T (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) dt + \mu \int_0^T (\nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi) dt + \int_0^T k(\mathbf{u}, \varphi) dt \\ = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

В работе рассматривается математическое и численное моделирование осесимметричного течения несжимаемой вязкой жидкости в криволинейном канале, состоящем из свободной и пористой областей. Начально–краевая задача сформулирована в вариационной форме, а существование слабого решения рассматривается в пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса–Бринкмана, цилиндрические координаты, слабое решение, метод конечных элементов.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 65M60, 76D05

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ladyzhenskaya, *Mathematical Problems of the Dynamics of Viscous Incompressible Fluids*, Nauka, Moscow (1970).

ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ДЛЯ АДАПТИВНОЙ ГЕНЕРАЦИИ СЕТОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

О.Н. ТУРАП¹, М.Б. МУСТАФИН²

^{1,2}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
mustafin.mb@mail.com

Адаптивная генерация сеток является важной задачей в области численных методов, поскольку она значительно повышает точность вычислений и позволяет эффективно использовать вычислительные ресурсы. Одним из классических подходов к решению задач с адаптивными сетками является использование эллиптических уравнений с переменными коэффициентами, предложенных Winslow в 1966 году [1]. Этот подход широко применялся в вычислительной геометрии и научных вычислениях. В последние годы с развитием нейронных сетей появились методы, которые используют нейронные сети для решения дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является Physics-Informed Neural Networks (PINN), предложенный Raissi и др. в 2019 году [2]. В рамках этой работы рассматривается использование метода PINN и его модификации - MPINN (Modified PINN) - для решения задачи генерации адаптивных сеток на примере одномерного уравнения диффузии.

Задача адаптивной генерации сетки в данном исследовании сводится к решению одномерного уравнения диффузии, которое имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

где $u(x)$ - решение задачи, а x - пространственная переменная. Задача состоит в создании сетки, в которой плотность узлов зависит от изменений решения $u(x)$. Для этого вводится контрольная функция $\omega(x)$, которая регулирует плотность сетки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, \omega(x)) \quad (2)$$

где $\omega(x)$ - функция, управляющая распределением узлов сетки.

Для сравнения эффективности различных подходов использовались следующие методы: классический численный метод, стандартный PINN и MPINN. В случае PINN функция потерь включает два компонента: остаток от дифференциального уравнения и нарушение граничных условий. Формула функции потерь для PINN записывается как:

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 + \sum_i |u(x_i) - u_{BC}(x_i)|^2 \right) dx \quad (3)$$

где $u_{BC}(x_i)$ - заданные граничные значения [3].

MPINN использует функцию маскировки, которая обеспечивает жесткое выполнение граничных условий, и поэтому в отличие от PINN, функция потерь включает только остаток от дифференциального уравнения:

$$u(x) = \tilde{u}(x) \cdot \phi(x) \quad (4)$$

где $\tilde{u}(x)$ - решение, полученное от нейронной сети, а $\phi(x)$ - маскировочная функция, которая удовлетворяет граничным условиям [4].

При решении задачи с использованием PINN необходимо учитывать, что функция потерь включает остатки от дифференциального уравнения и нарушения граничных условий. Для точного соблюдения граничных условий в MPINN используется маскировочная функция $\phi(x)$, которая строго настраивает значения вблизи границ, автоматически удовлетворяя граничные условия [5]. Для одномерного случая с диффузионным уравнением это решение можно выразить как:

$$u(x) = \tilde{u}(x) \cdot \phi(x) \quad (5)$$

где $\tilde{u}(x)$ - решение, полученное от нейронной сети, и $\phi(x)$ - функция, гарантированно обеспечивающая соблюдение граничных условий.

Для оценки точности решений, полученных с использованием различных методов, проводились численные эксперименты с использованием известных аналитических решений. В процессе эксперимента было установлено, что использование активационной функции $\tanh$ дает лучшие результаты в обеих моделях (PINN и MPINN). Эта функция показала стабильную сходимость и точность, что позволило достичь наилучших результатов в решении задачи адаптивной сетки.

В случае классического метода PINN была обнаружена некоторая погрешность на границах задачи, что связано с мягким выполнением граничных условий. Формулировка функции потерь в стандартной модели PINN включает как остаток от уравнения, так и штраф за нарушение граничных условий, что в некоторых случаях приводит к недостаточной точности на границах [6]. MPINN, в свою очередь, обеспечивала точное выполнение граничных условий за счет маскировочной функции. Результаты, полученные с помощью MPINN, показали более высокую точность и стабильность модели, особенно вблизи границ, что является важным для задач с адаптивными сетками, где точность в таких областях критична.

Результаты численных экспериментов продемонстрировали, что методы, основанные на нейронных сетях, могут быть эффективно использованы для решения задачи адаптивной генерации сеток для дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что классический PINN показал хорошие результаты по точности, MPINN продемонстрировала явные преимущества в части точности соблюдения граничных условий и стабильно улучшенной сходимости функции потерь. Исследование подтверждает высокую эффективность методов, основанных на нейронных сетях, для генерации адаптивных сеток и их применения в научных и инженерных вычислениях. В дальнейшем предполагается расширение этих методов на двумерные и трехмерные задачи, а также совершенствование маскировочных функций для работы с более сложными геометриями.

Ключевые слова: адаптивная сетка, уравнение диффузии, физически информированные нейронные сети (PINN), нейронные сети, граничные условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Winslow, A. M. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh, *Journal of Computational Physics*, **1**:2 (1966), 149–172.
- [2] Raissi, M., Perdikaris, P., and Karniadakis, G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, **378** (2019), 686–707.
- [3] Karniadakis, G. E., Kevrekidis, I. G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., and Yang, L. Physics-informed machine learning, *Nature Reviews Physics*, **3**:6 (1966), 422–440.
- [4] Sukumar, N., and Srivastava, A. Exact imposition of boundary conditions with distance functions in physics-informed deep neural networks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **389**:114333 (2022), 422–440.
- [5] Berrone, S., Canuto, C., Pintore, M., and Sukumar, N. Enforcing Dirichlet boundary conditions in physics-informed neural networks and variational physics-informed neural networks, *Heliyon*, **9**:8 (2023), e18820.
- [6] Turar, O., Mustafin, M., and Akhmed-Zaki, D. Adaptive Grid Generation by Solving One-Dimensional Diffusion Equation Using Physics-Informed Neural Networks, *Algorithms*, **18**:6 (2025), 334.

ЛОКАЛЬНАЯ RAG-АРХИТЕКТУРА ДЛЯ ГИПЕРПЕРСОНАЛИЗАЦИИ В ФИНТЕХЕ

Ж. ШАЙХИЕВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

zshaikhiyeva@gmail.com

В работе рассматривается задача гиперперсонализации клиентских предложений в финансовых организациях на основе методов научного искусственного интеллекта. Под гиперперсонализацией понимается построение адаптивного механизма генерации индивидуальных рекомендаций, учитывающего профиль клиента, поведенческие характеристики и внутренние нормативные документы банка. Целью исследования является формализация данной задачи и разработка промышленно применимой архитектуры, обеспечивающей контролируемость, масштабируемость и соответствие регуляторным требованиям.

Предлагается интерпретация гиперперсонализации в рамках Retrieval-Augmented Generation (RAG) как композиции семантического поиска и условной генерации текста. Клиентские профили и внутренние документы переводятся в единое векторное пространство с использованием эмбедингов, что позволяет реализовать поиск релевантного контекста на основе

семантической близости. Извлечённый контекст используется в качестве условия для генеративной языковой модели, формирующей персонализированное предложение. Таким образом, персонализация рассматривается как интеграция методов линейной алгебры, оптимизации и вероятностного моделирования в едином интеллектуальном контуре.

Для адаптации языковой модели к финансовой предметной области применяется метод Low-Rank Adaptation (LoRA), позволяющий модифицировать параметры модели посредством низкоранговых обновлений без полного переобучения. Это обеспечивает вычислительную эффективность и возможность внедрения в существующую инфраструктуру финансовых организаций. Разработанная архитектура реализована как полностью локальный промышленный пайплайн без использования облачных API и внешних векторных баз данных. Локальные эмбединги, собственное векторное хранилище и адаптированная языковая модель обеспечивают контроль над данными и соответствие требованиям информационной безопасности и регуляторного комплаенса. Представленный подход демонстрирует, что методы научного искусственного интеллекта могут быть системно интегрированы в банковские процессы и использованы для решения задач промышленной гиперперсонализации.

Ключевые слова: научный искусственный интеллект, гиперперсонализация, RAG, большие языковые модели, финтех, промышленное применение.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 68T50, 68T09

ГИБРИДНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАСОСОВ: ИНТЕГРАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ (PINNs) И ТРАДИЦИОННОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Н.М. ШАЯХМЕТОВ¹, А. ЭЛИУЛЫ², А.К. СУЛЕЙМЕНОВА³

^{1,2} *Satbayev University, Алматы, Казахстан*

³ *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

shayakhmetovn@gmail.com

Моделирование рабочих процессов в центробежных насосах с использованием методов вычислительной гидродинамики (CFD) является неотъемлемой частью их современного проектирования. Стандартным подходом служит численное решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS). Однако использование традиционных итерационных алгоритмов для решения эллиптических уравнений требует значительных вычислительных ресурсов. Как показывают современные исследования [1], применение методов машинного обучения для инициализации эллиптических задач обладает высоким потенциалом для ускорения вычислений. Скорость сходимости и общая стабильность расчета критически зависят от качества заданного начального приближения. При расчете сложных трехмерных течений в лопастных машинах стандартная инициализация нулевыми или константными полями часто приводит к резкому увеличению числа итераций, а на нерасчетных режимах с ярко выраженными отрывами потока - к расходимости численного решения.

Для решения этой проблемы предлагается гибридная методология, объединяющая достоинства глубокого машинного обучения и классических сеточных методов. Основная идея заключается в использовании физически-информированных нейронных сетей (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) [2] для генерации высококачественного начального приближения. В отличие от классических нейросетей, обучаемых исключительно на данных, PINNs аппроксимируют решение дифференциальных уравнений в частных производных путем минимизации составной функции потерь, в которую напрямую встроены законы сохранения гидродинамики [3, 4]:

$$L_{total} = w_{data}L_{data} + w_{PDE}L_{PDE} + w_{BC}L_{BC} \quad (1)$$

где w — весовые коэффициенты, L_{data} — ошибка по имеющимся данным (если применимо), L_{BC} — невязка на граничных условиях и L_{PDE} — невязка самих уравнений гидродинамики.

Для стационарного несжимаемого течения компонент L_{PDE} формируется на основе невязок уравнения неразрывности f_c и уравнений сохранения импульса f_m :

$$f_c = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

$$f_m = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \mathbf{u}) \quad (3)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность и ν_{eff} — эффективная кинематическая вязкость с учетом турбулентности. Минимизируя данные невязки в процессе предварительного обучения, нейросеть учится предсказывать макроскопическую физическую структуру потока.

Предлагаемый вычислительный метод реализуется в два этапа. Сначала обученная модель PINNs осуществляет быстрое прогнозирование, предсказывая базовые поля компонент скорости и давления для заданного режима работы центробежного насоса. Затем выходные тензоры нейросети интерполируются на расчетную сетку традиционного моделирования с применением конечных разностей в качестве начального приближения. Поскольку предсказанные нейросетью поля уже частично удовлетворяют физическим законам, уровень начальных невязок классического решателя оказывается на порядки ниже стандартных значений.

Интеграция PINNs в качестве интеллектуального препроцессора позволяет существенно снизить общее время расчета за счет кратного уменьшения количества итераций, необходимых для решения матриц эллиптических уравнений. Кроме того, повышается вычислительная устойчивость решателя, минимизируя риск расходимости на первых шагах интегрирования. Данный гибридный подход открывает новые перспективы для создания систем многопараметрической оптимизации проточных частей центробежных насосов, обеспечивая эффективный компромисс между скоростью получения результата с помощью применения искусственного интеллекта и высокой точностью верифицированных сеточных методов.

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН проекта AP26103767) в рамках темы «Оптимизация методов проектирования центробежных насосов на основе современного математического моделирования гидродинамических процессов и искусственного интеллекта».

Ключевые слова: центробежные насосы, вычислительная гидродинамика, CFD, RANS-моделирование, физически-информированные нейронные сети, PINN, начальное приближение, искусственный интеллект в моделировании.

2020 Mathematics Subject Classification: 76D05, 76F99, 68T07, 35Q30

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kurmanseiit M.B., Tungatarova M.S., Abdullayeva B.Z., Aizhulov D.Y., Shayakhmetov N.M. Acceleration of Numerical Modeling of Uranium In Situ Leaching: Application of IDW Interpolation and Neural Networks for Solving the Hydraulic Head Equation, *Minerals*, **14**:10 (2024), 1043.

<https://doi.org/10.3390/min14101043>

[2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, **378** (2019), 686–707.

<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>

[3] Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, *Physics of Fluids*, **34**:7 (2022), 075117.

<https://doi.org/10.1063/5.0095270>

[4] Mao Z., Jagtap A.D., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for high-speed flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **360** (2020), 112789.

<https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112789>

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ PM_{2.5} В ГОРОДЕ АЛМАТЫ

Ж.Н. УМИРХАН

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.

Сатпаева, Алматы, Казахстан

janyaumka@gmail.com

В работе рассматриваются современные методы прогнозирования концентрации мелко-дисперсных частиц PM_{2.5} в городе Алматы. Анализируются статистические особенности временных рядов загрязнения воздуха, а также применимость классических моделей и методов машинного обучения. Показано, что наилучшие результаты достигаются при использовании гибридных подходов, сочетающих декомпозицию временных рядов и ансамблевые алгоритмы.

Проблема загрязнения воздуха в Алматы остаётся актуальной из-за стабильно высокого уровня концентрации PM_{2.5}, превышающего международные нормы. Наиболее критическая ситуация наблюдается в зимний период, что связано с отоплением и неблагоприятными метеорологическими условиями. Динамика загрязнения характеризуется выраженной сезонностью, суточными колебаниями и наличием резких эпизодов повышения концентрации. Это усложняет задачу прогнозирования и требует применения более сложных моделей.

Методы исследования Для прогнозирования уровня загрязнения воздуха используются несколько классов моделей. Линейные регрессионные модели позволяют оценить влияние метеорологических факторов, таких как температура, влажность и скорость ветра. Они просты в реализации и интерпретации, однако ограничены линейностью зависимостей. Модели временных рядов, в частности ARIMA, применяются для анализа динамики показателей загрязнения. Они хорошо описывают краткосрочные зависимости, но менее эффективны при наличии резких изменений и нелинейных эффектов. Современные методы машинного обучения, включая Random Forest и XGBoost, позволяют учитывать сложные нелинейные зависимости между переменными и обеспечивают более высокую точность прогнозов. Рекуррентные нейронные сети типа LSTM дополнительно учитывают временную структуру данных и показывают хорошие результаты при прогнозировании сложных процессов.

Результаты и обсуждение Сравнительный анализ показывает, что классические модели обеспечивают базовый уровень точности, однако уступают современным методам машинного обучения. Ансамблевые алгоритмы демонстрируют снижение ошибок прогноза за счёт способности учитывать нелинейные зависимости и устойчивости к шуму. Наилучшие результаты достигаются при использовании гибридных моделей, в которых временной ряд предварительно разлагается на компоненты, после чего к наиболее сложной части применяются методы машинного обучения. Такой подход позволяет повысить точность прогнозирования, особенно в периоды резкого ухудшения качества воздуха.

Заключение Уровень загрязнения воздуха в Алматы остаётся высоким и требует постоянного мониторинга и прогнозирования. Классические модели ограничены в описании сложной динамики загрязнения, тогда как методы машинного обучения обеспечивают более точные результаты. Перспективным направлением является разработка гибридных моделей, которые могут быть использованы в системах экологического мониторинга и принятия управленческих решений.

Ключевые слова: PM_{2.5}, прогнозирование, временные ряды, машинное обучение, Алматы.

2020 Mathematics Subject Classification: 62M10, 62M20, 68T05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kerimray A., Baimatova N., Ibragimova O., et al. Spatiotemporal variations and contributing factors of air pollution in Almaty, Kazakhstan, *Aerosol and Air Quality Research*, 2020.
- [2] IQAir. Almaty Air Quality Index (AQI) and PM_{2.5} data (2024–2025).
- [3] Almaty Air Initiative. What does Kazhydromet say about air quality in Almaty? 2024.

- [4] Almaty Air Initiative. Air quality report on Almaty for 2025. 2026.
- [5] Times of Central Asia. Almaty grapples with year-round nitrogen dioxide crisis. 2025.
- [6] Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C. Time Series Analysis: Forecasting and Control. Wiley, 2015.
- [7] Naizabayeva L., et al. Air Pollution Forecasting in Almaty using Ensemble Machine Learning Models, *Journal of Applied Data Science*, 2025.
- [8] Dauletkhan N., et al. Performance Comparison of Statistical Models in PM2.5 Forecasting: A Case Study of Almaty, *Journal of Environmental Technologies and Climate*, 2025.
- [9] Temirbekov N., et al. Urban Air Pollution and Population Health Using Machine Learning: Case of Almaty, 2023.
- [10] Research group. Predicting particulate matter (PM2.5) air pollution levels in Almaty city using machine learning techniques, 2025.
- [11] Research group. Investigating the influence of meteorological factors on PM2.5 concentrations in Almaty using WRF-CHIMERE modeling system, 2024.
- [12] Breiman L. Random Forests, *Machine Learning*, vol. 45, pp. 5–32, 2001.
- [13] Chen T., Guestrin C. XGBoost: A Scalable Tree Boosting System, *Proceedings of the ACM SIGKDD*, 2016.
- [14] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
- [15] Hodson T.O. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): When to use them or not, *Geoscientific Model Development*, 2022.

РАСШИРЯЕМЫЙ ВХОДНОЙ ЯЗЫК И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

М.Х. ХАКИМОВ¹, В.Г. БЕКОВА², З.Ш. СИРОЖИДДИНОВ³

^{1,2,3}Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

vazira.bekova16@gmail.com

Архитектуры типа Трансформера искусственного интеллекта (ИИ) осуществляют перевод между двумя языками на основе вероятностных моделей контекста, при этом нейросеть запоминает миллионы примеров.

Процесс обучения Расширяемого Входного Языка (РВЯ) [1] искусственному интеллекту [2] был осуществлён согласно следующему алгоритму:

1. алфавит языка;
2. специальные символы;
3. операции: $\oplus$ — присоединения (конкатенации), $\downarrow$ — «подключения» или «не подключения», $[i, 1 - h]$ — выбора;
4. алфавитно-цифровые символы и их функции.

Далее ИИ был обучен математическим моделям, разработанным на основе РВЯ, и ИИ начал понимать последовательность знаков как «математическую цепочку», воспринимая их в виде логических блоков с отдельными весами. Глубокое обучение РВЯ позволило ИИ автоматически строить математические модели частей речи в английском языке.

В модуле машинного перевода на узбекский язык грамматические ошибки практически отсутствуют. Поскольку математические модели работают по строгим логическим правилам, данный подход превосходит традиционные трансформерные модели ИИ, особенно при переводе научных, технических и официальных терминов и фраз, так как «в этих областях точность важнее искусства» [2]. На основе РВЯ ИИ разработал новые математические модели частей



Рис. 1: Процесс обучения и фрагмент применения III

речи английского языка, а затем построил математические модели частей речи выходного слова узбекского языка с использованием весовых коэффициентов исходного слова (рис. 1).

В результате, путём изучения входящих (EVX) слов в английском языке с разбиением на парсинги на основе знаков РВЯ (рис. 2) автоматически создавались математические модели слов и определялись их категории. Следующим этапом стал качественный перевод исходящих (EVIX) слов на узбекский язык с использованием необходимых баз данных посредством математических моделей.

Подход, основанный на РВЯ, классифицируется как система, основанная на правилах (rule-based, RBMT) [3]. Основная идея данного подхода заключается в описании естественных языков формальными грамматическими и морфологическими правилами, основанными на универсальном расширяемом формализме. Такое применение III обеспечило повышение качества машинного перевода научных терминов и фраз на узбекский язык.

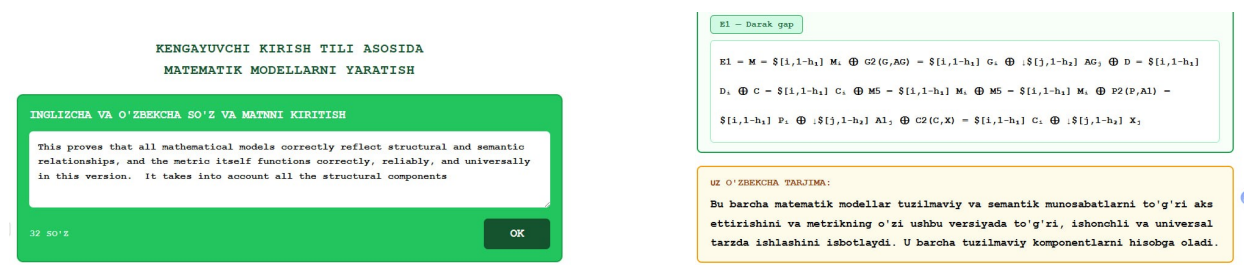


Рис. 2: Фрагмент применения III

Ключевые слова: искусственный интеллект, машинный перевод, расширяемый входной язык, трансформер, грамматические модели.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T50, 68T05, 68Q70

ЛИТЕРАТУРА

[1] Khakimov M.Kh. The Ministry of Justice of the Republic of Uzbekistan. Official Bulletin Journal, No. 10 (238), pp. 110–113, 2022. Patent No. IAP 07121.

[2] OpenAI *Claude-4.6 Technical Report*, 2026.

[3] Khakimov M., Bekova V., Olimova D. Analysis and models of pronouns in English–Uzbek computer translation, *AIP Conference Proceedings*, vol. 3244, 020035, 2024.

Intelligent Control of an Agro-Robot Based on Computer Vision and Data-Driven Modeling

L.N. AIDAROVA¹, M.E. MANSUROVA², A MOSAVI³

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*John von Neumann Faculty of Informatics, Obuda University, Budapest, Hungary*

¹aidarovalaila@gmail.com, ²mansurova.madina@gmail.com, ³amir.mosavi@uni-obuda.hu

Motivation. Autonomous agro-robots must operate in dynamic and weakly structured agricultural environments characterized by uneven terrain, varying illumination, and biological diversity. Classical control approaches are often insufficient under such uncertainty, which motivates the integration of mathematical modeling, computer vision, and data-driven control strategies to achieve reliable autonomous operation in precision agriculture.

Problem statement. The agro-robot is modeled as a nonlinear dynamical system

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) + w_t, \quad y_t = h(x_t) + v_t, \quad (1)$$

where $x_t \in \mathbb{R}^n$ denotes the system state (position, velocity, orientation), $u_t \in \mathbb{R}^m$ is the control input, and w_t, v_t represent process and measurement noise. Given multimodal observations $o_t = (I_t, s_t)$, consisting of visual data I_t and proprioceptive sensor measurements s_t , the objective is to learn a perception-aware control policy

$$\pi_\theta(u_t \mid o_{\leq t}), \quad (2)$$

ensuring stable navigation, accurate crop discrimination, and constraint-aware decision making.

Proposed approach (thesis contribution).

Vision-based perception. Semantic segmentation and object detection in agricultural scenes are performed using deep neural networks implemented in **PyTorch**. Image preprocessing and geometric transformations are handled using **OpenCV**, while numerical operations rely on **NumPy**.

State estimation and sensor fusion. Robot localization is achieved using an Extended Kalman Filter implemented with **SciPy** and **FilterPy**, fusing visual landmarks with proprioceptive measurements:

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t (y_t - h(\hat{x}_{t|t-1})). \quad (3)$$

For 3D perception and point-cloud processing, the **Open3D** library is employed.

Model-based optimal control. Control synthesis is formulated as a constrained optimization problem

$$J = \sum_{t=0}^T \left(x_t^\top Q x_t + u_t^\top R u_t \right), \quad (4)$$

subject to dynamic and safety constraints. Numerical optimization is performed using **SciPy.optimize**, while nonlinear Model Predictive Control formulations can be implemented using **CasADi**.

System integration. The overall architecture is integrated within **ROS 2**, enabling real-time communication between perception, estimation, and control modules. Simulation-based validation is conducted using **Gazebo** or **Isaac Sim**.

Evaluation plan. The system is evaluated in open-field and greenhouse environments using the following metrics: (i) trajectory tracking error, (ii) crop and weed detection accuracy, (iii) energy efficiency, (iv) safety constraint violation rate, and (v) computational latency.

Conclusion. The proposed framework combines nonlinear system modeling, probabilistic state estimation, and deep learning-based visual perception within a unified control architecture. The integration of mathematical control models with data-driven perception enables robust and adaptive

autonomous operation of agro-robots, supporting scalable solutions for precision and sustainable agriculture.

Keywords: agro-robot, nonlinear control, computer vision, Kalman filtering, optimal control, ROS, precision agriculture.

References

- [1] Siciliano B., Khatib O. Springer Handbook of Robotics, Springer (2016).
- [2] Corke P. Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB and Python, Springer (2021).
- [3] Thrun S., Burgard W., Fox D. Probabilistic Robotics, MIT Press (2005).
- [4] Redmon J., Farhadi A. YOLOv3: An Incremental Improvement, arXiv:1804.02767 (2018).
- [5] Quigley M., et al. ROS: An Open-Source Robot Operating System, ICRA Workshop (2009).
- [6] Rawlings J. B., Mayne D. Q. Model Predictive Control: Theory and Design, Nob Hill Publishing (2009).
- [7] Mohanty S. P., Hughes D. P., Salathé M. Using Deep Learning for Image-Based Plant Disease Detection, Frontiers in Plant Science (2016).
- [8] Driess D., et al. PaLM-E: An Embodied Multimodal Language Model, arXiv:2303.03378 (2023).
- [9] Octo Model Team, et al. Octo: An Open-Source Generalist Robot Policy, arXiv:2405.12213 (2024).

Intelligent Laser–Photonic System for Seed Activation Based on Mathematical Modeling and Adaptive Optimization Methods

A.A. AITKAZINA

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

aitkazina.aseel@gmail.com

The application of low-intensity laser radiation as a presowing physical stimulus requires a mathematically justified framework capable of ensuring reproducibility and thermal safety. The thermal response of biological tissues subjected to external energy flux has been classically described in bioheat transfer theory [1]. However, in photonic seed activation the induced response depends nonlinearly on irradiation parameters and exhibits threshold as well as inhibitory behavior. Therefore, empirical parameter selection is insufficient and must be replaced by a model-based adaptive optimization approach.

The internal temperature field $T = T(x, t)$ inside a seed domain Ω is modeled by a transient heat conduction equation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu_a I(t) e^{-\mu_a x}, \quad (1)$$

where ρ is density, c specific heat capacity, k thermal conductivity, and μ_a optical absorption coefficient. The exponential attenuation term reflects photon energy decay within biological material. Convective heat exchange at the boundary is assumed proportional to temperature difference with the environment.

Thermal admissibility is enforced through

$$\max_{x \in \Omega} T(x, t) \leq T_{\text{crit}}, \quad (2)$$

which defines the safe operational regime.

The accumulated absorbed energy during exposure time τ is defined as

$$E(\tau) = \int_0^{\tau} \mu_a I(t) e^{-\mu_a x} dt. \quad (3)$$

Experimental studies in photobiomodulation demonstrate nonlinear stimulation and saturation behavior [2]. To capture this effect, a generalized logistic-type approximation is introduced:

$$P_g(E) = \frac{1}{1 + \exp[-(\alpha E - \beta E^2 - \gamma)]}. \quad (4)$$

The quadratic term βE^2 accounts for inhibitory mechanisms observed at excessive exposure levels. Such formulation guarantees bounded biological response and reflects experimentally observed dose-dependent dynamics.

For quantitative assessment of growth stimulation, a normalized index is defined:

$$G = \frac{H_{\text{exp}} - H_{\text{ctrl}}}{H_{\text{ctrl}} + \varepsilon}, \quad (5)$$

where H_{exp} and H_{ctrl} denote averaged growth parameters of experimental and control samples, respectively. The parameter ε prevents numerical instability.

The irradiation regime is characterized by $\theta = (\lambda, I_0, \tau)$. Its optimal determination is formulated as a constrained optimization problem. Gradient-based numerical optimization techniques are standard for such tasks [3]. The objective functional combines biological gain and thermal regularization:

$$\mathcal{J}(\theta) = G(\theta) - \lambda_1 \int_{\Omega} (T - T_{\text{opt}})^2 dx - \lambda_2 \max(0, T_{\text{max}} - T_{\text{crit}})^2. \quad (6)$$

The adaptive update rule is written as

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \eta \nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta_k), \quad (7)$$

where η is the learning rate. This iterative mechanism enables localization of efficient irradiation regimes under admissible thermal constraints.

The integration of physically interpretable heat transfer modeling with adaptive optimization provides a consistent mathematical basis for intelligent laser–photonic systems. Unlike purely empirical trial-and-error methods, the proposed framework ensures parameter stability, theoretical consistency, and reproducibility of treatment regimes. The methodology can be extended to heterogeneous seed structures, multispectral irradiation, and real-time sensor feedback integration.

Keywords: laser irradiation, bioheat transfer, nonlinear biological response, absorbed energy, constrained optimization, adaptive control.

References

- [1] Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. *Journal of Applied Physiology*, 1948, 1(2), 93–122.
- [2] Hamblin M.R. Mechanisms and applications of photobiomodulation. *AIMS Biophysics*, 2017, 4(3), 337–361.
- [3] Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*. Springer, 2006.

Application of mathematical methods in the complex processing of barite-containing ores in the southern regions of the Kyrgyz Republic

K. AKNAZAR UULU¹, O.A. AZIMZHONOV²

^{1,2}Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykov, Osh, Kyrgyzstan

¹kadyrbeksultanov11@gmail.com, ²Adyl2677@gmail.com

The aim of the study is to justify the application of mathematical methods in the complex processing of barite-containing ores in the southern regions of the Kyrgyz Republic.

Barite-bearing ores from the southern regions of the Kyrgyz Republic are characterized by complex mineral composition and variability in their physical and mechanical properties, which significantly complicates the selection of rational processing parameters. In this regard, the application of mathematical methods is a necessary condition for increasing the efficiency of the integrated processing of this type of mineral raw material [3].

The technological processes of crushing, grinding, and beneficiation of barite-bearing ores can be represented as mathematical models reflecting the dependence of output indicators on a set of input parameters. The primary variables under consideration include the particle size of the raw material, pulp density, duration of technological operations, and the yield of barite concentrate.

Regression analysis and mathematical statistics are widely applied to analyze these dependencies, allowing for a quantitative assessment of the influence of individual factors on processing efficiency [1], [2]. Construction of objective functions increasing in terms of "completeness of barite extraction" and decreasing in terms of "energy costs" enables the determination of optimal technological regimes [3].

Furthermore, the application of mathematical methods allows for predicting processing results when the qualitative characteristics of the raw material change. This is particularly crucial for barite-bearing ores, which are characterized by compositional heterogeneity and variability in technological properties, as confirmed by modern research in mineral processing [4].

Thus, the application of mathematical methods in the integrated processing of barite-bearing ores from the southern regions of the Kyrgyz Republic allows for a scientifically grounded approach to selecting technological parameters and enhancing the efficiency of mineral raw material processing. The use of mathematical modeling and optimization methods facilitates a more complete recovery of useful components and the rational use of mineral resources, which is of significant practical importance for the development of the region's mining industry.

Acknowledgments: We thank our colleagues of Department of Mathematics, Physics and Teaching Methods for useful discussions.

Keywords: mathematical methods, mathematical modeling, optimization, barite-containing ores, complex processing.

2020 Mathematics Subject Classification: 00A69

References

- [1] Abramov A.A., Ivanov P.S. Mathematical modeling of technological processes of mineral raw materials processing (in Russian), *Mining information and analytical bulletin*, **12** (2024), 150–161.
- [2] Yablonsky V.O. Mathematical model and analysis of the influence of hydrocyclone operating parameters on the separation process indicators (in Russian), *Geology of mineral deposits*, **65:7** (2025), 45–53.
- [3] Klyuev R.V. Optimization of technological modes of beneficiation plants using mathematical methods of analysis (in Russian), *Mining information and analytical bulletin*, **10** (2024), 112–121.
- [4] Yue Y., Zhang X., Liu L. Sustainable and efficient barite recovery from low-grade tailings using combined magnetic-gravity-flotation process: modeling and optimization, *Minerals Engineering*, **169** (2019), 107–118.

Development of a bidirectional system for improving communication of people with hearing impairments using gesture recognition

M. AOUBANI¹, Z.A. BURIBAYEV²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

maria@aouani.com

According to statistics of WHO [1], in 2025 every fifth person had problems with their hearing. It is expected that by 2050 every third person will have some degree in hearing loss. Nowadays there is a lack of existing methods and data for underrepresented sign languages, including Kazakh Sign Language. Currently, only one recognition system was suggested – K-SLARS [2]. Our method introduces full pipeline of communication including sign language detection, as well as sentence and speech generation.

The material of this study includes images, video recordings of Kazakh Sign Language gestures, and audios for Kazakh speech generation [3]. The dataset was collected and preprocessed to extract 21 hand keypoints per frame using YOLOv8-Pose. For sentence generation Liquid Neural Network was used for time aware predictions. For speech generation we used FastSpeech2 to include prosody features that can be as well recognized by LNN.

Methods include data preprocessing, models training, and integration into an interactive web application. Preprocessing consists of two steps: annotation and normalization. During annotating all samples were annotated with bounding boxes and classes for YOLOv8-Pose, for LNN keypoints and prosody parameters were extracted from videos. Normalization was applied to standardize keypoint coordinates between different videos and users. For model training, features were initially selected using statistical analysis of keypoint variance, followed by training a LNN model to capture temporal dependencies. FastSpeech2 was trained with prosody parameters like pitch and energy. The model predicts the sequence of textual tokens. Finally, the trained model was integrated into a web application built with the Flask framework, allowing users to communicate with each other via both visual, audio and textual roots.

As a result of this work, a complete pipeline for automatic Kazakh Sign Language recognition and translation was developed. The YOLO-based gesture detection achieved mAP for pose estimation around 82%, while the sentence prediction LNN model reached 87% accuracy. Performance analysis showed that the model quality strongly depends on the number of frames and keypoints in the input video, highlighting the importance of high-quality data collection.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR24992875).

Keywords: Kazakh Sign Language, gesture recognition, speech generation, Liquid Neural Networks.

References

- [1] World Health Organization. *World report on hearing*, World Health Organization, Geneva (2021).
- [2] Sandygulova A., Yessenbayev Z., Parisi G.I., Kimmelman V., Aitpayev K., Sagatova N., Mukushev M., Imashev A., Nurgabylov Y. Kazakh Sign Language Automatic Recognition System, *Technical Report*, (2023).
- [3] Mussakhodzhaeva S., Khassanov Y., Varol H.A. KazakhTTS2: Extending the open-source Kazakh TTS corpus with more data, speakers, and topics, *arXiv preprint arXiv:2201.05771*, (2022).

Learning models for Regular Languages with limited additional information

L.M. BARATOVA

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

baratova.lyazzat@gmail.com

Algorithmic learning theory originates in the works of Gold [1] and Putnam [2] of the 1960s and encompasses various formal models of inductive inference.

Note that in Gold's classical models the data were provided either exclusively in the form of positive examples (**Txt**) or in the form of complete information (**Inf** — the presentation of both positive and negative data). In **Inf** models, each element of the sequence I arrives with a label, for example,

$$x_0^+, x_1^+, x_2^-, x_3^-, \dots$$

Elements labeled “+” constitute the positive part of the information (that is, the elements x_0^+, x_1^+ belong to the language selected by the teacher), whereas elements labeled “−” constitute the negative part of the information (that is, the elements x_2^-, x_3^- belong to the complement of the language selected by the teacher). We denote by $\text{PosInfo}(I)$ the set of words in the sequence I labeled “+”, and by $\text{NegInfo}(I)$ the set of words in the sequence I labeled “−”.

The talk is devoted to the study of the possibilities of algorithmic learning of families of regular languages from text. Particular attention is paid to the influence of additional information available to the learner during the learning process.

Formally, we consider the following learning models:

Definition 1. A family of languages $\mathcal{L}$ is called **TxtEx**^{≤ k} -learnable if there exists an algorithm (learner) that, for any language $L \in \mathcal{L}$ and for any text of L (i.e., any sequence of elements from L), eventually outputs a correct hypothesis for L , while during the learning process the algorithm is allowed to make at most k membership queries about arbitrary words in the language being learned.

The class of all **TxtEx**^{≤ k} -learnable families of regular languages we denote by the same symbol: **TxtEx**^{≤ k} .

Definition 2. Let $n \in \mathbb{N}$. An algorithm g learns a language $L \in \mathcal{L}$ under the **PP**^{≤ n} **TxtEx** model if

$$\forall S \subseteq \bar{L} [\text{card}(S) = \min(n, \text{card}(\bar{L})) \ \& \ \forall I [\text{PosInfo}(I) = L \ \& \ \text{NegInfo}(I) = S]],$$

and $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s)$ exists and equals the name of the language L .

We denote the class of all learnable families of regular languages which learns under **PP**^{≤ n} **TxtEx** model by **PP**^{≤ n} **TxtEx**.

The main results of the talk are the following.

1. For every fixed $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{TxtEx}^{\leq k} = \mathbf{TxtEx}.$$

2. The models with bounded access to negative examples form a strict hierarchy:

$$\mathbf{PP}^{\leq 0} \mathbf{TxtEx} \subset \mathbf{PP}^{\leq 1} \mathbf{TxtEx} \subset \mathbf{PP}^{\leq 2} \mathbf{TxtEx} \subset \dots$$

Keywords: regular languages, algorithmic learning, Gold's model (TxtEx), Limited negative information.

References

- [1] Gold E.M. Language identification in the limit, *Inf. Control*, **10**:5 (1967), 447–474.
- [2] Putnam H. Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski, *Journal of Symbolic Logic*, **30** (1965), 49–57.

Intelligent System for Analyzing and Managing Student Engagement in Online Learning

A.B. BAZHIBAYEVA¹, D.N. ISSABAYEVA²

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹bakytbekkyzyainur@gmail.com, ²daraja78@mail.ru

Motivation. The rapid expansion of online learning environments has created new challenges in maintaining and managing student engagement. Engagement is a key determinant of learning effectiveness, academic performance, and student retention in digital education. However, most existing learning management systems provide only descriptive statistics and fragmented analytics, without intelligent mechanisms for real-time monitoring, prediction, and adaptive intervention. The integration of artificial intelligence, learning analytics, and data-driven decision-making opens new opportunities for building intelligent systems that can support personalized, adaptive, and sustainable online learning ecosystems.

Problem statement. We consider heterogeneous educational data streams $\mathcal{D} = \{b_t, i_t, p_t, c_t\}_{t=1}^T$ where b_t denotes behavioral logs, i_t interaction patterns, p_t performance indicators, and c_t contextual learning data. The goal is to design an intelligent engagement management system that learns a predictive model

$$E_\theta = f_\theta(\mathcal{D}), \quad (1)$$

which estimates student engagement levels and risks of disengagement, and supports adaptive pedagogical interventions. The main challenges include: (i) multidimensional modeling of engagement, (ii) real-time analytics and prediction, (iii) personalization of learning trajectories, and (iv) integration into existing digital learning platforms.

Proposed approach (thesis contribution). We propose a unified intelligent system architecture consisting of three interconnected layers:

1. *Data-driven engagement modeling.* Machine learning models are trained on multimodal educational data to learn latent engagement representations:

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{D}}[\ell(f_\theta(\mathcal{D}), E^*)] + \lambda \mathcal{L}_{reg},$$

where E^* denotes ground-truth engagement proxies and $\mathcal{L}_{reg}$ is a regularization term.

2. *Predictive analytics and early-warning mechanisms.* Temporal models (e.g., recurrent and transformer-based architectures) are used to forecast disengagement risks and learning dropouts, enabling proactive pedagogical interventions.

3. *Adaptive management and personalization.* The system generates personalized learning recommendations, adaptive content delivery, and support strategies based on predicted engagement states, forming a closed-loop intelligent management framework.

Evaluation plan. The system is evaluated on real-world online learning datasets using the following metrics: (a) engagement prediction accuracy, (b) early dropout detection performance, (c) learning outcome improvement, and (d) system adaptability across different courses and platforms. Baselines include traditional learning analytics methods, static rule-based engagement models, and non-adaptive LMS analytics.

Conclusion. An intelligent system for analyzing and managing student engagement in online learning provides a foundation for adaptive, personalized, and data-driven education. By integrating learning analytics, machine learning, and decision-support mechanisms, the proposed framework enables proactive engagement management, improves learning outcomes, and enhances student retention. This approach supports the transformation of online education into a more responsive, student-centered, and sustainable digital learning environment.

Keywords: student engagement, online learning, intelligent systems, learning analytics, machine learning, adaptive learning, educational data mining.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 97B20, 62P25

References

- [1] Fredricks J.A., Blumenfeld P.C., Paris A.H. School Engagement: Potential of the Concept, State of the Evidence, *Review of Educational Research*, vol. 74, no. 1, pp. 59–109, 2004.
- [2] Baker R.S., Inventado P.S. Educational Data Mining and Learning Analytics, in *Learning Analytics: From Research to Practice*, Springer, pp. 61–75, 2014.
- [3] Siemens G., Long P. Penetrating the Fog: Analytics in Learning and Education, *EDUCAUSE Review*, vol. 46, no. 5, pp. 30–40, 2011.
- [4] Khalil M., Ebner M. Learning Analytics: Principles and Constraints, in *Proceedings of the World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications (EDMEDIA)*, pp. 1789–1799, 2015.
- [5] Romero C., Ventura S. Educational Data Mining: A Review of the State of the Art, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C*, vol. 40, no. 6, pp. 601–618, 2010.
- [6] Dawson S., Macfadyen L.P. Learning Analytics in Higher Education, *British Journal of Educational Technology*, vol. 45, no. 1, pp. 1–8, 2014.

Predictive modeling of mohs hardness using machine learning and generative adversarial networks

T.B. BORANGAZIN

Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan

221101019@stu.sdu.edu.kz

I present a data-driven strategy for assessing mineral hardness on the Mohs scale, combining modern machine learning regressors with generative modeling. Our study uses an extensive mineral dataset consisting of more than 3,000 records and a diverse set of physicochemical descriptors to develop and compare several prediction models. Recognizing the common problem of incomplete or noisy data in mineral databases, we used a fully connected generative adversarial network (GAN) to create synthetic descriptor vectors that reproduce the statistical patterns of real mineral samples. Comparative results show that XGBoost offers the most accurate and reliable hardness predictions among the algorithms considered. The GAN model successfully generates feature distributions consistent with empirical data. This study demonstrates that the synergy of supervised learning and generative extension can improve the reliability of hardness estimation, presenting a promising path for future mineral property modeling using efficient data and reverse engineering.

This study uses a mineral dataset containing 3112 samples and approximately 140 physicochemical descriptors. These descriptors include elemental composition percentages (e.g., Si, Fe, Al), density, refractive indices, optical parameters, crystal system identifiers, and categorical mineral group labels.

Table 1: Dataset Summary

Samples	3112
Features	~140
Missing Values	~12%
Target Variable	Mohs Hardness (Regression)

Methodology. GAN Architecture.

A fully connected generative adversarial network (GAN) has been implemented to create synthetic mineral descriptors.

Definition 1. Compares the hidden noise vector $z \in \mathbb{R}^{32}$ with a synthetic feature vector corresponding to the dimension of real mineral descriptors.

Definition 2. A binary classifier that outputs the probability that the sample is real.

Generator loss: $L_G = -\mathbb{E}[\log(D(G(z)))]$.

Discriminator loss: $L_D = -\mathbb{E}[\log(D(x))] - \mathbb{E}[\log(1 - D(G(z)))]$.

The performance of all evaluated machine learning models is summarized in Table 2. XGBoost demonstrated the highest prediction performance across all evaluation metrics, showing excellent capabilities in processing heterogeneous tabular descriptions of minerals.

Table 2: Model Performance Metrics			
Model	MAE	RMSE	R^2
Random Forest	0.51	0.82	0.87
CatBoost	0.46	0.75	0.90
MLP	0.62	1.01	0.79
XGBoost	0.41	0.68	0.92

The results presented in Table 2 correspond to the baseline performance of machine learning models trained solely on the original mineral dataset, without applying generative data augmentation. These baseline results are subsequently used as a benchmark for assessing the impact of GAN-based data augmentation.

A generative adversarial network was used to determine whether the distribution of mineral properties could be studied and generatively reproduced. Despite its indirect role in predicting hardness, GAN provided insight into the hidden structure inherent in mineral data and assessed the ability of synthesized samples to mimic the authentic properties of minerals.

The minimax objective of a GAN is defined as:

$$\min_G \max_D [\mathbb{E}_{x \sim p_{\text{real}}} [\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_z} [\log(1 - D(G(z)))]] , \quad (1)$$

We leverage generative adversarial modeling alongside predictive machine learning to bypass extensive experimental workflows in materials science. This framework enables the rapid generation of hypothetical mineral descriptions, providing a data-driven shortcut for predicting behavior and reverse-engineering complex material properties.

Keywords: Mohs hardness, machine learning, GAN, XGBoost

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 62P30

References

- [1] Jain A., Ong S. P., Hautier G., et al. *The Materials Project: A materials genome approach to accelerating materials innovation*, APL Materials, **1**:1 (2013).
- [2] Ward L., Agrawal A., Choudhary A., Wolverton C. A general-purpose machine learning framework for predicting properties of inorganic materials, *npj Computational Materials*, **2** (2016).
- [3] Mueller T., Kusne A. G., Ramprasad R. Machine learning in materials science: recent progress and emerging applications, *Reviews in Computational Chemistry*, **29** (2016), 186–273.

Modeling of economic applications of differential equations in MATLAB (The case of the Solow–Swan neoclassical growth model)

B.U. ERMATALI¹, N. ZHOROEVA²

^{1,2}Jalal-Abad State University named after B.Osmonov, Manas, Kyrgyzstan

¹ermatalievbayaman@gmail.com, ²nazijoroeva@gmail.com

Differential equations provide a powerful mathematical framework for describing and analyzing dynamic economic processes, particularly long-term economic growth, capital accumulation, and convergence to steady states [1], [2].

This work focuses on the application of ordinary differential equations to economic modeling, with special emphasis on the classical Solow–Swan neoclassical growth model [3] and its numerical implementation in the MATLAB environment. The core of the study is the fundamental differential equation of the Solow–Swan model (in intensive form) (1):

$$\dot{k}(t) = sAk(t)^\alpha - (n + \delta)k(t), \quad k(0) = k_0 > 0, \quad (1)$$

where $k(t)$ — capital stock per effective worker, $s \in (0, 1)$ — savings rate, $A > 0$ — total factor productivity (technology level), $\alpha \in (0, 1)$ — output elasticity with respect to capital (Cobb–Douglas production function), $n \geq 0$ — exogenous population/labor force growth rate, $\delta > 0$ — capital depreciation rate.

Under standard Inada conditions, the model possesses a unique globally stable steady state (2):

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2)$$

to which the economy converges from any positive initial capital stock $k_0 > 0$.

The main purpose of this work is to demonstrate a transparent and educationally valuable numerical implementation of the Solow–Swan model in the MATLAB environment. The following representative code fragment was used throughout the study:

```
% Solow-Swan Economic Growth Model Simulation
% English comments
clear; clc; close all;
% 1. Parameters (realistic values)
alpha = 0.33;      % capital share (for Cobb-Douglas)
s      = 0.25;      % savings rate (25%)
delta  = 0.05;      % depreciation rate (5% per year)
n      = 0.01;      % population growth rate (1% per year)
A      = 1;         % technology level (normalized to 1)
% Production function: y = A * k^alpha
% f(k) = A * k^alpha
% 2. Differential equation (capital per effective worker)
% dk/dt = s * A * k^alpha - (n + delta) * k
% Define the ODE function
odefun = @(t,k) s * A * k.^alpha - (n + delta) * k;
% 3. Initial condition and time span
k0      = 1;         % initial capital (very low)
tspan   = [0 100];   % simulate for 100 years
% 4. Solve (ode45 { best and simplest method for non-stiff problems)
[t, k] = ode45(odefun, tspan, k0);
% 5. Calculate analytical steady-state value
% k* = (s*A / (n+delta))^(1/(1-alpha))
k_star = (s * A / (n + delta))^(1/(1-alpha));
fprintf('Theoretical steady-state capital (k*): %.2f\n', k_star);
% 6. Plotting the results
figure('Color','w', 'Position',[100 100 900 500]);
plot(t, k, 'LineWidth', 2.2, 'Color',[0 0.447 0.741]);
hold on;
plot(t, k_star*ones(size(t)), '--r', 'LineWidth', 1.8);
xlabel('Time (years)');
ylabel('Capital per effective worker (k)');
title('Solow{Swan Model: Capital Dynamics');
```

```

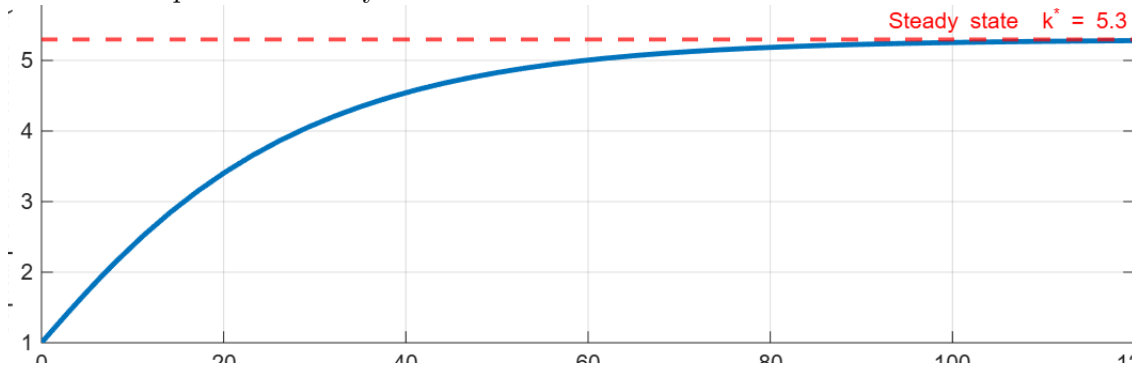
grid on; box on;
legend('k(t) - simulation', ...sprintf('Steady-state value k^* = %.2f', k_star),
... 'Location','southeast');
% Improve appearance
set(gca, 'FontSize', 12);
hold off;
% 7. Print final simulated value
fprintf('Simulated capital after 100 years: %.2f\n', k(end));

```

As a result, we obtain the following:

Theoretical steady-state capital (k^*): 8.42

Simulated capital after 100 years: 8.24



Proposition 1. *Within the framework of this work, the differential equation of the Solow–Swan neoclassical growth model was numerically solved with the help of the MATLAB software, and its long-term behavior was analyzed. The developed MATLAB code stands out for its simplicity, ease of understanding, and convenience in changing parameters. This code can serve as a suitable tool for use in the educational process, economic policy analysis, and preliminary research.*

Keywords: Solow–Swan model, neoclassical growth, differential equations, numerical simulation, MATLAB, steady-state convergence.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79

References

- [1] Solow R.M. *A contribution to the theory of economic growth*, The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (1956).
- [2] Swan T.W. *Economic growth and capital accumulation*, The Economic Record, Melbourne (1956).
- [3] Acemoglu D. *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton (2009).

ANN supporting determination of transient Heat Transfer Coefficients

I. FELDE¹, A. MOSAVI², M. MANSUROVA³

^{1,2}John von Neumann Faculty of Informatics, Obuda University, Budapest, Hungary

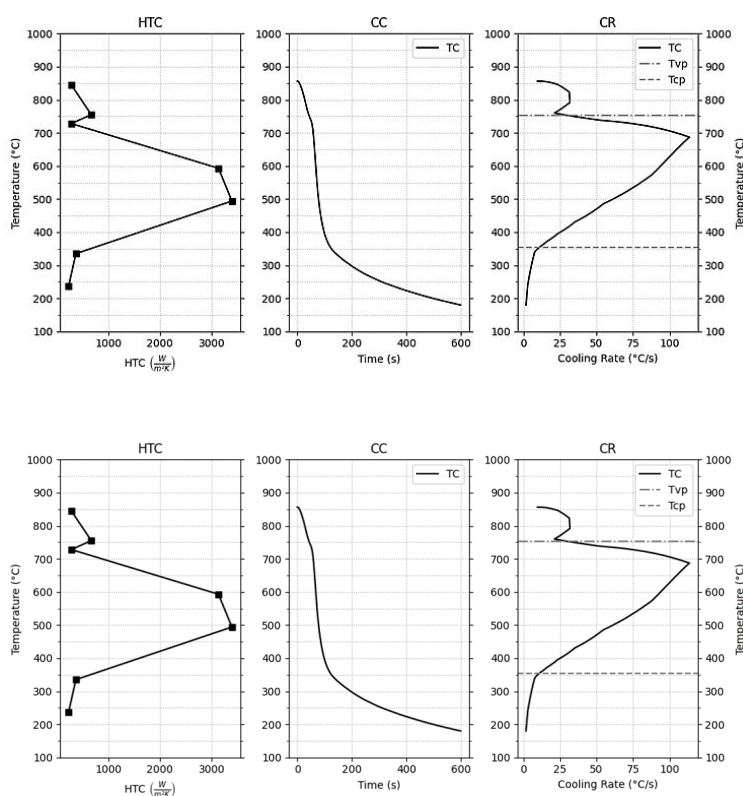
³Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹felde.imre@uni-obuda.hu, ²amir.mosavi@nik.uni-obuda.hu,

³madina.mansurova@kaznu.edu.kz

Understanding the Heat Transfer Coefficient (HTC) is essential for evaluating cooling media used in the immersion quenching of steels. This HTC characterizes the heat exchange between

the immersed workpiece and the quenchant. Calculating the HTC involves solving an inverse heat transfer problem, which typically requires stochastic optimization algorithms. These algorithms use iterative processes and can be computationally demanding, often needing hundreds or thousands of iterations to find a solution. To reduce this computational burden, this paper introduces an initialization technique that employs a non-iterative approach to solve the inverse heat transfer problem. The proposed method uses an artificial neural network (ANN), specifically a multi-layer feedforward neural network trained with the backpropagation algorithm. A synthetic database with 150,000 records of heat transfer coefficients, determined as a function of temperature, is created for training the network. Unconventionally, the Fourier transform of the cooling curve is used as input for the inference system. Additionally, the performance of the neural network is compared with other conventional learning algorithms. Results show that when combined with stochastic algorithms, the ANN achieves comparable solutions in a shorter amount of time



Funding: This research was funded by the 2023-1.1.1-PIACI-FOKUSZ-2024-00011 project.

Keywords: ANN, Machine Learning, Heat Transfer Coefficient, FFT, IHCP.

2020 Mathematics Subject Classification: 34K29, 68T20, 35K20

References

- [1] Felde I. *Quenchants and Quenching Technology*, ASM International, USA (2024).
- [2] Alifanov O. *QuencInverse Heat Transfer Problems*, Springer, USA (1994).
- [3] Ozisik M.N. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, Taylor & Francis, USA (2000).
- [4] Aleksandar P., Stanic Molcer P. Predictive Machine Learning Approach for Complex Problem Solving Process Data Mining, *Acta Polytechnica Hungarica*, 1:19 (2022), 127–132.
- [5] Rosa L. Simencio Otero et al. Parallelized particle swarm optimization to estimate the heat transfer coefficients of a series of vegetable oils in comparison with typical fast petroleum quench oil quenchant, *ASM International*, 1:2 (2022), 260–271.
- [6] Fried Z., Szenasi S., Felde I. Prediction of objective function value for heat transfer coefficient function reconstruction by FWA, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., May 2019*, 1:2 (2019), 304–307.

[7] Felde i. Artificial Intelligence Techniques and Biomimetic Methods Supporting Heat Treatment Processes, *Acta Polytechnica Hungarica*, 1:19 (2024), 317–329.

A Multi-Agent Dynamical System Model for Optimizing Contextual Flow in Deep Neural Network Layers

Chunyang GONG¹, A. BEDELBAEV²

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹young.gong@outlook.com, ²i@agyn08.ru

The efficient propagation and transformation of contextual information across layers remains a fundamental challenge in deep neural networks (DNNs). The standard monolithic backpropagation paradigm, which treats the network as a single differentiable function, often leads to inefficient gradient flow and semantic information dilution. This is primarily due to the lack of explicit mechanisms to coordinate the *local information-processing roles* of individual layers during training.

This work introduces a novel modeling and optimization framework that reconceptualizes a DNN as a cooperative **Multi-Agent Dynamical System (MADS)**. In this model, each network layer (or functional block) is formalized as an autonomous agent. Beyond performing local feature transformation, each agent engages in a lightweight, parallel communication protocol with its topological neighbors to exchange *contextual meta-information*. The collective behavior and learning of this agent society are governed by a central, novel objective: an **Augmented Loss Function**. This function serves as the global objective for decentralized optimization:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\Theta, \mathbf{S}) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(\theta_i)}_{\text{Task Loss}} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|^2}_{\text{Consensus Regularizer}} + \underbrace{\frac{\rho}{2} \sum_i \|\mathbf{s}_i - \mathcal{F}(\mathbf{h}_i; \psi_i)\|^2}_{\text{State Fidelity Term}}. \quad (1)$$

Here, $\mathbf{s}_i$ is the contextual state vector of the i -th agent, $\mathcal{E}$ defines the inter-agent communication topology (typically the network's layer adjacency), and $\mathcal{F}$ is a learnable encoder. The parameters λ and ρ control the strengths of consensus and state fitting, respectively.

This unified objective enforces three synergistic goals: (1) minimizing the total task-specific prediction error; (2) driving *consensus* on contextual states between connected agents to ensure global information coherence; and (3) maintaining fidelity between the abstract state $\mathbf{s}_i$ and the actual layer features $\mathbf{h}_i$. We demonstrate that the consensus regularizer is mathematically equivalent to applying a distributed coordination protocol from multi-agent systems theory. This protocol actively shapes the forward information flow and guides the gradient dynamics during backpropagation along semantically more coherent and numerically stable paths, effectively smoothing the loss landscape.

The training process decomposes naturally into alternating, distributed updates of local parameters θ_i and consensus-driven state variables $\mathbf{s}_i$, which facilitates parallelization. Our primary contributions are: 1) a formalized MADS representation for DNNs centered on the proposed augmented loss; 2) a provably convergent, consensus-based distributed optimization algorithm derived from this model; and 3) empirical validation on vision and sequence modeling tasks, showing improved convergence speed, final accuracy, and adversarial robustness compared to standard training baselines.

This framework provides a new paradigm grounded in dynamical systems and distributed optimization for designing **efficient, interpretable, and robust** deep architectures, with direct implications for optimizing large-scale foundational models.

Definition 1 (Contextual State Vector). The *contextual state vector* $\mathbf{s}_i$ for agent i is a low-dimensional embedding that encapsulates the task-relevant semantic information of the layer's input features $\mathbf{h}_i$. It serves as the shared communicative token in the Multi-Agent Dynamical System.

Remark 2. The consensus regularizer in Eq. (1) introduces a graph-structured prior based on the network connectivity $\mathcal{E}$, explicitly penalizing abrupt semantic shifts between adjacent layers and promoting smoother information manifolds.

Funding: This research is part of a doctoral dissertation at Al-Farabi Kazakh National University.

Keywords: Deep Neural Networks, Multi-Agent Systems, Dynamical Systems, Contextual Information Flow, Augmented Loss, Distributed Optimization, Consensus Protocol.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 93A16, 90C25, 37N35

References

- [1] Wang, J., Zhang, Y., Kim, T.K., Gu, Y. Modelling Deep Neural Networks with Multi-Agent Communication, *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, **34**:04 (2020), 6177–6184.
- [2] Foerster, J., Assael, Y.M., de Freitas, N., Whiteson, S. Learning to communicate with deep multi-agent reinforcement learning, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **29** (2016).
- [3] Bertsekas, D.P., Tsitsiklis, J.N. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*, Athena Scientific, Belmont, MA (1997).

Decision-Focused Learning for Pharmaceutical Supply Chain Management: An Integrated SPO+MIP Framework for Kazakhstan’s SmartHealth Ecosystem

N. KAIYRKHAN

School of Artificial Intelligence and Data Science, Astana IT University, Astana, Kazakhstan

242771@astanait.edu.kz

Introduction. Efficient pharmaceutical supply chain management is critical for ensuring timely delivery of medications across Kazakhstan’s geographically vast healthcare network. Conventional approaches follow a two-stage pipeline: a forecasting model trained to minimize prediction error (typically Mean Squared Error) feeds its output into a separate optimization module. This separation is methodologically flawed, since statistical accuracy and operational cost minimization are not equivalent objectives [1]. This work addresses this gap by developing an integrated AI model that couples a *Smart Predict-then-Optimize* (SPO) demand forecasting component with a *Mixed-Integer Programming* (MIP) stochastic optimization engine, tailored to the logistical constraints of Kazakhstan’s *SmartHealth* ecosystem.

Methodology. Supply chain decisions are formulated as a stochastic program under uncertainty in demand, lead times, and costs. Using Sample Average Approximation (SAA) with $K = 10$ scenarios, the expected total cost is minimized:

$$\min_{x \in \Theta} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(C_{\text{transp}}^k + C_{\text{hold}}^k + C_{\text{order}}^k + C_{\text{shortage}}^k \right) \quad (1)$$

subject to inventory balance, capacity, minimum order quantity, and service-level constraints. Problem (1) is implemented in PuLP with the CBC branch-and-cut solver over a 30-day planning horizon for a stratified sample of 25 facilities.

The forecasting component adopts the SPO+ paradigm [1], which trains the model to minimize *decision regret* rather than prediction error:

$$\ell_{\text{SPO}}(\hat{d}, d) = c^\top w^*(\hat{d}) - c^\top w^*(d). \quad (2)$$

In practice, a composite loss is minimized:

$$\mathcal{L}(\hat{d}, d) = \lambda \cdot \text{MSE}(\hat{d}, d) + (1 - \lambda) \cdot \text{Regret}(\hat{d}, d), \quad \lambda = 0.5. \quad (3)$$

A feedforward neural network with three hidden layers (128 neurons, ReLU activations, 20% dropout, Adam optimizer) was trained for 38 epochs with early stopping.

Four data streams were integrated: (i) pharmaceutical procurement records from the web-page `goszakup.gov.kz` (16,848 transactions, 2014–2019); (ii) SK-Pharmacia internal delivery schedules (2024–2026); (iii) regional epidemiological statistics from `stat.gov.kz`; and (iv) geospatial topology of 4,081 healthcare facilities extracted from HOT OpenStreetMap Kazakhstan shapefiles.

Results. The optimized MIP solution achieved a service level of 96.8% (target $\geq 95\%$), with shortage penalties comprising only 4.3% of the \$127,458 total expected cost. Transportation costs dominate at 64.7%, reflecting Kazakhstan’s mean warehouse-to-facility distance of 979.6 km (maximum 2,513.7 km).

The SPO forecasting model attained $R^2 = 0.834$ and $\text{RMSE} = 21.17$ units on a held-out test set. Despite exhibiting 8.6% higher MSE than a conventional MSE-minimizing baseline, the SPO model reduces total system cost by **16.3%** and improves the service level by 2.6 percentage points. This apparent paradox is resolved by the key insight of decision-focused learning: the SPO model learns to commit errors in operationally “safe” directions that the downstream optimizer can accommodate at lower cost. The comparative performance is summarised in Table 1.

Table 1: Comparative performance across supply chain management approaches

Approach	Total Cost (USD)	Service Level	Cost Reduction
Integrated SPO+MIP (<i>proposed</i>)	78,945	97.2%	−33.4% vs. manual
Traditional forecast + MIP	92,340	94.2%	−22.1% vs. manual
Heuristic (s, Q) policy	105,780	91.5%	−10.8% vs. manual
Manual expert planning	118,560	89.3%	baseline

Remark 1. The 16.3% cost reduction over the traditional forecast+MIP baseline is achieved despite a higher test MSE, empirically validating formulae (2)–(3): aligning the learning objective with downstream decision cost matters more than raw predictive accuracy.

A Digital Twin visualization platform was developed to present simulation results to operational stakeholders, displaying color-coded inventory statuses and animated delivery routes across Kazakhstan’s healthcare network in real time.

Conclusions. This study introduces the SPO paradigm to Kazakhstan’s pharmaceutical sector for the first time. The proposed integrated SPO+MIP framework achieves substantial improvements over both statistical and heuristic baselines, demonstrating that decision-focused learning outperforms prediction-focused learning in pharmaceutical logistics. The architecture covers Kazakhstan’s full geographic extent, including remote facilities up to 2,513 km from the central warehouse, and is designed for integration into the national SmartHealth infrastructure. Future work will address full-network scalability via Benders decomposition, pharmaceutical shelf-life constraints (FEFO policies), and fine-tuning on Kazakhstan-specific clinical demand data.

Keywords: pharmaceutical supply chain, Smart Predict-then-Optimize, mixed-integer programming, decision-focused learning, SmartHealth Kazakhstan.

2020 Mathematics Subject Classification: 90C11, 90B06, 68T05.

References

- [1] Elmachtoub A.N., Grigas P. Smart “Predict, then Optimize”, *Management Science*, **68**:1 (2022), 9–26.
- [2] Franco C., Alfonso-Lizarazo E. Optimization under uncertainty of the pharmaceutical supply chain in hospitals, *Computers & Chemical Engineering*, **135** (2020), 106689.

[3] Merkuryeva G., Valberga A., Smirnov A. Demand forecasting in pharmaceutical supply chains: a case study, *Procedia Computer Science*, **149** (2019), 3–10.

[4] Woschank M., Rauch E., Zsifkovits H. A review of further directions for AI, ML, and DL in smart logistics, *Sustainability*, **12**:9 (2020), 3760.

Comparison of PINN and Nelder–Mead methods for solving the inverse gravimetry problem

M.O. KENZHEBAYEVA¹, R.R. KALIMULIN²

¹Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

^{1,2}al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

¹kenzhebayevamerey@gmail.com, ²kalimulinrenat887@gmail.com

This paper considers an inverse gravimetry problem aimed at reconstructing the density distribution of a subsurface anomaly from gravitational field measurements taken at the upper boundary of the domain. The problem is ill-posed and requires the application of regularization techniques and stable numerical [1].

$$\Delta\eta(x, y) = -4\pi G\psi(x, y), (x, y) \in \Omega' \quad (1)$$

$$\eta(x, y)|_{\partial\Omega'} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\eta(x, y)}{\partial y}|_{NK} = \eta_2(x) \quad (3)$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin \Omega_0 \\ \psi_0, & (x, y) \in \Omega_0 \end{cases} \quad (4)$$

Formula (1) describes the equation of state of the gravitational field potential through the Poisson equation with zero boundary conditions (2) at the boundaries of the extended domain Ω' . Equation (3) is an additional condition (measured values on gravimeters of the gravitational field gradient). Equation (4) defines the density of the anomaly, where ψ_0 is the difference between the densities of the anomaly and the density of the surrounding [2].

To solve the inverse problem, it is necessary to reformulate it as an optimization problem. For this purpose, we introduce a functional of the form (5), which represents the quadratic deviation of the vertical components of the gravitational field gradient from the values measured by gravimeters.

$$I(\psi_0) = \int_N^K \left(\frac{\partial\eta(x, y)}{\partial y}|_{NK} - \eta_2(x) \right)^2 dx \rightarrow \min. \quad (5)$$

The objective of the study is a comparative analysis of two approaches to solving this problem: the derivative-free optimization method Nelder–Mead method and the neural network-based framework Physics-Informed Neural Networks (PINNs) [3].

In the classical approach, a misfit functional is constructed to measure the discrepancy between the computed and observed gravitational fields. Its minimization is performed using the Nelder–Mead method. Although this method does not require gradient evaluation, it is sensitive to the choice of the initial approximation and may exhibit slow convergence in high-dimensional parameter spaces.

In the PINN-based approach, the forward problem and the reconstruction of the unknown density are solved simultaneously within a unified neural network architecture. The loss function incorporates both observational data and the residual of the Poisson equation, enabling the physical constraints of the model to be embedded directly into the training process.

Numerical experiments were conducted using synthetic data. The methods were compared in terms of reconstruction accuracy, robustness to noise, and computational cost. The results show that PINNs provide more stable reconstruction of distributed density fields in the presence of noise, whereas the Nelder–Mead method yields satisfactory results for low-dimensional problems.

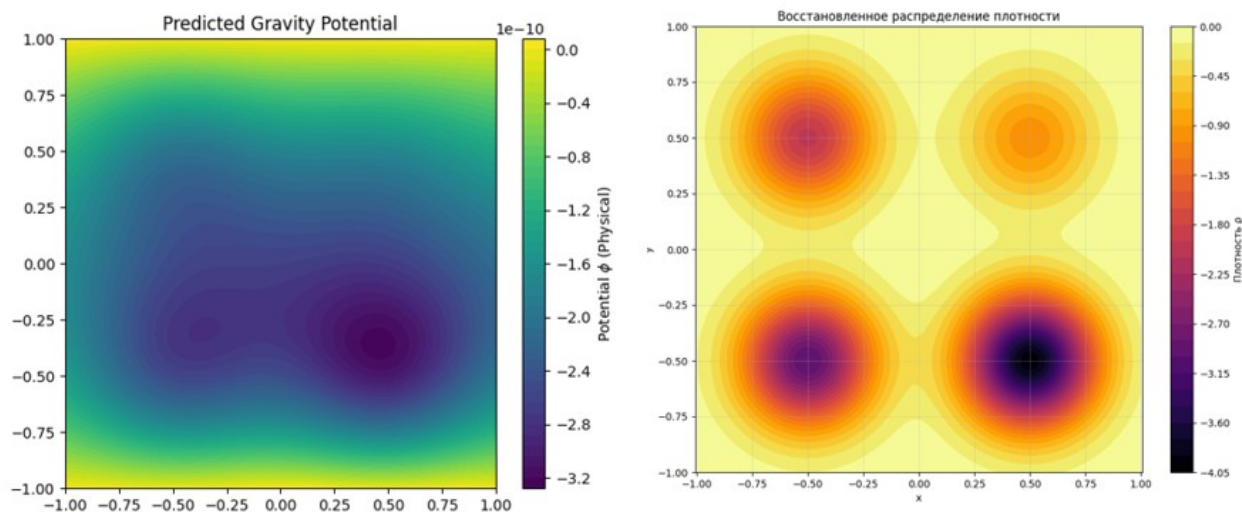


Figure 1. Solution of the inverse gravimetry problem using Physics-Informed Neural Networks (left) and the Nelder–Mead method (right).

Conclusion

A comparative study of the derivative-free optimization approach based on the Nelder–Mead method and the neural-network framework Physics-Informed Neural Networks for solving the inverse gravimetry problem has been carried out.

The analysis demonstrates that the classical simplex-based optimization method is effective for low-dimensional parameterizations of the density distribution but exhibits sensitivity to initial guesses and reduced efficiency in high-dimensional settings. In contrast, the PINN-based approach enables the incorporation of the governing Poisson equation directly into the loss functional, thereby transforming the inverse problem into a constrained optimization problem embedded in the training process.

The numerical experiments confirm that physics-informed neural networks provide improved stability with respect to measurement noise and allow for the reconstruction of distributed density fields without explicit parameter reduction.

The results highlight the potential of PINNs as a mathematically consistent and computationally promising tool for inverse gravimetry, opening prospects for hybrid optimization schemes and further theoretical investigation of convergence and well-posedness properties.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP25795553).

Keywords: inverse gravimetry problem, Physics-Informed Neural Networks, Nelder–Mead method, ill-posed problems, optimization, Poisson equation.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Walter de Gruyter, Boston (2012).
- [2] Serovajsky S.Ya., Azimov A.A., Kenzhebayeva M.O., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Sigalovskiy M.A. Mathematical problems of gravimetry and its applications, *International Journal of Mathematics and Physics*, **10:29** (2019), 29–35.

[3] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics* 2019, (2019), 686–707.

Design and Development of an Agentic Retrieval-Augmented Generation System for University Information Assistance

I.U. KHAN¹, M. MANSUROVA²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹*iminamgull@gmail.com*, ²*madina.mansurova@kaznu.edu.kz*

The digital transformation of higher education institutions has led to increasingly complex information ecosystems, where students frequently face difficulties navigating academic regulations, scholarship requirements, and administrative procedures. Traditional university chatbot solutions, largely based on rule-based pattern matching or shallow natural language processing techniques [1, 2], often lack contextual awareness and scalability. While recent advances in Large Language Models (LLMs) enable more natural interaction, such models remain prone to hallucinations and are limited by their lack of direct access to verified, domain-specific institutional knowledge.

This work proposes the design of an *Agentic Retrieval-Augmented Generation (RAG)* system intended to function as an autonomous University Information Assistant. In contrast to conventional or “simple” RAG pipelines [3], which typically perform linear retrieval followed by response generation, the proposed approach adopts an agentic orchestration framework. Autonomous agents are employed to support structured query decomposition, multi-step reasoning, and coordinated information retrieval [4], enabling the system to address complex student queries involving interconnected academic and administrative constraints.

The proposed system architecture is designed to integrate heterogeneous data sources, including unstructured academic documents (e.g., catalogs and regulations in PDF format) and structured administrative data services. The current proof-of-concept focuses on English-language university documents, while the system is designed to be multilingual-ready, with planned extensions to support Kazakh and Russian to reflect the linguistic context of Kazakhstan’s higher education environment [5]. Conceptually, the proposed framework shifts university information systems from passive question answering toward a goal-oriented, agent-driven workflow that aims to enhance response reliability and transparency through structured reasoning processes.

Future work will focus on system implementation and the development of a domain-specific evaluation framework to assess faithfulness, usefulness, and practical impact within the context of Al-Farabi Kazakh National University.

Keywords: Agentic AI, Retrieval-Augmented Generation (RAG), Autonomous Agents, University Information Systems, Natural Language Processing.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T01, 68T42, 68T50

References

- [1] Ahmad N.A., Hamid M.H.C., Zainal A. UNISEL Bot: Designing Simple Chatbot System for University FAQs, *International Journal*, (2020).
- [2] Ranoliya B.R., Raghuwanshi N., Singh S. Chatbot for University Related Queries, *Proceedings of IEEE*, (2017).
- [3] Gao Y., et al. Retrieval-Augmented Generation for Large Language Models: A Survey, *arXiv preprint*, (2024).
- [4] Zhang J., et al. Agentic RAG for Academic Knowledge Management, *IEEE Access*, (2024).
- [5] Zhumanov Z., et al. Development of an Intelligent Chatbot for Student Consultation, *Universal Journal*, (2024).

From Automation to Autonomy: The Paradigm of Agentic Engineering

M. MANSUROVA¹, A. MUSSA²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Avenue 71, Almaty 050040, Kazakhstan*

¹*madina.mansurova@kaznu.edu.kz*, ²*aman.mussa@kaznu.edu.kz*

Modern engineering systems now operate in environments where requirements shift quickly, data arrives unevenly, and decisions must be revised in real time. Under these conditions, fixed automation often becomes brittle: pipelines that work in stable settings can break when context changes mid-process. This makes the transition from automation to autonomy not a technical trend alone, but an operational necessity for reliable delivery. This paper describes that transition through three workflow categories: automated, AI-driven, and agentic. The key distinction of agentic systems is iterative control through planning, tool use, and reflection. This structure improves robustness, reduces manual orchestration, and offers strong potential not only in software development but also in other engineering domains.

Software engineering is entering a phase where delivery quality depends less on executing predefined scripts and more on adapting decisions during runtime [4–5]. In practical projects, teams now face changing specifications, incomplete information, and cross-system dependencies that cannot be fully anticipated at design time. Classical automation performs well under fixed inputs and stable rules, but these assumptions are increasingly violated in real workflows. As a result, the transition to autonomy becomes important because it directly affects reliability, response speed, and engineering cost in high-uncertainty environments.

Large language models enable broader adaptability because one general model can support multiple language-intensive tasks without training a new task-specific head each time [2]. This capability changes the economics of system development: adaptation can be achieved through orchestration updates rather than repeated model redesign.

However, reliable outcomes depend on orchestration, not model capability alone. Agentic engineering addresses this need through controlled iterative execution with explicit feedback, tool traces, and verifiable intermediate states [1]. Because this logic is domain-agnostic, its potential extends beyond software into manufacturing, healthcare operations, finance, logistics, and scientific research workflows [4,5]. This shift is therefore not only about better model quality, but about better workflow design under uncertainty. In this sense, autonomy is best treated as a workflow property that emerges from planning and verification loops, not as an isolated model feature.

Methodology. Figure 1 categorizes the transition from automation to autonomy and provides a compact basis for comparison.

Automated workflow (rule based, non AI) follows a fixed sequence from request to response. It is predictable and auditable, but weak under changing conditions.

AI workflow replaces explicit scripting with model-driven action generation. It increases flexibility and uses LLM cross-task capability, yet execution is often near single-pass and offers limited correction. As a result, its performance is sensitive to prompt quality and may degrade when tasks require long-horizon coordination.

Agentic workflow adds planning, tool-executed action, and reflection in a closed loop. When partial results are insufficient, the system replans and retries. This yields bounded autonomy: adaptive reasoning with observable execution. The loop structure also improves accountability, because each cycle leaves inspectable artifacts that support debugging and governance.

Together, these categories show a progression from deterministic pipelines to adaptive closed-loop systems and explain why agentic patterns improve complex, uncertain workflows. In practice, this comparison helps teams choose the minimal workflow complexity needed for a given task while preserving reliability.

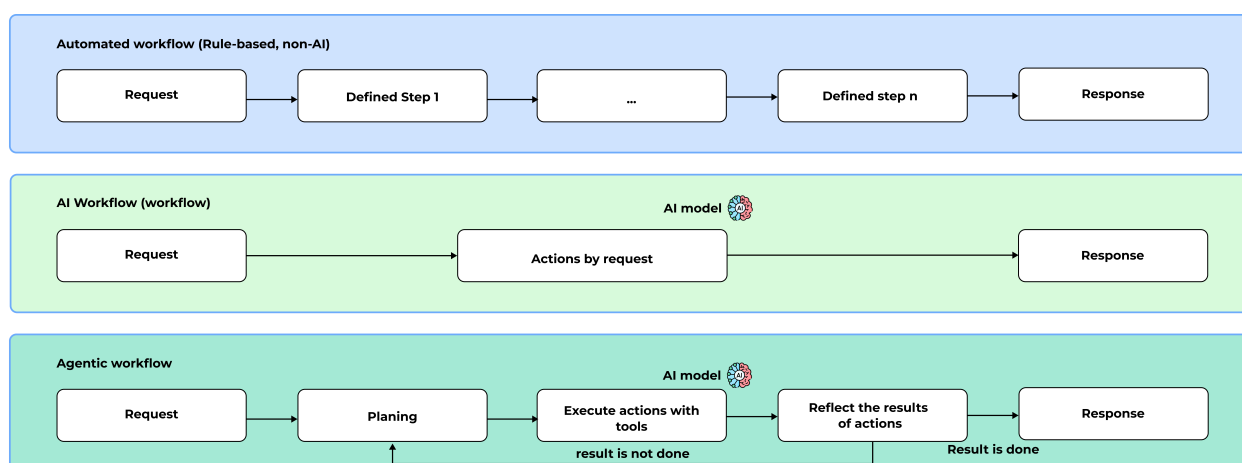


Figure 1: From automation to autonomy: automated, AI, and agentic workflows.

Conclusion. The transition from automation to autonomy is a practical shift in engineering logic. Agentic systems differ from automated and single-pass AI workflows by combining planning, tool use, and reflection in iterative loops. This structure improves reliability and problem-solving in dynamic tasks while keeping execution traceable. As a result, agentic engineering has strong potential across software and other industries, and the engineer's role shifts from writing fixed procedures to designing goals, constraints, tools, and evaluation loops for trustworthy autonomous behavior.

Funding: This work was supported by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan under Grant BR24993001.

Keywords: artificial intelligence, natural language processing, large language models, agentic AI.

2020 Mathematics Subject Classification: 68N01, 68T07, 68T50

References

- [1] A. E. Hassan, H. Li, D. Lin, B. Adams, T.-H. Chen, Y. Kashiwa, and D. Qiu, "Agentic software engineering: Foundational pillars and a research roadmap," 2025, arXiv:2509.06216. [Online]. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.06216>.
- [2] A. Mussa, Z. Tuimebayev, and M. Mansurova, "Make large language models efficient: A review," *IEEE Access*, vol. 13, pp. 154466–154490, 2025, doi: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3605110>.
- [3] K. C. Nagabhyru, "Beyond automation: The 2025 role of agentic AI in autonomous data engineering and adaptive enterprise systems.
- [4] N. Otoum and N. Elkhaili, "Methods and techniques of agentic software engineering: A systematic literature review," *IEEE Access*, vol. 14, pp. 7443–7465, 2026, doi: [10.1109/ACCESS.2026.3652325](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2026.3652325).
- [5] S. Sun and M. Staron, "Agentic pipelines in embedded software engineering: Emerging practices and challenges," 2026, arXiv:2601.10220. [Online]. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2601.10220>
- [6] H. Ye, X. He, V. Arak, H. Dong, and G. Song, "Meta context engineering via agentic skill evolution," 2026, arXiv:2601.21557. [Online]. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2601.21557>

SocioTable-KZ: A Semantic Framework for Legally-Compliant AI-Assisted Sociological Table Interpretation

A. OSPAN¹, M. MANSUROVA², Sh. JAMANBALAYEVA³, Zh. ZHANABAY⁴,
A. ZHAPPAR⁵

^{1,2,4,5}*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*Institute of Philosophy, Political Science and Religious Studies, Kazakhstan*

¹assel.ospan@kaznu.edu.kz, ²madina.mansurova@kaznu.edu.kz,

³sholpan.jamanbalayeva@kaznu.edu.kz, ⁴zhanabay.zhan@gmail.com,

⁵aktoty190909@gmail.com

The integration of artificial intelligence into sociological research introduces challenges related to semantic table interpretation, hallucination mitigation, and legal compliance. In sociological analytics, AI systems must process structured questionnaire data, generate accurate interpretations, and operate within national legal and ethical frameworks. Existing approaches to table reasoning mainly focus on structural or linguistic accuracy, while legal verification and domain-aware validation remain insufficiently addressed.

In this paper, we present SocioTable-KZ, an integrated framework for legally compliant AI-assisted interpretation of sociological tables. The proposed architecture combines semantic table modeling, law-oriented verification aligned with the legislation of the Republic of Kazakhstan, and analytical visualization. The framework is designed for structured reasoning over sociological questionnaire data with reduced hallucination risk and improved logical consistency.

The proposed system consists of three main modules. The first module performs semantic table interpretation by mapping user queries to database schemas using multilingual embeddings and cosine similarity. This step enables filtering of irrelevant columns and improves the reliability of SQL generation. The second module applies JoinGraph reasoning, where precomputed relational graphs validate secure JOIN operations using overlap metrics. This mechanism prevents arbitrary table combinations and supports semantically justified reasoning across multiple tables. The third module performs transformer-based table-to-text generation. For this purpose, T5-base and Flan-T5-Small models were fine-tuned on the ToTTo dataset to generate natural-language interpretations from structured tabular input.

Experimental evaluation demonstrated stable convergence and competitive generation quality. The T5-base model achieved a BLEU score of 37.49, ROUGE-1 of 0.709, ROUGE-2 of 0.485, and ROUGE-L of 0.613. The Flan-T5-Small model achieved a BLEU score of 37.83, ROUGE-1 of 0.590, ROUGE-2 of 0.571, and ROUGE-L of 0.589. The results indicate that T5-base provides stronger linguistic stability, whereas Flan-T5-Small offers competitive performance with lower computational cost.

Thus, SocioTable-KZ integrates semantic retrieval, structured reasoning, transformer-based generation, and legal compliance into a unified framework for sociological analytics. The proposed approach reduces hallucination risk, enhances factual consistency, and aligns AI-based interpretation with national legislation. Future work will focus on explainable multi-agent reasoning and deployment within Kazakhstan's national social research infrastructure.

Funding: This research was carried out within the framework of research on AI-assisted sociological analytics and legally compliant intelligent systems in the Republic of Kazakhstan.

Keywords: semantic table interpretation, sociological AI, legal compliance, table-to-text generation, hallucination mitigation, JoinGraph reasoning.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 68T50, 68T30

References

[1] Parikh A., et al. ToTTo: A Controlled Table-to-Text Generation Dataset, *Proceedings of EMNLP*, (2020).

- [2] Raffel C., et al. Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer, *Journal of Machine Learning Research*, **21** (2020), 1–67.
- [3] Chung H.W., et al. Scaling Instruction-Finetuned Language Models, *Journal of Machine Learning Research*, **25** (2024), 1–53.
- [4] Law of the Republic of Kazakhstan. *On Artificial Intelligence*, No. 230-VIII ZRK, Kazakhstan (2025).

Calculation model of voiced–voiceless sound consonants in the Kazakh language

U.A. TUKEYEV¹, Zh.E. SEGIZBAYEVA²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

segizbayeva.zhansaya@gmail.com

This work addresses the computational modeling of phonological regularities, focusing on the harmony of vowels and consonants in the Kazakh language. The phenomenon of synharmonism in the Kazakh language is manifested through the thick-thin and labial-vesicular harmony of vowels, as well as through the progressive-postponing influence of consonants (alternating between hard-soft, soft sounds). These regularities ensure the natural formation of word forms and directly affect the correct selection of suffixes during morphological transformation. Ignoring the rules of phonological harmony in natural language processing systems leads to a decrease in the quality of word form generation and automatic correction; therefore, formalizing these rules using computational models is an urgent scientific task.

The aim of this study is to formally describe the basic rules of vowel-consonant harmony in the Kazakh language and enhance the accuracy of phonological processing by incorporating these rules into computational models. For this purpose, rule-based models were developed that describe the thick-thin and labial-velar harmony of vowels, as well as the assimilation phenomena of consonants (e.g., k/g, k/g, p/b, t/d alternations). The proposed rules were combined with models based on neural networks and implemented as a hybrid computational architecture.

In the process of creating a computational model, the articulatory and acoustic characteristics of phonemes were also taken into account to formalize sound harmony. In particular, the thick-thin opposition of vowels is encoded using a binary notation system, and the labial-occlusal properties are described using vector representations. For consonants, such notations as hard-soft, soft are introduced, and their exchange patterns when morphemes meet are modeled using context-dependent rules. This approach allows us to represent phonological information not only at the symbolic level, but also through numerical descriptions and increases the generalizability of computational models.

The results of experimental evaluation showed that computational models that take into account sound harmony reduce the number of phonological and morphological errors and increase the quality indicators of automatic text processing and speech recognition systems. The proposed approach demonstrates the practical importance of formalizing phonological patterns in the development of intelligent systems adapted to the Kazakh language and can serve as a basis for use in industrial applications (ASR, text normalization, morphological generation).

Keywords: Kazakh language, sound harmony, computational linguistics, phonological model, artificial intelligence.

References

- [1] Tukeyev, U., Computational models of morphology and vowel harmony of the Kazakh language and their use for neural models. Materials of the International Scientific and Theoretical Conference “Artificial Intelligence in the Space of Contemporary Art: Problems and Prospects”, Baku, 2025, pp. 12–19.
- [2] Kessikbayeva, G., Cicekli, I. Rule-based morphological analyzer of Kazakh language. Proc. LREC Workshop on Turkic Languages, 2014.

Visual-language sentiment analysis integrating semantic-guided attention mechanism and multi-task learning

Daoyun TANG¹, G. AMIRKHANOVA²

al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹hfuttdy@163.com, ²gulshat.aa@gmail.com

This paper proposes a cross-modal hierarchical fusion method based on multi-task learning for multimodal sentiment analysis. Aiming at the problem that traditional fusion strategies are easy to introduce noise and reduce the quality of joint features, a four-module framework of single-modal feature learning, cross-modal interaction, multi-head attention and multi-task assisted learning is constructed to achieve multi-level feature fusion. The core innovations are: the introduction of a multi-task learning mechanism, which assists sentiment prediction with single-modal, bimodal and global tasks to alleviate cross-modal information conflicts; A hierarchical fusion strategy is designed to explore the modal interaction and bimodal importance of multi-head attention through tensor fusion networks. Experiments on CMU-MOSI, CMU-MOSEI, CH-SIMS datasets show that the model is better than the existing model in terms of accuracy, F1 value, MAE and other indicators, and is more robust in the misaligned data. The ablation experiment verifies the effectiveness of each module, and the text modality dominates the sentiment analysis, which provides a new solution for solving the problems of noise interference and modal difference in multimodal sentiment analysis.

Methods: This paper proposes a cross-modal sentiment analysis model (CMHFM) for video emotion polarity prediction, which includes four core modules: text, audio, and visual unimodal feature learning, as well as cross-modal interaction, multi-head attention, and multi-task assisted learning technology. Among them, the cross-modal interaction extracts depth features through BiGRU and DNN. The multi-head attention mechanism calculates the weights through query-key-value pairs and integrates different subspace features. Multitask-assisted learning improves model robustness and accuracy by introducing subtasks. Compared with traditional single-modal sentiment analysis, CMHFM can synchronously use three-modal information to more accurately capture hidden emotions in videos, and multi-head attention can mine key information, and multi-task learning can reduce noise interference and improve generalization capabilities.

Problem solved: This paper focuses on the problem of insufficient use of traditional single-modal sentiment analysis information and difficulty in accurately capturing video emotional changes. The proposed CMHFM model effectively improves the accuracy and robustness of multimodal sentiment analysis with the help of cross-modal interaction, multi-head attention and multi-task assisted learning.

Experiment: In this paper, several comparative experiments are conducted to verify the performance and effectiveness of the proposed model.

Experiment 1: On the English dataset (CMU-MOSI and CMU-MOSEI), it was compared with multiple traditional methods and the results under different indicators were reported. Experimental results show that the proposed method performs well under most indicators and has good generalization ability on both datasets.

Experiment 2: Run multiple times on the same dataset (CMU-MOSI) to evaluate the stability of the model and calculate the mean results and standard deviations. The results show that the method shows good stability and effect under all indicators.

Experiment 3: Compare with other methods on the Chinese dataset (CH-SIMS) and report the results under different indicators. Experimental results show that the proposed method achieves excellent performance under most indicators and has good generalization ability on different datasets.

Sensitivity analysis: Hyperparameters such as batch size and heads were analyzed and the results were reported at optimal settings. The results show that choosing the right batch size and number of attention heads can significantly improve model performance under certain conditions.

Conclusion: This paper proposes a cross-modal sentiment analysis method, which combines multi-task learning and cross-modal hierarchical fusion to solve the problems of modal differences and information conflicts, and shows high accuracy and good generalization ability on CH-SIMS, CMU-MOSI and CMU-MOSEI datasets. Its core innovation is to improve the performance of the model through tensor fusion network, multi-head attention mechanism and multi-task learning, and the proposed framework can effectively capture modal associations and avoid misjudgments. In addition, the paper reviews the relevant content of the field to provide reference for research in this field. The method still needs to be optimized for different scenarios and verified its practical application effect, and can be tested on more datasets and expanded to other sentiment analysis fields in the future.

Keywords: Sentiment analysis, multi-task learning, semantic-guided attention, multi-scale feature extraction.

References

- [1] Wen H.L., You S.D., Fu Y. Cross-modal context-gated convolution for multi-modal sentiment analysis, *Pattern Recognition Letters*, vol. 146, pp. 252–259, 2021.
- [2] Ke P., Ji H., Liu S., et al. SentiLARE: sentiment-aware language representation learning with linguistic knowledge, *arXiv preprint*, 2020.
- [3] Dobrevski M., Skočaj D. Dynamic adaptive dynamic window approach, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 40, pp. 3068–3081, 2024.
- [4] Liu Y., Ott M., Goyal N., et al. RoBERTa: A robustly optimized BERT pretraining approach, *arXiv preprint*, 2024. <https://arxiv.org/pdf/1907.11692.pdf>
- [5] Hu J., Liu Y., Zhao J., et al. DMMGCN: Multimodal fusion via deep graph convolution network for emotion recognition in conversation, *arXiv preprint*, 2024. <https://arxiv.org/pdf/2107.06779.pdf>
- [6] Zhang S., Li Y., Dong Q. Autonomous navigation of UAV in multi-obstacle environments based on a deep reinforcement learning approach, *Applied Soft Computing*, vol. 115, article 108194, 2022.
- [7] Cheong J.H., Jolly E., Xie T., et al. Py-feat: Python facial expression analysis toolbox, *Affective Science*, vol. 4, no. 4, pp. 781–796, 2023.

Generalist Robot Policies from Vision–Language–Action Models: Adaptation and Safety Constraints

N.M. TESHEBAYEV¹, M.E. MANSUROVA², A. MOSAVI³

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

³*John von Neumann Faculty of Informatics, Obuda University, Budapest, Hungary*

¹nurdauletteshebaev@gmail.com, ²mansurova.madina@gmail.com,

³amir.mosavi@uni-obuda.hu

Motivation. Vision–Language–Action (VLA) models aim to generate robot actions from visual observations and natural-language instructions, enabling a single policy to generalize across tasks, objects, and even embodiments. Recent work shows that incorporating large-scale vision–language pretraining can improve semantic generalization for robotic control (e.g., RT-2 [1]) and embodied grounding in multimodal language models (e.g., PaLM-E [2]). Open-source generalist policies and VLA models such as Octo [3] and OpenVLA [4] make these ideas reproducible, but practical deployment still faces gaps in (i) compositional instruction grounding, (ii) efficient adaptation to new embodiments/action spaces, and (iii) safety under distribution shift.

Problem statement. We consider trajectories $\tau = \{(o_t, x, a_t)\}_{t=1}^T$, where o_t are observations (RGB/RGB-D and proprioception), x is an instruction, and a_t is a continuous control action. The goal is to learn a generalist policy

$$\pi_{\theta}(a_t \mid o_{\leq t}, x), \quad (1)$$

that (i) supports compositional instruction grounding, (ii) adapts efficiently to new embodiments/action spaces, and (iii) respects safety constraints under distribution shift.

Proposed approach (thesis contribution). We outline a practical training and deployment recipe that unifies three components:

1. **Joint VLA representation learning + multi-task imitation.** A transformer policy is trained on a mixture objective combining behavior cloning on robot data with auxiliary vision–language alignment and temporal regularization, following the VLA training recipe and multimodal grounding ideas in [1,2,4]:

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathbb{E}_{\tau}[-\log \pi_{\theta}(a_t \mid o_{\leq t}, x)] + \lambda \mathcal{L}_{VL} + \beta \mathcal{L}_{aux}.$$

2. **Parameter-efficient adaptation (PEFT) to new robots.** To transfer a pretrained policy to a new embodiment, we use low-rank updates (e.g., LoRA-style adapters) and an action-token remapping layer, avoiding full retraining and reducing the amount of required on-robot data, as emphasized in generalist-policy fine-tuning settings [3,4].
3. **Safety via explicit constraints and uncertainty gating.** For constraints $g_i(\tau) \leq 0$ (collisions, joint limits, forbidden zones), we optimize a Lagrangian objective

$$\min_{\theta} \max_{\alpha \geq 0} \mathbb{E} \left[\mathcal{L}(\theta) + \sum_i \alpha_i g_i(\tau) \right], \quad (2)$$

and add a lightweight runtime gate that rejects or falls back to a safe primitive when predictive uncertainty exceeds a threshold.

Evaluation plan. We evaluate on generalizable manipulation task suites with object and geometry variation (e.g., ManiSkill2 [5]), reporting: (a) task success, (b) instruction grounding accuracy, (c) sample-efficiency for adaptation to a new embodiment, and (d) constraint violation rate. Baselines include single-task behavior cloning, imitation-only generalist policies, and diffusion-style imitation policies [6].

Conclusion. Generalist robot policies based on VLA models are a promising path toward scalable robot autonomy, but practical deployment requires principled compositionality, efficient adaptation, and explicit safety constraints. The proposed formulation provides an “explainable” mathematical backbone suitable for industrial settings where constraint violations dominate risk.

Keywords: vision-language-action models, generalist robot policy, imitation learning, parameter-efficient fine-tuning, constrained optimization, safety.

References

- [1] Brohan A., et al. RT-2: Vision-Language-Action Models Transfer Web Knowledge to Robotic Control, arXiv:2307.15818 (2023).
- [2] Driess D., et al. PaLM-E: An Embodied Multimodal Language Model, arXiv:2303.03378 (2023).
- [3] Octo Model Team, et al. Octo: An Open-Source Generalist Robot Policy, arXiv:2405.12213 (2024).
- [4] Kim M. J., et al. OpenVLA: An Open-Source Vision-Language-Action Model, arXiv:2406.09246 (2024).
- [5] Gu J., et al. ManiSkill2: A Unified Benchmark for Generalizable Manipulation Skills, arXiv:2302.04659 (2023).
- [6] Chi C., et al. Diffusion Policy: Visuomotor Policy Learning via Action Diffusion, arXiv:2303.04137 (2023).

Hybrid stochastic model for reliability assessment of network trunk lines based on neuro-symbolic AI

A. USSIPBAYEV

Astana IT University, Astana, Kazakhstan

Amirbek.Ussipbayev@astanait.edu.kz

A hybrid neuro-symbolic model is proposed for estimating the probability of timely transit through railway corridors. The model combines a graph neural network (GNN), predicting the parameters of the multivariate travel time distribution (means and correlations), with physical constraints of train motion (traction equation). A theorem on the underestimation of risk when delay correlations are ignored is proved.

Problem Statement

The railway network is represented by a directed graph $G = (V, E)$ (V – stations, E – track sections). The travel time on edge $e \in E$ is a random variable w_e , depending on external factors X (weather, workload, traction type). For each section, we assume a normal distribution:

$$w_e \sim N(\mu_e(X), \sigma_e^2(X)), \quad X \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

For correlated sections: $\mathbf{w} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\boldsymbol{\mu}$ – mean vector, Σ – covariance matrix.

The reliability of a route $\mathcal{P} \subseteq E$ is the probability that the total time $T = \sum_{e \in \mathcal{P}} w_e$ does not exceed a limit T_{limit} :

$$R(\mathcal{P}, T_{\text{limit}}) = P(T \leq T_{\text{limit}}). \quad (2)$$

The parameters μ and σ^2 are estimated from historical data [5].

Novelty of the Approach

Existing approaches include deterministic (traction calculations), simulation [1], agent-based [6] modeling, and purely data-driven neural networks. The proposed approach combines three elements:

1. Probabilistic description with parameters depending on X .
2. Graph neural network (GNN) predicting the vector $\boldsymbol{\mu}$ and matrix Σ (delay correlations) – a factor not accounted for in classical models [3].
3. Physical regularization – embedding the train motion equation into the loss function (Physics-Informed Neural Networks, PINN [2]), which ensures that predictions comply with the laws of mechanics and safety [7,8].

The loss function combines data error and physical residual:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \alpha \sum (T_{\text{pred}} - T_{\text{real}})^2 + \beta \left\| \frac{dv}{dt} - \frac{f_k(v) - w_k(v) - i}{1000(1 + \gamma)} \right\|^2, \quad (3)$$

where T_{pred} – predicted time, T_{real} – actual time, v – speed, f_k – traction force, w_k – resistance, i – gradient, γ – rotating masses coefficient [8].

Theoretical Result

Theorem 1 (On risk underestimation when ignoring correlations). *Let the travel times on sections be positively correlated ($\rho_{ij} > 0$). Then the independence model underestimates the probability of delay:*

$$P_{\text{indep}}(T > T_{\text{limit}}) < P_{\text{corr}}(T > T_{\text{limit}}).$$

The variance of the total time is

$$\text{Var}(T) = \sum_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(w_i, w_j),$$

and under positive correlations it increases, fattening the right tail of the distribution, which leads to risk underestimation.

Monte Carlo Verification Reliability is estimated by the Monte Carlo method [4] with $N = 10^5$ trials:

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I} \left(\sum_{e \in \mathcal{P}} w_e^{(k)} \leq T_{\text{limit}} \right), \quad (5)$$

where $\mathbb{I}(\cdot)$ is the indicator function, $w_e^{(k)}$ are generated from $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ predicted by the GNN. Accounting for Σ yields realistic delay propagation.

Conclusion The developed hybrid method, combining probabilistic description, graph neural networks, and physical constraints, improves the accuracy of arrival time prediction in various railway systems. The obtained results can be used to enhance reliability assessment methods and optimize transportation planning, contributing to the overall efficiency of railway transport.

Keywords: railway transport, reliability, correlated delays, graph neural networks, neuro-symbolic modeling, Physics-Informed Neural Networks.

References

- [1] Bekzhanova S.E., Orunbekov M.B., Süleimenova G.A. Simulation of a railway line with a coordinate interval control system // Vestnik KazATK. – 2023. – No.3(126). – P.146–156.
- [2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. – 2019. – Vol.378. – P.686–707.
- [4] Battaglia P.W., Hamrick J.B., Bapst V., et al. Relational inductive biases, deep learning, and graph networks // arXiv preprint arXiv:1806.01261. – 2018.
- [4] Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. – Wiley, 2011. – 772 p.
- [5] Sultanbek M., Adilova N., Śladkowski A., Karibayev A. Estimating the demand for railway freight transportation: a case study in Kazakhstan // Transport Problems. – 2023. – Vol.18, No.3. – P.77–88.
- [6] Kulshyanov A., Kaldybayeva B., Prokhorov O., Khussanov Z., Kenzhebekov D., Yevadilla M., Janabayev D. Agent-Based Simulation Modeling of Multimodal Transport Flows in Transportation System of Kazakhstan // Logistics. – 2025. – Vol.9, No.1. – P.172.
- [7] On approval of the Rules for the technical operation of railway transport: Order of the Minister of Investment and Development of the Republic of Kazakhstan dated April 30, 2015 No. 544. – Astana, 2015.
- [8] PTR. Rules of Traction Calculations for Train Operation. – Moscow: Transport, 1985. – 320 p.

Multi-Objective Optimization and Federated Learning for Agri-Food Supply Chains via Dynamic Heterogeneous Graph Neural Networks

C. YANG¹, B. ZHAO², D. ZHENG³, M. MANSUROVA⁴

^{1,2,3,4}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹yan.chenkhan@live.kaznu.kz, ²chzhao.baidun@live.kaznu.kz,

³chzhen.dinkun@live.kaznu.kz, ⁴madina.mansurova@kaznu.kz

The intricate and dynamic nature of agricultural supply chains imposes stringent demands on optimization methodologies, necessitating multi-objective considerations, privacy safeguards, and decision transparency to address pivotal challenges in ensuring food security and sustainable development. This study introduces a Dynamic Heterogeneous Multi-Objective Graph Neural Network (DHMO-GNN) model, meticulously tailored for optimizing agricultural supply chains. It integrates five core modules: data preprocessing and heterogeneous graph construction, dynamic graph neural

networks, multi-objective optimization, interpretability enhancement, and federated learning collaboration. The model adeptly captures temporal dynamics through sequential attention mechanisms and incremental updates, harmonizes cost, delivery time, and carbon emissions via multi-task learning and Pareto optimization, augments decision transparency with GNN Explainer and SHAP, and surmounts data silos by leveraging federated learning alongside differential privacy. Empirical evaluations on the Chengdu Hongguang Town Farmers' Market dataset demonstrate that the centralized DHMO-GNN variant achieves a hypervolume indicator (HV) of 0.849, surpassing baseline models; the federated variant exhibits only a 2.6% decline under privacy constraints, underscoring its robustness. Ablation studies further corroborate the synergistic contributions of each module. This research furnishes an efficacious and trustworthy framework for intelligent management of agricultural supply chains, holding profound implications for advancing digital transformation and green development.SS

Keywords: Agriculture, Graph Neural Networks, Supply Chain, Multi-Objective Optimization, Sustainability.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

- [1] Yang C., Zhao B., Mansurova M., Zhou T., Liu Q., Bao J., Zheng D. AgriLiteNet: Lightweight Multi-Scale Tomato Pest and Disease Detection for Agricultural Robots, *Horticulturae*, **11**:671 (2025).
- [2] Borucka A. Seasonal Methods of Demand Forecasting in the Supply Chain as Support for the Company's Sustainable Growth, *Sustainability*, **15**:7399 (2023).
- [3] Muhammad F., Namasivayam N., Demirovic A. Food Cold Chain Logistics and Management: A Review of Current Development and Emerging Trends, *J. Agric. Food Res.*, **18**:101343 (2024).
- [4] Yang C., Chen Z., Sonza R.L. Detection of Crop Diseases and Insect Pests Based on Convolutional Neural Network, *Proc. 12th Int. Conf. Inf. Educ. Technol. (ICIET)*, 397–401 (2024).
- [5] Xu Z., Adel E., Baldacci R., Laoucine K., Wu Z. Frontiers and Trends of Supply Chain Optimization in the Age of Industry 4.0: An Operations Research Perspective, *Ann. Oper. Res.*, <https://doi.org/10.1007/s10479-024-05879-9> (2024).
- [6] Zhang Y., Yang P. A Simulation-Based Optimization Model for Control of Soil Salinization in the Hetao Irrigation District, Northwest China, *Sustainability*, **15**:4467 (2023).
- [7] Li F., Ai W., Ju T. Cold Chain Logistics Distribution Path Planning of Fresh Products in Beijing Subcenter, *Sustainability*, **14**:10622 (2022).
- [8] Castillo-Girones S., Munera S., Martínez-Sober M., Blasco J., Cubero S., Gómez-Sanchis J. Artificial Neural Networks in Agriculture, the Core of Artificial Intelligence: What, When, and Why, *Comput. Electron. Agric.*, **230**:109938 (2025).
- [9] Assaad Z., Leborgne A., Ber F.L., Vacavant A. Deep Learning on Spatiotemporal Graphs: A Systematic Review, Methodological Landscape, and Research Opportunities, *Neurocomputing*, **594**:127861 (2024).
- [10] Min Y., Kim Y.R., Hyon Y., Ha T., Lee S., Hyun J., Lee M.R. RNN and GNN Based Prediction of Agricultural Prices with Multivariate Time Series and Its Short-Term Fluctuations Smoothing Effect, *Sci. Rep.*, **15**:97724 (2025).
- [11] Yan W., Zhang Z., Zhang Q., Zhang G., Hua Q., Li Q. Deep Data Analysis-Based Agricultural Products Management for Smart Public Healthcare, *Front. Public Health*, **10**:847252 (2022).
- [12] Oskar A., Månsson S., Lazar I., Nilsson M., Joakim E., Oxenstierna A., Alexandros S. Predicting Intra-Field Yield Variations for Winter Wheat Using Remote Sensing and Graph Attention Networks, *Comput. Electron. Agric.*, **237**:110499 (2025).

Research on optimizing convolutional neural network to improve railway mileage data prediction based on Whale/Beluga optimization algorithm

B. ZHAO¹, D. ZHENG², C. YANG³, B. BELGIBAEV⁴, M. MANSUROVA⁵

^{1,2,3,4,5}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹chzhao baidun@live.kaznu.kz, ²chzhen dinkun@live.kaznu.kz,

³yan chen khan@live.kaznu.kz, ⁴bbelgibaev@list.ru, ⁵madina.mansurova@kaznu.kz

Aiming at the problem of small sample time series prediction, this paper takes railway mileage data as an example to compare the prediction performance of three models: pure CNN, WOA-CNN and BWO-CNN. Based on a data set of 17 samples, the CNN hyperparameters are optimized by manual setting and metaheuristic algorithm respectively. The results show that the WOA and BWO algorithms improve the training set R^2 from 0.8268 to 0.9894 and 0.9790, and the model parameters are compressed from 473 to 410 and 349. However, the performance of the optimized model is seriously degraded on the test set, and the overfitting index increases from 3.46 to 8.22 and 9.82. The test error of pure CNN is only 2.47%, which is significantly better than the 4.60% and 4.90% of the optimized model. The study reveals the limitations of metaheuristic algorithms in extremely small sample scenarios, indicating that simple models may have better generalization ability when data is scarce, and provides an important reference for small sample deep learning applications.

Keywords: convolutional neural network; whale optimization algorithm; beluga whale optimization algorithm; hyperparameter optimization; time series prediction; overfitting.

References

- [1] Liu H., Wang J.W. “One Belt One Road” initiative under China’s railway development strategy research[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2023, 45(2): 1–8.
- [2] Zhang Y., Li X. Railway development under the Belt and Road Initiative: Progress and challenges[J]. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 2023, 168: 103–115.
- [3] Li M., Zhao Q. The role and countermeasures of railway transportation in national economic development[J]. *Comprehensive Transportation*, 2022, 44(8): 15–21.
- [4] Wang S., Chen H. Railway network planning and optimization: A comprehensive review[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, 24(3): 2456–2471.
- [5] Chen D., Zhang W. Analysis of influencing factors and model construction for railway mileage prediction[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2022, 22(5): 89–96.
- [6] Liu J., Zhou M. Nonlinear characteristics analysis of railway mileage data using complex network theory[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 167: 113024.
- [7] Wang L., Sun T. Research on railway passenger volume prediction based on ARIMA model[J]. *Application of Statistics and Management*, 2022, 41(4): 645–655.
- [8] Kumar A., Singh P. Railway traffic prediction using multiple regression analysis[J]. *Journal of Transportation Engineering*, 2023, 149(2): 04022134.
- [9] Deng J.L. *Grey System Theory Tutorial*, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan (2021).
- [10] Yang X., Liu Z. Limitations of traditional statistical methods in complex time series prediction[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 211: 118651.
- [11] LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning[J]. *Nature*, 2015, 521(7553): 436–444.
- [12] Zhang Y., Li M.H. A review of time series prediction methods based on CNN[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2023, 46(3): 523–545.
- [13] Borovykh A., Bohte S., Oosterlee C.W. Conditional time series forecasting with convolutional neural networks[J]. *arXiv preprint arXiv:1703.04691* (2017).

- [14] Bergstra J., Bengio Y. Random search for hyper-parameter optimization[J]. Journal of Machine Learning Research, 2012, 13(1): 281–305.
- [15] Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995: 1942–1948.
- [16] Yang Z.M., Wang X.D. Research on the application of swarm intelligence optimization algorithms in deep learning[J]. Journal of Software, 2022, 33(8): 2876–2894.
- [17] Mirjalili S., Lewis A. The whale optimization algorithm[J]. Advances in Engineering Software, 2016, 95: 51–67.
- [18] Zhong C., Li G., Meng Z. Beluga whale optimization: A novel nature-inspired metaheuristic algorithm[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 251: 109215.
- [19] Gharehchopogh F.S., Gholizadeh H. A comprehensive survey: Whale Optimization Algorithm and its applications[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2019, 48: 1–24.
- [20] Wang H.T., Liu J.H. Improvement and application research of beluga whale optimization algorithm[J]. Control and Decision, 2023, 38(6): 1567–1575.
- [21] Elsken T., Metzen J.H., Hutter F. Neural architecture search: A survey[J]. Journal of Machine Learning Research, 2019, 20(1): 1997–2017.
- [22] Zhao C., Qian F. Metaheuristic algorithms for optimizing deep neural networks: Status and prospects[J]. Acta Automatica Sinica, 2023, 49(4): 745–763.
- [23] Holland J.H. *Adaptation in natural and artificial systems*, MIT Press (1992).
- [24] National Railway Administration. China Railway Development Plan (2021-2035)[R]. Beijing: National Railway Administration (2021).
- [25] Chen Y., Wang J. Infrastructure prediction methods: A comparative study[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2023, 146: 103958.

Predicting Cancer Stage from DNA Methylation Profiles Using Machine Learning

Z.E. ZHETPISBAY¹, A. YERKOS²

^{1,2}*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

¹zhibekzhetpisbay@gmail.com, ²yerkosova@gmail.com

Global DNA hypomethylation, contributing to genomic instability, together with focal hypermethylation of CpG islands in gene promoters, represents a hallmark of cancer. Promoter hypermethylation often results in silencing of tumor suppressor genes and disruption of apoptosis, DNA repair, and metabolic pathways [1]. These epigenetic alterations may partially arise through age-associated programmed changes and facilitate cellular transformation [2]. In addition, gene body methylation plays a regulatory role in transcriptional activity and tumor progression.

Cancer stage is closely associated with distinct methylation patterns, and stage-specific epigenetic alterations have been proposed as diagnostic and prognostic biomarkers. Although methylation-based models have shown promising accuracy in cancer detection and staging, their clinical translation remains limited by data heterogeneity and methodological variability.

In this study, we developed machine learning models for stage prediction in liver and uterine cancers using genome-wide DNA methylation data obtained from the Genomic Data Commons (GDC) portal [3]. The analytical pipeline included data preprocessing, feature selection, dimensionality reduction, and predictive modeling. Preprocessing involved systematic cleaning, removal of low-quality CpG sites, imputation of missing values, and class balancing using the ProWRAS algorithm to address stage imbalance.

Statistically significant CpG loci were first identified using Spearman rank correlation with the ordinal stage variable ($p < 0.05$), allowing detection of monotonic relationships without assuming normality. This initial filtering substantially reduced dimensionality while preserving biologically relevant signals. Ensemble models (LightGBM, XGBoost, and Random Forest) were subsequently

trained to capture nonlinear interactions among CpG sites. Feature importance scores were aggregated and ranked to evaluate the contribution of each locus to stage discrimination. The Knee-Locator algorithm was applied to detect the inflection point in the importance curve, enabling data-driven determination of the optimal feature subset and preventing inclusion of marginally informative variables. Model development and evaluation were conducted using StratifiedKFold cross-validation to ensure proportional representation of cancer stages in each fold and to provide stable, unbiased performance estimates.

The final models demonstrated robust performance. For liver cancer, accuracy, F1-score, and G-mean reached 0.73, indicating balanced stage classification. For uterine cancer, the best-performing model achieved 0.916 across all three metrics, reflecting high discriminative ability and stability. Importantly, the final predictive signatures for both cancers consisted of fewer than 100 CpG loci, substantially reducing dimensionality while maintaining strong performance. These findings highlight the potential of compact DNA methylation signatures for accurate cancer stage prediction and personalized clinical decision support.

Keywords: machine learning, bioinformatics, data analysis, DNA Methylation, cancer prediction.

References

- [1] Bhootra, S., Jill, N., Shanmugam, G. et al. *DNA methylation and cancer: transcriptional regulation, prognostic, and therapeutic perspective.*, *Med Oncol*, **40**:2 (2023), 71.
- [2] Geissler F., Nesic K., Kondrashova O., et al The role of aberrant DNA methylation in cancer initiation and clinical impacts, *Therapeutic Advances in Medical Oncology*, **16**:2 (2024), 3–45.
- [3] GDC Data Portal Homepage. [Internet], Available from: <https://portal.gdc.cancer.gov/>.

Patient-Independent Spectro-Temporal Estimation of Respiratory Rate and Blood Pressure from PPG Signals

Sh.P. ZHUMAGULOVA

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Continuous monitoring of respiratory rate (RR) and blood pressure (BP) using wearable sensors remains a significant challenge due to inter-patient variability in photoplethysmogram (PPG) morphology. To address this limitation, a patient-independent spectro-temporal framework is proposed for simultaneous estimation of RR and BP using single-channel PPG signals.

After bandpass filtering and artifact suppression, valid cardiac cycles are identified. Respiratory rate is derived from respiration-induced modulations of peak-to-peak intervals. If T_r denotes the average duration of one respiratory cycle within a window, RR is computed as $RR = \frac{60}{T_r}$ (breaths/min). To ensure robustness, spectral dominance within the physiological respiration band (0.1–1 Hz) is evaluated using normalized spectral power:

$$P_{norm} = \frac{\sum_{f_r-\Delta}^{f_r+\Delta} |H(f)|^2}{\sum_{f=0.1}^1 |H(f)|^2},$$

where $H(f)$ represents the Fourier transform of the PPG-derived modulation and f_r is the dominant respiration frequency.

For blood pressure estimation, morphology-independent temporal, spectral, and statistical features are extracted. Spectral entropy is calculated as

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \log(p_i),$$

where

$$p_i = \frac{|H(f_i)|^2}{\sum_{j=1}^N |H(f_j)|^2}$$

represents normalized spectral energy. Spectral entropy reflects redistribution of vascular energy patterns associated with arterial compliance changes.

Feature relevance is evaluated using mutual information:

$$MI(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)},$$

where X denotes extracted features and Y corresponds to systolic or diastolic BP values.

Blood pressure is estimated using nonlinear regression: $\hat{Y} = f(WX + b)$, where X is the selected feature vector, W and b are learned parameters, and $f(\cdot)$ represents a nonlinear activation function of a compact neural network model.

By relying on spectro-temporal energy redistribution and entropy-based descriptors instead of unstable morphological landmarks, the proposed approach improves generalization across heterogeneous patient populations and enables continuous cuff-less monitoring using a single wearable PPG sensor.

Keywords: respiratory rate, blood pressure, photoplethysmography, spectro-temporal analysis, mutual information, spectral entropy.

2020 Mathematics Subject Classification: 92C55, 94A12, 62P10

References

- [1] Charlton P.H., Bonnici T., Tarassenko L., Clifton D.A., Beale R., Watkinson P.J. Breathing rate estimation from the electrocardiogram and photoplethysmogram: A review, *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 11, pp. 2–20, 2018.
- [2] Hasanzadeh N., Homaeinezhad M.R., Yazdani S.R. Blood pressure estimation using photoplethysmogram signal and its morphological features, *IEEE Sensors Journal*, vol. 20, no. 8, pp. 4300–4310, 2020.
- [3] Wang W., Mohseni P., Kilgore K., Najafizadeh L. Cuff-less blood pressure estimation from photoplethysmography via visibility graph and transfer learning, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol. 26, no. 5, pp. 2075–2085, 2022.
- [4] Yang S., Sohn J., Lee S., Lee J., Kim H.C. Estimation and validation of arterial blood pressure using photoplethysmogram morphology features in large databases, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol. 25, no. 4, pp. 1018–1030, 2021.
- [5] Kachuee M., Kiani M.M., Mohammadzade H., Shabany M. Cuff-less high-accuracy calibration-free blood pressure estimation using pulse transit time, in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, pp. 1006–1009, 2015.
- [6] Choi A., Shin H. Photoplethysmography sampling frequency: How low can we go to analyze pulse rate variability with reliability? *Physiological Measurement*, vol. 38, no. 3, 2017.
- [7] Peng H., Long F., Ding C. Feature selection based on mutual information: Criteria of max-dependency, max-relevance, and min-redundancy, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 27, no. 8, pp. 1226–1238, 2005.

ҚОРЛАРДЫ БАСҚАРУДЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Ш.Т. ТЛЕТАЙ¹, Г.А. АМИРХАНОВА²

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

¹Sholpantletay@gmail.com, ²Gulshat.Amirkhanova@kaznu.edu.kz

Кіріспе Нан-тоқаш өндірісінде қорларды басқару мәселесін формализациялау үшін сұранысты болжау, дайын өнім қорының теңгерімі, ингредиенттерге қажеттілікті есептеу, сақтандыру қоры және жалпы шығындарды минимизациялауды сипаттайтын өзара байланысты

қатынастар жүйесін қолдану ұсынылады. Дайын өнімге деген сұраныс трендік және маусымдық құрамдастарды ескере отырып модельденеді. Дайын өнім қорының динамикасы өндіріс көлемін, сатуды және өнімді есептен шығаруды ескеретін баланс теңдеуімен анықталады. Ингредиенттерге қажеттілік рецептуралық коэффициенттер мен өнім көлеміне байланысты есептеледі. Қызмет көрсету деңгейін қамтамасыз ету үшін сұраныс пен жеткізу мерзімінің белгісіздігін ескеретін сақтандыру қоры енгізіледі. Қорларды басқарудың соңғы мақсаты – сақтау, өндіру, сатып алу, тапшылық және өнімнің бұзылуына байланысты жиынтық шығындарды минимизациялау.

Тренд пен маусымдылықты ескеретін сұраныс болжамы Нан зауытындағы қорларды басқару келесі ерекшеліктермен сипатталады:

$$\hat{D}_t = \mu + \beta t + \sum_{r=1}^R \gamma_r S_{r,t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

мұнда $\hat{D}_t$ – t кезеңіндегі сұраныс болжамы; μ – базалық сұраныс деңгейі; βt – трендік құрамдас; $S_{r,t}$ – маусымдық факторлар (апта күні, мерекелік әсер, маусым); γ_r – маусымдық коэффициенттер; ε_t – кездейсоқ қателік. Бұл модель сұраныстың жалпы деңгейін ғана емес, сонымен қатар өндіріс үшін тән маусымдық ауытқуларды да ескеруге мүмкіндік береді.

Дайын өнім қорының теңгерімі (есептен шығарумен) Қор динамикасы келесі теңдеумен сипатталады:

$$I_{t+1} = I_t + P_t - D_t - W_t + R_t \quad (2)$$

мұнда I_t – t уақытындағы қор; P_t – өндіріс көлемі; D_t – нақты сұраныс; W_t – жарамдылық мерзімі өткен өнімнің шығыны; R_t – қайтарымдар немесе түзетулер. Бұл теңдеу қор тек өндіріс пен сұранысқа ғана емес, сондай-ақ жоғалтуларға да тәуелді екенін көрсетеді.

Ингредиенттерге қажеттілік моделі Өндірілетін барлық өнім түрлері үшін k ингредиентіне қажеттілік келесі түрде есептеледі:

$$G_{k,t} = \sum_{m=1}^M a_{k,m} P_{m,t} \quad (3)$$

мұнда $G_{k,t}$ – t кезеңіндегі k ингредиентіне жалпы қажеттілік; $a_{k,m}$ – k ингредиентінің m өнім бірлігіне жұмсалып нормасы; $P_{m,t}$ – m өнімінің өндіріс көлемі; M – өнім түрлерінің саны. Бұл формула өндірістік жоспардан ұн, ашытқы, тұз, қант және басқа компоненттердің қажетті көлемін есептеуге мүмкіндік береді.

Болжам қателігін ескеретін ингредиенттердің сақтандыру қоры Тапшылық тәуекелін азайту үшін келесі сақтандыру қоры формуласы қолданылады:

$$SS_k = z_\alpha \sqrt{L_k \sigma_{D_k}^2 + \bar{D}_k^2 \sigma_{L_k}^2} \quad (4)$$

мұнда SS_k – k ингредиентінің сақтандыру қоры; z_α – қажетті қызмет көрсету деңгейінің коэффициенті; L_k – k ингредиентінің орташа жеткізу мерзімі; σ_{D_k} – ингредиентке сұраныстың стандартты ауытқуы; $\bar{D}_k$ – ингредиентке орташа сұраныс; σ_{L_k} – жеткізу мерзімінің стандартты ауытқуы. Бұл формула сұраныстың белгісіздігін және жеткізу тұрақсыздығын бір уақытта ескеруге мүмкіндік береді.

Қорларды басқарудың интегралдық мақсаттық функциясы Жүйенің жиынтық шығындары келесі функция арқылы минимизацияланады:

$$\min Z = \sum_{t=1}^T (c_h I_t + c_p P_t + c_o O_t + c_s B_t + c_w W_t) \quad (5)$$

мұнда Z – жоспарлау кезеңі T үшін жалпы шығындар; c_h – сақтау шығындарының үлестік мәні; c_p – өндірістік шығындар; c_o – ингредиенттерді тапсырыс беру шығындары; O_t – жеткізу немесе тапсырыс көлемі; c_s – тапшылық үшін айыппұл; B_t – қанағаттандырылмаған сұраныс көлемі; c_w – өнімді есептен шығару шығындары; W_t – мерзімі өткен өнім көлемі. Бұл функция қорларды басқарудың негізгі экономикалық құрамдастарын біріктіреді: сақтау, өндіру, сатып алу, тапшылық және өнімнің бұзылуы.

Қаржыландыру: Мақала Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің қолдауымен, BR24992975 “Жасанды интеллект және ИТ технологияларын қолдана отырып, тамақ өңдеу кәсіпорнының цифрлық егізін жасау” бағдарламалық-мақсатты қаржыландыру жобасы шеңберінде жарияланды, 2024–2026 жж.

Кілт сөздер: қорларды басқару, математикалық модель, сұранысты болжау, сақтандыру қоры, шығындарды минимизациялау.

2020 Mathematics Subject Classification: 90B05, 91B42, 62M10

ӘДЕБИЕТ

- [1] Menezes A.D., Barros J.G.M., Fonseca B.B., Aguilera M.V.C., Sampaio N.A.S. Demand forecasting and inventory management..., 2023.
- [2] Noble J., John K., Paul B. Inventory management of perishable products..., 2023.
- [3] Duarte B.P.M., Gonçalves A.M.M., Santos L.O. Optimal Production and Inventory Policy..., 2021.
- [4] Hübner N., Caspers J., Coroamă V.C., Finkbeiner M. Machine-learning-based demand forecasting..., 2024.
- [5] Lipnik Š., Čepar Ž. Reducing Food Waste and Boosting Profits..., 2025.
- [6] Wu Y., Zhang J., Li Q., Tan H. Digital Twins..., 2023.
- [7] Maheshwari P., Kamble S., Belhadi A., Venkatesh M., Abedin M.Z. Digital twin-driven planning..., 2023.

Modeling of Snow Depth–Snow Water Equivalent Relationship under Climatic Variability

A.Zh. RAKHIMZHANOVA¹, A.B. NUGUMANOVA²

^{1,2}*Astana IT University, Astana, Kazakhstan*

¹a.rakhymzhanova@astanait.edu.kz, ²a.nugumanova@astanait.edu.kz

Seasonal snowpack plays a fundamental role in hydrological processes in continental regions, acting as a natural reservoir that stores winter precipitation and releases it during spring melt. In East Kazakhstan, characterized by strong temperature gradients and rapid seasonal transitions, snowmelt-driven runoff is a dominant component of river discharge and a key driver of flood risk. However, accurate estimation of snow water equivalent (SWE) remains challenging due to sparse observations, and snow depth (SD) is often used as a proxy through empirical density relationships. This approach implicitly assumes a stable SD–SWE functional relationship, although its physical robustness under climatic variability remains insufficiently justified. This motivates the central question of this study: how stable is the SD–SWE relationship under realistic climatic perturbations?

To address this problem, we employ a physically based modeling framework using the model of SNTHERM, which simulates multilayer snowpack evolution through coupled heat and mass transfer processes. The model is driven by ERA5-Land reanalysis data, providing consistent meteorological forcing for continental conditions. In addition to process-based simulation, a hybrid analysis is performed using time-series methods to extract key indicators of the snow cycle, including peak SWE, melt onset, and snow disappearance timing.

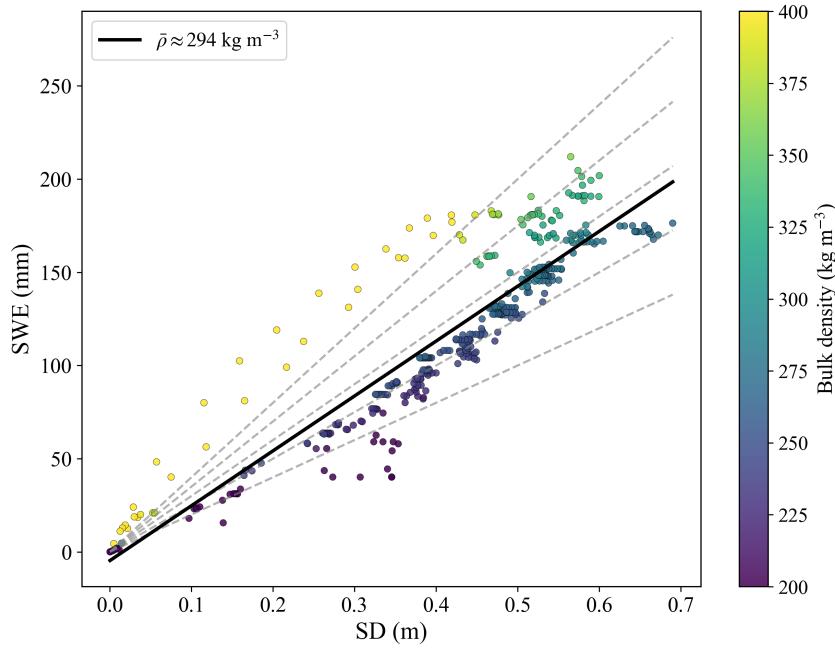


Figure 1: Relationship between snow depth (SD) and snow water equivalent (SWE). Colors represent bulk snow density, and the solid line indicates the mean linear relationship ($\bar{\rho} \approx 294 \text{ kg m}^{-3}$). Dashed lines illustrate variability associated with density changes.

To isolate governing mechanisms, a perturbation-based experimental design is implemented. Air temperature is modified within $\pm 1\text{--}2^\circ\text{C}$ to represent thermodynamic forcing, while precipitation is scaled by $\pm 5\text{--}10\%$ to represent accumulation variability. These perturbations remain within realistic regional ranges and allow separation of energy-driven and mass-driven effects on snowpack evolution.

The SD–SWE relationship can be expressed in simplified form as

$$\text{SWE} = \rho_b \cdot \text{SD}, \quad (1)$$

where ρ_b is the bulk snow density evolving dynamically under compaction, metamorphism, and melt–freeze processes. Model outputs include snow depth, SWE, and density evolution, which are analyzed using regression techniques to evaluate the stability of scaling relationships under different forcing scenarios.

The results show that temperature perturbations primarily influence melt timing and seasonal persistence without significantly altering the structural SD–SWE coupling. In contrast, precipitation perturbations directly affect snowpack mass and overburden pressure, leading to enhanced compaction and systematic variation in snow density. This results in measurable changes in SD–SWE scaling coefficients.

Despite the presence of nonlinear physical processes, the SD–SWE relationship remains approximately linear within the tested perturbation domain. This indicates that SD–SWE coupling can be interpreted as a physically consistent mapping emerging from underlying processes rather than a purely empirical approximation. At the same time, the sensitivity of scaling coefficients to accumulation variability highlights the limitations of static density assumptions.

In summary, this study demonstrates that physically based modeling provides a robust framework for evaluating the stability of SD–SWE relationships under climatic variability. The integration of process-based simulations with data-driven analysis improves interpretability of snowpack dynamics and supports more reliable SWE estimation in data-scarce continental regions.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant number BR24992899).

Keywords: snowpack modeling, SNTHERM, snow water equivalent, snow depth, climate sensitivity, hydrology.

2020 Mathematics Subject Classification: 86A08, 76M28

References

- [1] Jordan R. A one-dimensional temperature model for a snow cover (SNTHERM), CRREL Report (1991).
- [2] Hersbach H., Bell B., Berrisford P., et al. The ERA5 global reanalysis, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **146** (2020), 1999–2049.
- [3] Bartelt P., Lehning M. A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning, *Cold Regions Science and Technology*, **35** (2002), 123–145.
- [4] Sturm M., Taras B., Liston G., et al. Estimating snow water equivalent using snow depth data and climate classes, *Journal of Hydrometeorology*, **11** (2010), 1380–1394.
- [5] Essery R., Morin S., Lejeune Y., Ménard C. A comparison of snow models using observations from an alpine site, *Advances in Water Resources*, **55** (2013), 131–148.
- [6] Liston G., Elder K. A distributed snow-evolution modeling system (SnowModel), *Journal of Hydrometeorology*, **7** (2006), 1259–1276.
- [7] Vionnet V., Brun E., Morin S., et al. The detailed snowpack scheme Crocus and its implementation, *Geoscientific Model Development*, **5** (2012), 773–791.

Multi-Task LSTM for streamflow prediction via shared representation learning

B.G. MUKANOVA¹, A.B. NUGUMANOVA², A.M. ALZHANOV³

^{1,2,3}*Astana IT University, Astana, Kazakhstan*

¹balgaisha.mukanova@astanait.edu.kz, ²a.nugumanova@astanait.edu.kz,
³almas.alzhanov01@gmail.com

Accurate streamflow forecasting is important for flood preparedness, water resources management, and hydrological decision-making. However, this task remains challenging given the non-linear nature of runoff generation processes, including complex snowmelt-driven regimes. Although LSTM-based models have shown strong performance in rainfall–runoff forecasting [1], conventional single-task learning may not sufficiently encourage the model to capture snow-related hydrological dynamics, as their internal representations are usually optimized only for the main target variable. As a result, physically relevant intermediate states, such as snow water equivalent, may be learned only implicitly and not always robustly. This motivates the central question of this study: can streamflow forecasting benefit from auxiliary supervision on SWE?

To address this question, we develop a multi-task LSTM model for simultaneous prediction of streamflow and SWE, inspired by recent research in multi-variable hydrological modeling [2][3]. The architecture consists of a shared LSTM encoder that extracts temporal representations from meteorological and basin data, followed by task-specific branches for the two outputs. The primary target is streamflow, while the auxiliary target is SWE. Training is performed using a fixed-weight objective function of the form:

$$L = L_q + \alpha L_{\text{swe}} \quad (1)$$

where L is the total loss, L_q is the streamflow loss, L_{swe} is the auxiliary loss, and α is a weighting coefficient that controls the contribution of the auxiliary task. In the multi-task setting, gradient interference between the two objectives is reduced using PCGrad. This design allows us to examine not only whether SWE supervision is useful, but also how sensitive the result is to the choice of auxiliary weight.

The experimental setup focuses on 5 representative snow-dominated basins from the Caravan dataset [4]. Each sample is formed from a 30-day input window and a 7-day forecast horizon. The

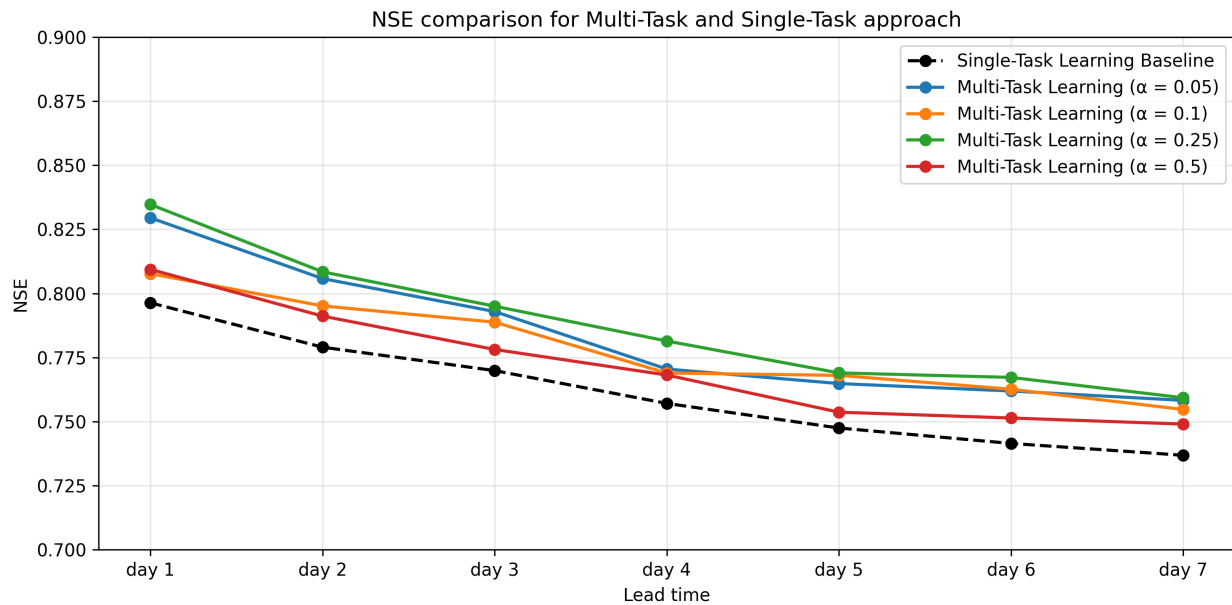


Figure 1: NSE performance across forecast lead times (1–7 days) for single-task and multi-task LSTM models with varying auxiliary loss weights.

dynamic predictors include snow water equivalent, mean and maximum air temperature, volumetric soil water content in the upper soil layer, total precipitation, and potential evaporation. In addition, static basin descriptors are included, such as basin area, geographic coordinates, aridity-related characteristics, precipitation statistics, and the fraction of snow contribution. The baseline model corresponds to the single-task case with $\alpha = 0$. Multitask variants are evaluated for $\alpha \in \{0.05, 0.1, 0.25, 0.5\}$. Model performance is assessed for each forecast lead using NSE, KGE, and FHV.

Figure 1 demonstrates the comparison of single-task and multi-task learning with SWE supervision in this experimental setting. All tested auxiliary-weight configurations improve NSE and KGE relative to the single-task baseline, indicating that the auxiliary task provides useful hydrologically relevant information. Specifically, Multi-Task Learning improved the Nash-Sutcliffe Efficiency by up to 3,8% and the Kling-Gupta Efficiency by up to 6,9% compared to the Single-Task Learning baseline.

In summary, this study demonstrates that incorporating SWE as an auxiliary task can improve 7-day streamflow forecasting in selected snow-dominated basins. These findings suggest that the Multi-Task Learning approach can encourage LSTM models to learn hydrologically meaningful representations, leading to improved streamflow predictions.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant number BR24992899).

Keywords: multi-task learning, LSTM, deep learning, streamflow forecasting, Caravan dataset, shared representation learning.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T07, 68T05

References

- [1] Kratzert F., Klotz D., Brenner C., Schulz K., Herrnegger M. Rainfall–runoff modelling using long short-term memory (LSTM) networks, *Hydrology and Earth System Sciences*, **22**:11 (2018), 6005–6022.
- [2] Demiray B.Z., Demir I. Multi-task learning as a step toward building general-purpose hydrological forecasting systems, *EarthArXiv* (2025).
- [3] Wang Z., Li C., Wei R., Zhang B., Cui P. A novel hydrological signature-informed framework for enhancing streamflow prediction using multi-task learning, *Water Resources Research*, **62**:1

(2026), e2025WR041485.

[4] Kratzert F., Nearing G., Addor N., Erickson T., Gauch M., Gilon O. et al. Caravan—A global community dataset for large-sample hydrology, *Scientific Data*, **10**:1 (2023), 61.

On the oscillatory properties of solutions of second-order quasilinear difference equations

R.E. RADIKOVA¹, D.S. KARATAYEVA², A.Zh. ADIYEVA³

^{1,2}*L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

³*Kh. Dosmukhamedov Atyrau University, Atyrau, Kazakhstan*

¹rabigaradikova@gmail.com, ²danaserkhil@gmail.com, ³adiyeva.a@mail.ru

The oscillation of solutions to difference equations is an important part of the theory of discrete dynamic systems and applications such as difference schemes, numerical methods, biological and economic models. Recently, nonlinear and quasilinear difference equations have attracted considerable interest, especially those that include discrete analogues of the p -Laplacian.

Here, we analyze the equation $\Delta(p_k|\Delta y_k|^{p-2}\Delta y_k) + \nu_k|y_{k+1}|^{q-2}y_{k+1} = 0$, $k \geq k_0$, and construct a criterion for the oscillation of solutions based on the divergence of the corresponding series of coefficients. Let $\{y_k\}$ be the solution to the difference equation above. The difference step is defined by the equality $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

Definition 1. The solution $\{y_k\}$ is called *oscillatory* if for any natural number N there exist $k_1, k_2 \geq N$ such that $y_{k_1}y_{k_2} < 0$.

In other words, a solution is called *non-oscillatory* if, starting from some number N , it retains the same sign. The following is a sufficient condition for oscillation.

Theorem 2. Let $\{p_k\}$ and $\{\nu_k\}$ be positive sequences. If $\sum_{k=k_0}^{\infty} \nu_k = \infty$, then any solution of the difference equation $\Delta(p_k|\Delta y_k|^{p-2}\Delta y_k) + \nu_k|y_{k+1}|^{q-2}y_{k+1} = 0$ is oscillatory.

Consider a special case of the difference equation

$$\Delta(|\Delta y_k|^{p-2}\Delta y_k) + \frac{1}{k^\alpha}|y_{k+1}|^{q-2}y_{k+1} = 0,$$

where $\alpha > 1$. Then the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty,$$

and, therefore, the condition of the theorem is not satisfied.

Consider the sequence

$$y_k = \frac{1}{k^\beta}, \quad \beta > 0.$$

Then, as $k \rightarrow \infty$, we have $\Delta y_k \sim -\beta k^{-\beta-1}$, and $\Delta(|\Delta y_k|^{p-2}\Delta y_k) \sim C k^{-(\beta+1)(p-1)-1}$, at the same time, $\frac{1}{k^\alpha}|y_{k+1}|^{q-2}y_{k+1} \sim k^{-\alpha-\beta(q-1)}$.

Choosing $\beta > 0$ such that $(\beta+1)(p-1)+1 > \alpha+\beta(q-1)$, we obtain that $\{y_k\}$ is a positive non-oscillatory solution. Thus, the divergences of the series $\sum \nu_k$ play a key role in ensuring the oscillatory nature of the solutions, whereas the convergence of this series allows for the existence of non-oscillatory solutions.

References

[1] Kalybay A., Karatayeva D., Oinarov R., Temirkhanova A. Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, (2017), No. 43, 1–16.

Теориялық және қолданбалы механиканың іргелі мәселелері

Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики

Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: А.К. Тулешов

Бағдарламалық комитеттің тең төрағасы: Б.Б. Телтаев

Ұйымдастыру комитетінің төрағасы: З.Г. Уалиев

Конференция хатшысы: Исова Айнур

ОЗОН ГЕНЕРАЦИЯЛАУ ЖҮЙЕСІНІҢ ТИІМДІЛІГІН БАҒАЛАУ ҮШІН СЕНСОРЛЫҚ ЖЕЛІ ДЕРЕКТЕРІН БЕРУДІ ЗЕРТТЕУ

А.А. АБДЫКАДЫРОВ¹, Н.К. СМАЙЛОВ², Ж.М. ДОСБАЕВ³, С. МАРКСҰЛЫ⁴

^{1,2,3,4}Ө. А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты,

Алматы, Қазақстан

sungat50@gmail.com

Қазіргі кезеңде озон генерациялау технологиялары су мен ауаны тазарту, медицина, ауыл шаруашылығы, тамақ өнеркәсібі және экологиялық қауіпсіздік салаларында кеңінен қолданылуда. Озон — жоғары тотықтырғыш қасиеті бар газ болғандықтан, ол бактериялар мен вирустарды залалсыздандыруда, суды тазартуда және өндірістік процестерде тиімді қолданылады. Дегенмен, озон генерациялау процесінің тиімділігі көптеген факторларға тәуелді, әсіресе технологиялық параметрлердің тұрақтылығы мен бақылау дәлдігіне байланысты болады. Мұндай параметрлерге ең алдымен қысым, температура және озон концентрациясы жатады. Осы параметрлердің өзгеруі озон түзілу қарқындылығына, энергия шығынына, жабдықтың қызмет ету мерзіміне және жалпы технологиялық процестің қауіпсіздігіне тікелей әсер етеді.

Озон генераторларының жұмысын тиімді басқару үшін нақты уақыт режимінде сенімді өлшеу деректерін алу аса маңызды. Дәстүрлі бақылау әдістері көбінесе периодтық өлшеулерге немесе шектеулі датчиктерге негізделеді, бұл жүйенің динамикалық күйін толық бағалауға мүмкіндік бермейді. Осыған байланысты соңғы жылдары өнеркәсіптік автоматтандыруда сенсорлық желілерді қолдану белсенді дамып келеді. Сенсорлық желілер әртүрлі параметрлерді үздіксіз бақылауға, алынған деректерді өңдеуге және басқару жүйесіне жедел жеткізуге мүмкіндік береді. Бұл технологиялар өндірістік процестердің тиімділігін арттыруға, энергия шығынын азайтуға және қауіпсіздік деңгейін көтеруге жағдай жасайды.

Зерттеу мақсаты — озон генерациялау жүйесінің тиімділігін нақты уақыттағы өлшеу деректері негізінде бақылау және басқару үшін қысым, температура және озон концентрациясы параметрлерін тіркейтін сенсорлық технологияларды қолданудың ғылыми-әдістемелік негізін әзірлеу, сондай-ақ сенсорлық желі арқылы деректерді беру сапасының басқару тиімділігіне әсерін кешенді бағалау.

Осы мақсатқа жету үшін озон генерациялау жүйесіне орнатылатын сенсорлық құрылғылардың түрлері, олардың өлшеу дәлдігі, сезімталдығы және жұмыс сенімділігі зерттеледі. Қысымды өлшеу үшін газ ортасына бейімделген қысым датчиктері, температураны бақылау үшін термопаралар немесе цифрлық температура сенсорлары, ал озон концентрациясын анықтау үшін электрохимиялық немесе оптикалық сенсорлар қолданылуы мүмкін. Бұл сенсорлардан алынған деректер арнайы сенсорлық желі арқылы жинақталып, өңделіп, басқару жүйесіне беріледі.

Сенсорлық желі арқылы деректерді беру кезінде ақпараттың кешігуі, деректер пакеттерінің жоғалуы, өлшеу дәлдігінің төмендеуі және байланыс арнасының тұрақсыздығы сияқты факторлар туындауы мүмкін. Мұндай факторлар басқару алгоритмдерінің тиімділігіне әсер етіп, озон генерациялау процесінің тұрақтылығын төмендетеді. Сондықтан зерттеу барысында деректерді беру сенімділігі, кешігу уақыты, деректерді синхрондау мәселелері және ақпараттық шу деңгейі талданады. Сонымен қатар, деректерді сүзгілеу, алдын ала өңдеу және калибрлеу әдістері қарастырылады.

Зерттеудің маңызды бағыттарының бірі — сенсорлық деректерді басқару жүйесіне енгізу арқылы озон генерациялау процесін оңтайландыру. Бұл ретте автоматтандырылған басқару алгоритмдері технологиялық параметрлердің өзгеруіне жедел әрекет етуі тиіс. Мысалы, температураның жоғарылауы немесе қысымның ауытқуы анықталған жағдайда жүйе озон генерациялау режимін автоматты түрде реттеуі мүмкін. Мұндай тәсіл энергия тиімділігін арттыруға, жабдықтың тозуын азайтуға және озон концентрациясының тұрақтылығын қамтамасыз етуге мүмкіндік береді.

Зерттеу нәтижелері сенсорлық желі арқылы алынатын деректердің сапасы мен озон генерациялау жүйесінің тиімділігі арасындағы тәуелділікті анықтауға мүмкіндік береді. Нақты уақыттағы деректерді қолдану технологиялық процестің мониторингін жақсартып қана қоймай, болжамдық талдау жүргізуге де жағдай жасайды. Бұл өз кезегінде авариялық жағдайлардың алдын алуға, техникалық қызмет көрсету шығындарын азайтуға және жүйенің жалпы сенімділігін арттыруға ықпал етеді.

Сондай-ақ, сенсорлық технологияларды қолдану экологиялық қауіпсіздік тұрғысынан да маңызды. Озон концентрациясының бақылаусыз артуы адам денсаулығына және қоршаған ортаға зиян келтіруі мүмкін. Сондықтан нақты уақыттағы мониторинг озон деңгейін қауіпсіз шектерде ұстап тұруға мүмкіндік береді.

Күтілетін нәтижелер: жүргізілген зерттеу нәтижесінде озон генерациялау жүйесінің тиімділігін арттыру үшін сенсорлық технологияларды қолданудың ғылыми-әдістемелік негіздері қалыптастырылады деп күтіледі. Атап айтқанда, қысым, температура және озон концентрациясы параметрлерін нақты уақыт режимінде бақылау арқылы генерация процесінің тұрақтылығы мен басқару дәлдігін арттыру мүмкіндігі бағаланады.

Сонымен қатар сенсорлық желі арқылы деректерді беру сапасының (кешігу уақыты, деректердің жоғалуы, өлшеу дәлдігі) озон генерациялау процесінің тиімділігіне әсері анықталады. Бұл озон концентрациясын тұрақты деңгейде ұстап тұруға, энергия шығынын оңтайландыруға және жабдықтың сенімділігін арттыруға мүмкіндік береді.

Зерттеу нәтижесінде сенсорлық деректерді жинау, өңдеу және басқару жүйесіне енгізудің тиімді алгоритмдері ұсынылады деп күтіледі. Бұл ұсыныстар озон генераторларының өндірістік, экологиялық және медициналық қолдану салаларында бақылау сапасын жақсартуға және технологиялық процестің қауіпсіздігін арттыруға ғылыми негіз бола алады.

Қорытындылай келе, сенсорлық желілерді қолдану озон генерациялау жүйелерінің тиімділігін арттырудың перспективалы бағыты болып табылады. Қысым, температура және озон концентрациясы параметрлерін үздіксіз бақылау басқару сапасын жақсартып, энергия тиімділігін арттырады және технологиялық процестің қауіпсіздігін қамтамасыз етеді. Зерттеу нәтижелері озон генераторларын өнеркәсіптік, медициналық және экологиялық қолдану салаларында жетілдіруге ғылыми негіз бола алады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің қаржыландыруымен орындалады (BR31715767 — Машина жасау, робототехника, сенсорлық және жол жүйелеріндегі механика, динамика және басқарудың интеллектуалды әдістерін дамыту).

Кілт сөздер: озон генераторы, сенсорлық желі, қысым, температура, озон концентрациясы, деректерді беру, автоматтандырылған басқару, мониторинг.

2020 Mathematics Subject Classification: 93C83, 93C95, 94C99

ФУНКЦИОНАЛДЫ-ГРАДИЕНТТІК АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ ИІЛУІ ЖӘНЕ ЕРКІН ТЕРБЕЛІСТЕРІН ЕСЕПТЕУДІҢ НАҚТЫЛАНҒАН АНАЛИТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

С.Б. АХАЖАНОВ¹, Е.Д. АҚЖОЛТАЙ², Н.Ж. ӘМІРБЕКОВ³

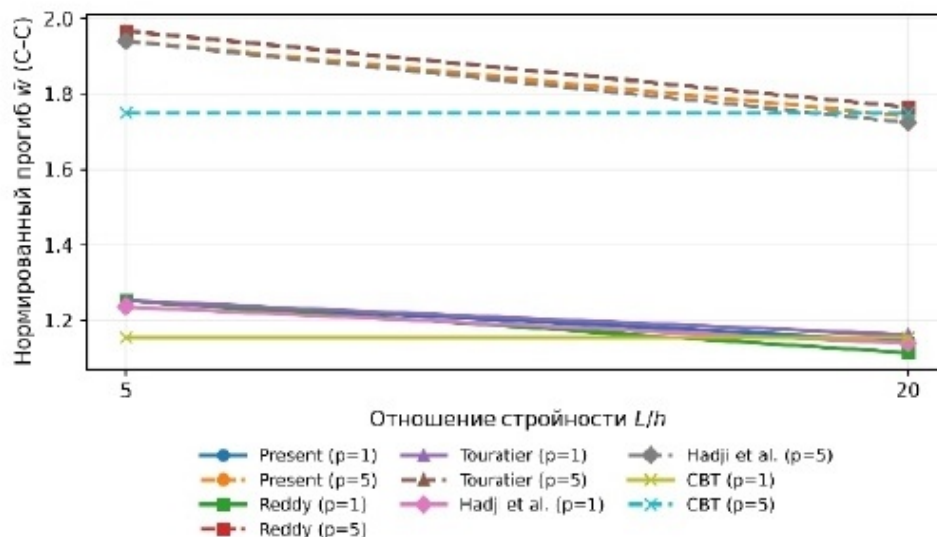
Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

¹sungatahazanov@gmail.com, ²akzholtayerkenaz@gmail.com, ³anizoro777@gmail.com

Функционалды-градиенттік материалдар (ФГМ) қалыңдығы бойынша механикалық қасиеттерін мақсатты түрде өзгерту мүмкіндігінің болуына байланысты қазіргі инженерлік конструкцияларда кеңінен қолданылады. Классикалық арқалық теориялары, соның ішінде Эйлер–Бернулли моделі [1], ығысу деформацияларын ескере алмайды, ал Тимошенко теориясы [2] эмпирикалық ығысу коэффициентін енгізуді талап етеді. Жоғары ретті теориялар (Reddy, Touratier және т.б.) [3–5] таралуының арнайы функцияларын қолданады, алайда олар әрқашан иілу және ығысу кинематикасының арасындағы тікелей байланысты қамтамасыз ете бермейді.

Бұл жұмыста қалыңдық бойынша жылжу функциялары $\phi'(x_3) = f(x_3)$ қатынасымен байланыстырылған келісілген кинематикалық модель ұсынылады, бұл тұжырымдаманың энергетикалық тұтастығын қамтамасыз етеді.

Серпімділік модулі мен тығыздық қалыңдық бойынша дәрежелік заңға сәйкес өзгереді [6].



Сурет 1: Қатаң бекітілген функционалды градиенттік арқалықтың нормаланған тік жылжуының салыстырмалы талдауы

Таралу функциясы келесі түрде қабылданып алынды:

$$\phi(x_3) = h \left(\frac{3}{2} \frac{x_3}{h} - 2 \frac{x_3^3}{h^3} \right), \quad f(x_3) = \frac{3}{2} - 6 \frac{x_3^2}{h^2} \quad (1)$$

$\phi'(x_3) = f(x_3)$ болғандықтан, модель $\tau_{13}(\pm \frac{h}{2}) = 0$ шартты автоматты түрде қанағаттандырады.

Функционалды-градиенттік арқалықтың тиімді иілу және сырғу қатаңдығы енгізіледі:

$$D_{FG} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(x_3) \phi(x_3) x_3 dx_3; \quad A_{FG} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(x_3) f^2(x_3) dx_3 \quad (2)$$

Функционалды-градиенттік арқалықтың статикалық иілуін сипаттайтын негізгі дифференциалдық теңдеу былайша анықталады:

$$D_{FG} \frac{d^4 W}{dx_1^4} = q(x_1) \quad (3)$$

Еркін тербелістер келесі теңдеумен сипатталады:

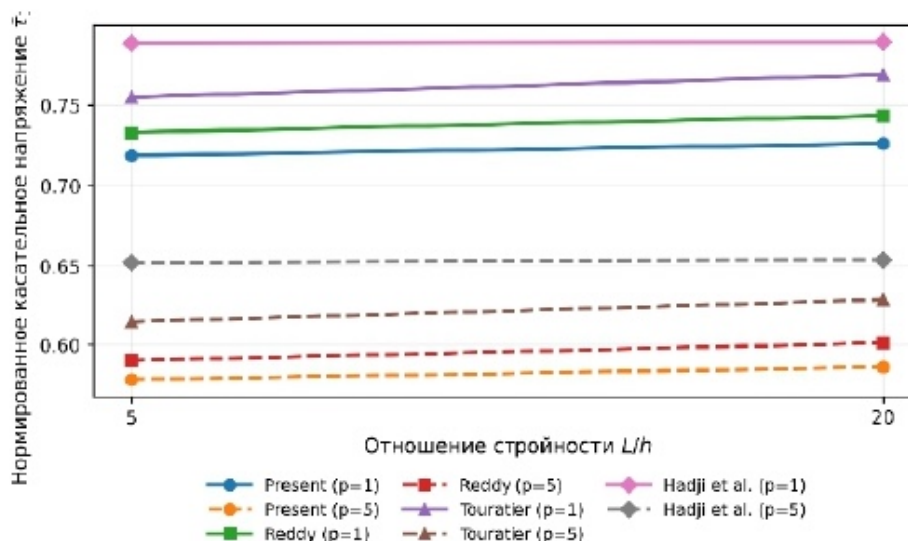
$$D_{FG} \frac{d^4 W_0}{dx_1^4} - m_{FG} \omega^2 W_0 = 0, \quad m_{FG} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x_3) dx_3 \quad (4)$$

Ұсынылған аналитикалық модельдің мүмкіндіктерін бағалау мақсатында функционалды градиенттік арқалықтың иілуі мен еркін тербелістеріне сандық талдау жүргізілді. Ұзындығы l , қалыңдығы h және ені $b = 1$ болатын екі жағынан қатаң бекітілген бірқалыпты таралған жүктеме $q_0 = \text{const}$ ФГ арқалық қарастырылады. Керамика: $E_c = 380$ GPa, $\nu = 0.3$, металл:

$E_m = 70$ GPa, $\nu = 0.3$. Металл тығыздығы $\rho_m = 2700 \text{ kg/m}^3$, керамика тығыздығы $\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$.

Сандық есептеулер келесі параметрлер үшін жүргізілді: $\rho = 1$ және $\rho = 5$.

Ұсынылған модельдің тиімділігін бағалау үшін тік жылжу, жанамалық кернеу және еркін тербелістер сипаттамалары бойынша алынған есептеу нәтижелері 1-2 суреттерде келтірілген.



Сурет 2: Қатаң бекітілген функционалды градиенттік арқалықтың нормаланған жанама кернеуінің салыстырмалы талдауы

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP26194239) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: Функционалды-градиенттік арқалық, көлденең ығысу теориясы, иілуді статикалық талдау, еркін тербелісті талдау, жанамалық кернеу.

2020 Mathematics Subject Classification: 74E30, 74K10

ОДЕБИЕТ

[1] Carrera E., Giunta G., and Petrolo M. Beam Structures: Classical and Advanced Theories. *A John Wiley and Sons Ltd Publication*, New Delhi, India (2011), pp. 1–42.

<https://doi.org/10.1002/9781119978565>

[2] Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine*, **41** (1921), 742–746.

<https://doi.org/10.1080/14786442108636264>

[3] Reddy J.N. A simple higher order theory for laminated composite plates, *ASME Journal of Applied Mechanics* **51:2** (1984), 745–775. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>

[4] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* **29(8)** (1991), 901–916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)

[5] Hadji L., Zouatnia N., Bernard F. An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: effect of the micromechanical models, *Struct. Eng. Mech.* **69(2)** (2019), 231–241.

<https://doi.org/10.12989/sem.2019.69.2.231>

[6] Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams, *Asian Journal of Civil Engineering* **19**, (2018), 607–623. <https://doi.org/10.1007/s42107-018-0046-z>

ОН АЛТЫ ӨЛШЕМДІ АЛГЕБРА НЕГІЗДЕРІ ЖӘНЕ КВАНТТЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР

М.Б. ГАББАСОВ¹, Т.Ж. ҚУАНОВ², К.М. СҮЛЕЙМЕНОВ³, Б.И. ТӨЛЕУОВ⁴

Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Астана,
Қазақстан

^{1,2} «Фактор» жүйелік зерттеулер компаниясы, Астана, Қазақстан

³ Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Қазақтың белгілі математигі Әбенев Мақсұт Мінайдарұлы төрт өлшемді математиканың ірге тасын қалап, оны гидромеханиканың есептерін шығаруға қолдана білді. Соның ішінде дербес туындылы дифференциал теңдеулерге қойылған Коши және шекаралық есептерін шешу жолында үлкен табыстарға жетті.

Бұл мақалада біздер он алты өлшемді математиканың алғашқы бөлігі — он алты өлшемді алгебра жайлы әңгіме қозғап, оның кванттық есептеулерге қолдану мүмкіншіліктерін қарастырамыз, сонымен қатар басқа да салаларда пайдалану жайлы айтамыз. Атап айтқанда он алты өлшемді сандарды қосу және көбейту амалдарын енгізіп, олардың қасиеттерін көрсетеміз. Енгізілген екі амалдың да ассоциативті және коммутативті екенін көрсетеміз. Атақты Фробениустың теоремасы бойынша бұл жағдайда нөлдің бөлгіштері пайда болады. Нөлдің бөлгіштерін айқын жазып олардың қасиеттерін талқылаймыз.

Он алты өлшемді сандар кеңістігінен басқа сәйкес матрицалар кеңістігін және он алты өлшемді сандардың спектрларының кеңістігін анықтап, олардың арасында изоморфизм және гомоморфизм бар екеніне көз жеткіземіз.

Әрі қарай төрт кубиттен тұратын кванттық жүйенің кванттық күйін сипаттап, кванттық қақпалар жайлы түсінік береміз. Төрт кубитті кванттық жүйенің барлық күйлерін унитарлы күйлер және унитарлы емес күйлер деп екі топқа бөліп, әр унитарлық күйге унитарлық қақпа сәйкес келетінін көреміз.

Соңында он алты өлшемді алгебраның криптография сияқты басқа салаларда қолдану мүмкіншіліктері жайлы айтамыз. Толығырақ ақпаратты төменде келтірілген авторлардың және олардың әріптестерінің мақалаларынан табуға болады.

Алғыс. Авторлар Қазақстан Республикасының ғылым және жоғары білім министрлігіне алғысын айтады (грант нөмірі AP23489825).

ӘДЕБИЕТ

[1] Абенев М.М. *Четырехмерная математика: Методы и приложения*. Алматы: «Қазақ Университеті», 2019.

[2] Абенев М.М., Габбасов М.Б. *Анизотропные четырехмерные пространства*. Астана, Препринт, 2020.

[3] Gabbassov M.B., Kuanov T.Zh., Tuleuov B.I., Suleimenov K.M., Yermagambetov T.K. Associative and Commutative Algebra of Eight-Dimensional Real Numbers. In: *Automorphisms and Identities of Algebras*. L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan. 8–12 September 2025.

[4] Gabbassov M.B.; Kuanov T.Z.; Yermagambetov T.K.; Tuleuov B.I. Four-Dimensional Spaces of Complex Numbers and Unitary States of Two-Qubit Quantum Systems. *Symmetry* 2025, 17, 1789. doi:10.3390/sym17111789.

СҮЗІЛУ ҚҰБЫЛЫСЫНЫҢ ҮШ ӨЛШЕМДІ СТАЦИОНАР ЕМЕС МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІНЕ ҚОЙЫЛҒАН КОШИ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІ

М.Б. ГАББАСОВ¹, А.Т. РАХИМОВА², Б.И. ТӨЛЕУОВ³

¹Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты

²«Фактор» жүйелік зерттеулер компаниясы

³Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

No e-mail

Бір фазалық сұйықтың немесе газдың сүзілу құбылысының математикалық моделі массаның сақталу заңын бейнелейтін үзіліссіздік теңдеуінен және сүзілу жылдамдығы мен қысымның градиентінің арасындағы байланысты бейнелейтін сүзілу теңдеуінен тұрады. Осы теңдеулерден басқа оларды түрлендіруден шыққан теңдеулерге қойылатын шекаралық есептердің немесе Коши есебінің шешімінің бар болатындығын қанағаттандыру үшін қосымша күй теңдеуін пайдаланады. Күй теңдеуі қарастырып отырған сұйықтың қысымы мен тығыздығының арасындағы байланысты бейнелейді. Егер үзіліссіздік теңдеуі мен сүзілу теңдеуі сәйкес сақталу заңдарының математикалық өрнектелуі болса (сүзілу теңдеуі импульстің сақталу заңының баламасы болып табылады), ал күй теңдеуі тәжірибеден алынған жуық теңдеу болып табылады. Бұл жағдай математикалық модельге эмпирикалық сипат береді және оның дұрыстығына күмән тудырады.

Бұл жұмыста сүзілу құбылысының үш өлшемді математикалық моделіне қойылған Коши есебі қарастырылып, оның аналитикалық шешімі алынған. Бұл шешімді алу үшін әуелі үзіліссіздік теңдеуіне қойылған Коши есебін шешіп, содан кейін оның шешімін сүзілу теңдеуіне қойып одан қысымның мәндерін табамыз. Үзіліссіздік теңдеуіне қойылған Коши есебін шешу үшін жаңа төрт өлшемді математика аппараты қолданылды. Яғни біз күй теңдеуін ешқандай қолданған жоқпыз. Сұйықтың немесе газдың қысымы мен тығыздығының арасындағы байланыс алынған шешімдерден нақты анықталады.

Алынған нәтиженің сүзілу құбылысының математикалық моделінің белгілі шешу жолдарынан бірнеше айырмашылығы бар. Біріншіден, біз сақталу заңдарынан алынған теңдеулерді әрі қарай түрлендірмей бірден шешеміз. Екіншіден, қолданған математикалық аппараттың артықшылығынан теңдеулер жүйесін екі байланыссыз теңдеулер ретінде шешу мүмкіндігі пайда болады. Үшіншіден, күй теңдеуінің қажеті жоқ. Төртіншіден, бастапқы шарттар тығыздық пен жылдамдықтың компоненттеріне қойылады.

Айтылған айырмашылықтар сүзілу құбылысымен айналысатын ғалымдар үшін мейлінше таң қаларлық жағдай. Дегенмен алынған аналитикалық шешім шығару барысының дұрыстығына күмән келтірмейді. Мәселеге үңіле қарасақ жоғарыда келтірілген айырмашылықтардың табиғи екеніне көз жеткізуге болады. Біздің осы мақаламыз айтылған айырмашылықтарды ғылыми ортамен талқылауға және олармен пікір алмасуға арналған. Бұл көзқарасты тек қана сүзілу құбылысының математикалық моделіне емес, жалпы сұйықтар мен газдар механикасының барлық модельдеріне қолдануға болады. Толығырақ ақпаратты авторлардың және олардың әріптестерінің жариялаған төменде келтірілген мақалаларынан табуға болады.

Қаржыландыру: Авторлар іргелік зерттеулерге қаржылық көмек көрсеткені үшін Қазақстан Республикасының ғылым және жоғары білім министрлігіне алғысын айтады (грант нөмірі BR31715767).

ӘДЕБИЕТ

- [1] Абенев М.М. Четырехмерная математика: Методы и приложения. // Алматы, Издательство «Қазақ Университеті», (2019).
- [2] Абенев М.М., Габбасов М.Б. Анизотропные четырехмерные пространства. // Астана, Препринт, (2020).
- [3] Abenov M.M., Gabbassov M.B., Kuanov T.Z., Tuleuov B.I. Anisotropic Four-Dimensional Spaces of Real Numbers. *Symmetry*, **17** (2025), 795.

[4] Rakhymova A.T., Gabbassov M.B., Shapen K.M. On one space of four-dimensional numbers // *Vestnik KazNU*. 4 (2020), 199-225.

[5] Rakhymova A.T., Gabbassov M.B., Shapen K.M. Functions in one space of four-dimensional numbers // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. 2 (2021), 139-154.

[6] Rakhymova A.T., Gabbassov M.B., Ahmedov A.A. Analytical Solution of the Cauchy Problem for a Nonstationary Three-dimensional Model of the Filtration Theory. // *Journal of advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*. 87:1 (2021), 118-133.

DOI: <https://doi.org/10.37934/arfmts.87.1.118133>

КИНЕМАТИКАЛЫҚ ЖҰПТАРЫНДА ҮЙКЕЛІС КҮШТЕРІ БАР СЕРПІМДІ КЕҢІСТІКТЕГІ МЕХАНИЗМДЕРДІҢ ДИНАМИКАСЫНЫҢ ТЕҢДЕУІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

С.А. ЖОЛДАСОВ

Ж.А. Тәшенев атындағы университет, Шымкент, Қазақстан
joldasov10@mail.ru

Бұл жұмыста механизмді кинетостатикалық талдау әдісі екі негізгі қағидатқа сүйенеді: байланыстардан босату қағидаты және Даламбер әдісі. Даламбер қағидатына сәйкес, егер тетікке әсер ететін күштерге буындардың инерция күштерін қосатын болса, механизмді тепе-теңдіктегі жүйе ретінде қарастыруға болады. Бұдан әрі статика теңдеулері қолданылады, бұл «кинетостатика әдісі» деген атаудың себебі болып табылады.

Механизмдер мен машиналарды беріктік есебінің практика жүзінде кеңінен қолданылатын әдістерінің бірі шеткі элементтер әдісі (ШЭӘ) болып табылады. ШЭӘ-ін пайдалану кезінде механизмдер өзара түйіндік нүктелерде қосылған, қарапайым геометриялық формадағы (сызықтардың қималары, үшбұрыштар және т.б.) көптеген элементтерге бөлінеді. Кез-келген нысанның динамикасын орын алмастырулар әдісімен есептеудің негізгі кезеңдері мыналар болып табылады:

1. Нысанды идеализациялау немесе есептеу схемасын таңдау;
2. Жекелеген элементтердің қатаңдық матрицасын (ҚМ), массалар матрицаларын (ММ), серпінді демпфирлеу матрицаларын, осы мақсаттар үшін ыңғайлы координаттардың кез-келген локальді жүйесінде есептеп шығару.

Түйін сөздер: Кинематикалық жұптар, үйкеліс күштер, кеңістіктегі механизмдер, динамика, шеткі элементтер әдісі, сызықтық қималар, серпінді деформация, серпінді реакция, түйіндік орын ауыстыру, математикалық модель, масса матрицасы, қатаңдық матрицасы.

ӘДЕБИЕТ

[1] Масанов Ж.К., Темирбеков Ж.К., Биртанов Е.А. Динамический анализ механизма 4 класса с упругими звеньями методом конечных элементов. В кн. "International Conference spatical mechanisms and high class mechanisms (1994) Almaty.

[2] Масанов Ж.К., Сартаев К.З., Елеусинова А.Е. Динамическое упругое состояние пространственных конструкций на их базе МВК с силой трения в информатика, (2002), № 1(29), 162-168.

[3] Масанов Ж.К., Сартаев К.З., Жолдасов С.А. Динамическое напряженное и деформируемое состояние упругих пространственных механизмов и машин, *Материалы международной научно-практической конференции «Достижения науки в области строительной механики и инженерных сооружений»*, (2005), Алматы, 182-187.

ЖАҢА КӨПФУНКЦИЯЛЫ МОБИЛЬДІ МЕТАЛЛ 3D-ПРИНТЕРДІҢ КИНЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУЫ ЖӘНЕ ЖҰМЫС АЙМАҒЫН БАҒАЛАУ

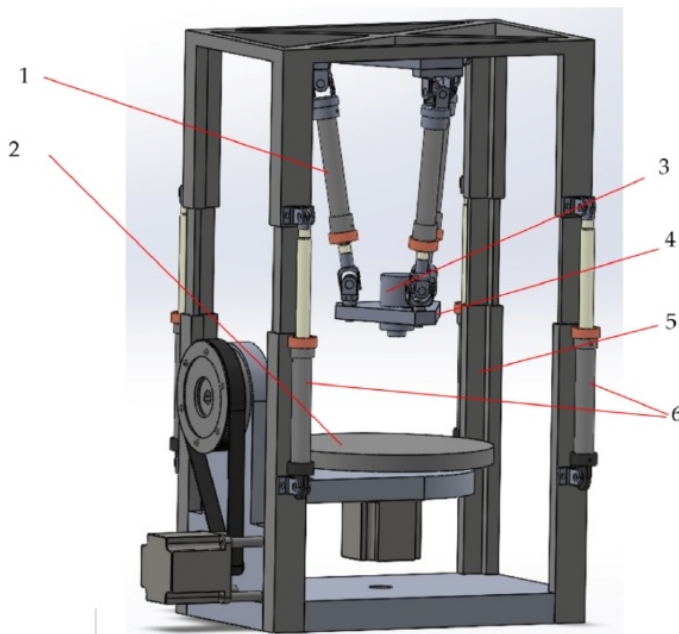
Р.А. КАЙЫРОВ¹, А.С. ЖҰМАҒҰЛ², М. ОРАНТАЙҰЛЫ³, Қ. ҚҰРМАНБАЙ⁴

Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

¹kairov.rustem@mail.ru, ²abylai.zhumagul07@mail.ru, ³manarbekorantajuly@gmail.com,
⁴qaysar2756@gmail.com

Wire Arc Additive Manufacturing (WAAM) технологиясы күрделі геометриялы бөлшектерді дайындауға мүмкіндік береді, бірақ бұл әдістің негізгі кемшіліктерінің бірі өлшемдік дәлдіктің шектеулілігі. Осы мәселені шешу мақсатында материалды қабаттап құю мен кейінгі механикалық өңдеуді бір жүйеге біріктіретін мобильді металл 3D-принтердің жаңа тұжырымдамасы ұсынылған. Соңғы жылдары үшөлшемді басып шығару технологиясы қарқынды дамып, өндіріс пен ғылымның маңызды бағытына айналды [1]. Басым бағыттардың бірі металдың аддитивті өндірісі [6–8]. WAAM технологиясының дәлдігі төмен, бет сапасы нашар және кеуектілік сияқты кемшіліктері бар [9,10]. Сондықтан кейінгі механикалық өңдеу қажет. Қазіргі WAAM жүйелерінің көпшілігі стационарлы, бұл оларды өңдеуді шектейді. Осыған байланысты зерттеудегі негізгі мақсат бөлшектерді өңдеуді қоса жүргізуге арналған көпфункционалы мобильді металл 3D-принтерді әзірлеу болып табылады.

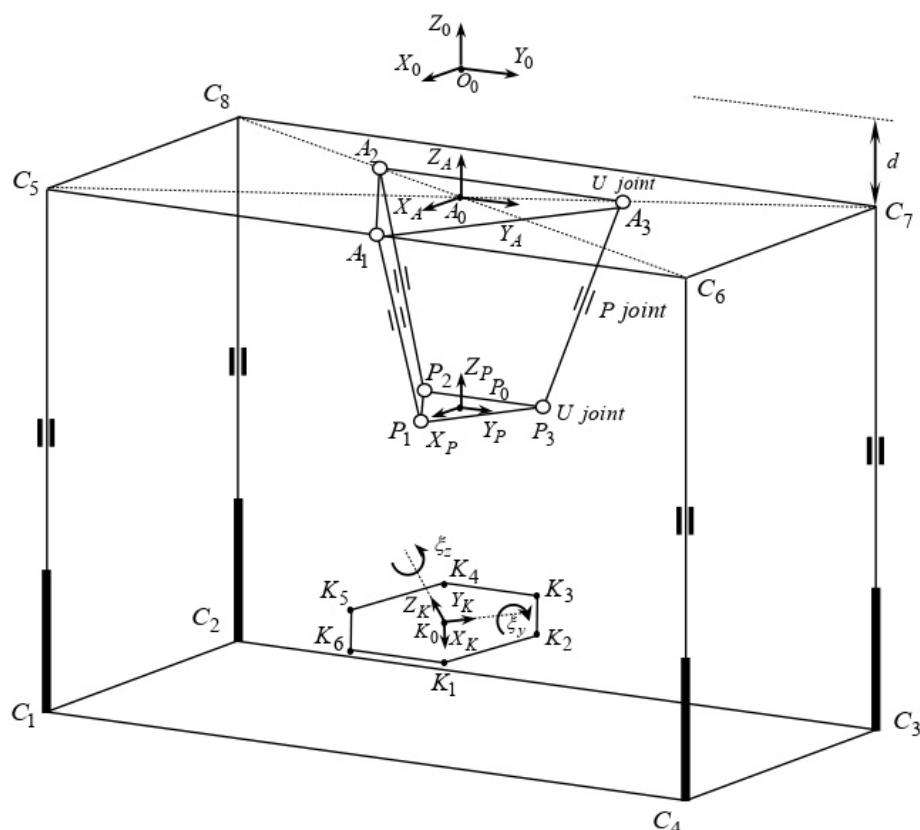
Орындаушы механизм үш негізгі жүйеден тұрады: 1. Үш ілгермелі еркіндік дәрежесін қамтамасыз ететін параллель манипулятор (ПМ). Бұл негізгі атқарушы механизм болып табылады. 2. Екі айналмалы еркіндік дәрежесін қамтамасыз ететін екі өсті қозғалмалы үстел. Ол манипулятормен бірлесіп жұмыс істеп, дайындаманы қажетті қалыпқа келтіруге мүмкіндік береді. 3. Бүкіл конструкцияны вертикал ось бойымен жоғары-төмен жылжытатын тік көтеру механизмі. Осындай құрылым нәтижесінде 3+2 түрдегі орналастыру жүйесі қалыптасады, оған қосымша тәуелсіз тік көтеру модулі енгізілген.



1-сурет. Көпфункционалы мобильді металл 3D-принтердің жалпы құрылымдық сұлбасы.

Зерттеу барысында механизмнің қозғалғыштығы талданып, тура және кері кинематика есептері шығарылды, сондай-ақ кері кинематикалық модель негізінде оның жұмыс аймағы

анықталды және алынған нәтижелер дәлдік пен функционалдық мүмкіндіктерді қамтамасыз ететінін және оны өндірісте қолдануға болатынын көрсетті.



2-сурет. Орындаушы механизмнің кинематикалық сұлбасы.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP26195541) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: металл 3D принтер, WAAM, параллель манипулятор, кері кинематика, тура кинематика, жұмыс аймағы.

2020 Mathematics Subject Classification: 74E30, 74K10

ӘДЕБИЕТ

- [1] Shah A., Aliyev R., Zeidler H., Krinke S. A review of the recent developments and challenges in wire arc additive manufacturing (WAAM) process, *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, **7**:3 (2023), 97.
- [2] Alami A.H., et al. Additive manufacturing in the aerospace and automotive industries: recent trends and role in achieving sustainable development goals, *Ain Shams Engineering Journal*, **14**:11 (2023), 102516.
- [3] Aziz M., et al. Characteristics of antenna fabricated using additive manufacturing technology and the potential applications, *Heliyon*, (2024).
- [4] Renderos M., Girot F., Lamikiz A., Torregaray A., Saintier N. Ni based powder reconditioning and reuse for LMD process, *Physics Procedia*, **83** (2016), 769–777.
- [5] Frazier W.E. Metal additive manufacturing: a review, *Journal of Materials Engineering and Performance*, **23** (2014), 1917–1928.
- [6] Gibson I., Rosen D., Stucker B. *Additive Manufacturing Technologies*, Springer, New York (2015).

[7] Çam G. Prospects of producing aluminum parts by wire arc additive manufacturing (WAAM), *Materials Today: Proceedings*, **62** (2022), 77–85.

[8] Knezović N., Topić A. Wire and arc additive manufacturing (WAAM) – a new advance in manufacturing, in: *New Technologies, Development and Application 4*, Springer, Cham (2019), 65–71.

[9] Zahid M., Hai K., Khan M., Shekha A., Pervaiz S., Moneeb Ali S., Salman M. Wire arc additive manufacturing (WAAM): reviewing technology, mechanical properties, applications and challenges, in: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, ASME, New York (2020), V02AT02A042.

ИІЛГЕН ҚҰБЫРДАН СҰЙЫҚТЫҚ АҚҚАН КЕЗДЕГІ ОРНЫҚТЫЛЫҚ ЕСЕБІ

Ж. МӘДІБАЙҰЛЫ

АЛТ университеті, Алматы, Қазақстан

zhumabaymadibaiuly@gmail.com

Бұл жұмыста сұйықтық ағып жатқан иілген құбырдың орнықтылығы қарастырылады. Құбырдың көлденең ауытқуын сипаттайтын модель жазылып, ағынның сындарлы жылдамдығы аналитикалық түрде бағаланады. Сондай-ақ ішкі қысымды тербеліс сипаттамалары арқылы жанама анықтау идеясы беріледі. Жұмыс акустикалық диагностика және құбыр ақауын қашықтан анықтау есептері үшін негіз бола алады.

Кіріспе Қолданыстағы тасымал құбырларының екі шетінде ақау пайда болған жағдайда, ақауды жедел және дәл анықтау инженерлік тәжірибеде маңызды мәселе болып табылады. Құбырдың екі шеті ашық жерде орналасса, тәжірибелі инженерлер ақауды салыстырмалы түрде оңай анықтай алады. Алайда құбырдың екі шеті жер астында немесе су астында орналасқанда, тікелей бақылау мүмкін болмай, диагностика айтарлықтай қиындайды. Осындай жағдайда акустикалық әдістер, яғни сұйықтық аққан құбырдың дыбысын “есту” арқылы ақауды анықтау, практикалық мәнге ие болады. Бұл сипаттама бастапқы құжат мазмұнына сәйкес сақталды.

Есептің қойылуы Құбырдың көлденең ауытқуын табу және құбырда ағып жатқан сұйықтықтың ішкі қысымы мен сындарлы жылдамдығын есептеу қажет. Белгілеулер:

$$w(x, t) \quad \text{— құбырдың көлденең ауытқуы,} \quad (1)$$

$$p_0 \quad \text{— сұйықтықтың ішкі қысымы.} \quad (2)$$

Математикалық модель Сұйықтық ағып жатқан жіңішке серпімді құбырдың көлденең тербелісінің қарапайым моделі мына түрде жазылады:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

мұндағы E — серпімділік модулі, I — қиманың инерция моменті, m — құбырдың сызықтық массасы, M — сұйықтықтың сызықтық массасы, U — ағын жылдамдығы.

Екі ұшы бекітілген құбыр үшін шекаралық шарттар:

$$w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad w_{xx}(0, t) = 0, \quad w_{xx}(L, t) = 0. \quad (4)$$

Сындарлы жылдамдықты бағалау Шешімді бірінші меншікті форма түрінде алайық:

$$w(x, t) = \phi(x)e^{\lambda t}, \quad \phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (5)$$

Осыны (3) теңдеуіне қойсақ,

$$\lambda^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{MU^2\pi^2}{L^2} - \frac{EI\pi^4}{L^4} \right). \quad (6)$$

Теорема 1. *Егер*

$$U < U_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{M}}, \quad (7)$$

болса, онда бірінші жуықтауда жүйе орнықты болады; ал $U > U_{cr}$ кезінде жүйе орнықтылығын жоғалтады.

Дәлелдеу. (6) формуласы бойынша орнықтылық үшін $\lambda^2 < 0$ болуы қажет. Бұл

$$\frac{MU^2\pi^2}{L^2} - \frac{EI\pi^4}{L^4} < 0$$

шартына эквивалент. Оны U бойынша шешсек,

$$U^2 < \frac{EI\pi^2}{ML^2},$$

яғни (7) теңдігі алынады. Демек, U_{cr} — сындарлы жылдамдық. $\square$

Ішкі қысымды жанама анықтау Ішкі қысымды тікелей өлшеу қиын болғандықтан, оны ағын жылдамдығы арқылы жанама бағалау ұсынылады. Қарапайым гидродинамикалық жуықтауда динамикалық қысым

$$p_0 \approx \frac{1}{2} \rho_f U^2, \quad (8)$$

мұндағы ρ_f — сұйықтық тығыздығы. Егер тербеліс өлшемдерінен немесе акустикалық диагностикадан U бағаланса, онда (8) бойынша ішкі қысым да анықталады.

Параметрлік талдау Төмендегі есептеулер үшін келесі параметрлер алынды:

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}, \quad I = 10^{-6} \text{ м}^4, \quad M = 10 \text{ кг/м}, \quad \rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

Сындарлы жылдамдық пен қысымның ұзындыққа тәуелділігі сандық түрде бағаланды.

Таблица 1: Параметрлік талдаудың үлгілік нәтижелері

L , м	U_{cr} , м/с	p_0 , Па
1.0	455.81	103880064.74
2.0	227.90	25970016.18
3.0	151.94	11542229.41
4.0	113.95	6492504.04
5.0	91.16	4155202.59

Нәтижелер мен талқылау Есептеулерден құбыр ұзындығы артқан сайын сындарлы жылдамдықтың кемітіні байқалады. Бұл нәтиже (7) формуласымен де сәйкес, себебі $U_{cr} \sim L^{-1}$. Сондықтан ұзын құбырлар ағын әсерінен орнықсыздыққа тезірек ұшырайды. Ал ішкі қысымның жуық бағасы (8) бойынша жылдамдықтың квадратына пропорционал өзгереді. Практикалық тұрғыдан бұл акустикалық өлшемдер арқылы ағын режимін және ықтимал ішкі қысымды бағалауға мүмкіндік береді.

Қорытынды Бұл жұмыста сұйықтық ағып жатқан иілген құбырдың орнықтылық есебі қарастырылды. Құбырдың көлденең ауытқуын сипаттайтын модель ұсынылып, бірінші форма

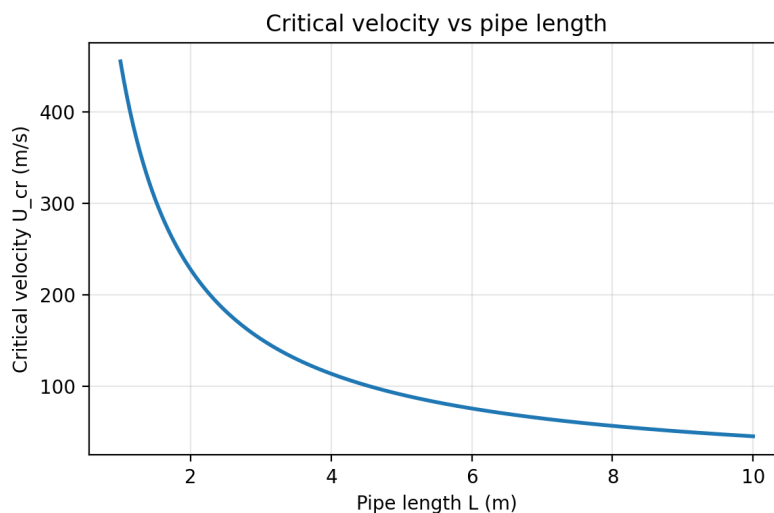


Рис. 1: Құбыр ұзындығына байланысты сындарлы жылдамдықтың өзгеруі

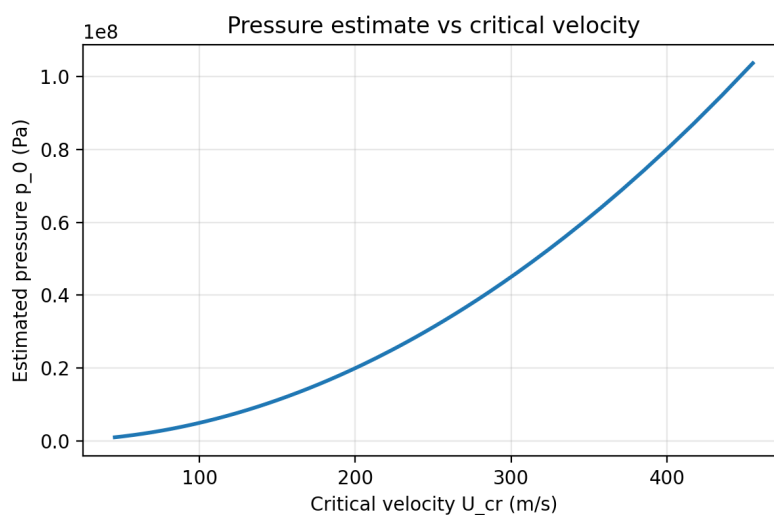


Рис. 2: Сындарлы режимдегі ішкі қысымның жылдамдыққа тәуелділігі

үшін сындарлы жылдамдықтың аналитикалық бағасы шығарылды. Сондай-ақ ішкі қысымды ағын жылдамдығы арқылы жанама анықтау идеясы көрсетілді. Ұсынылған тәсіл құбыр ақауларын акустикалық диагностика арқылы анықтау есептерінде пайдалы болуы мүмкін.

Қолданылған әдебиеттер

- [1] Ильгамов М. А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*. М.: Наука, 1969. 182 с.
- [2] Томпсон Дж. М. Т. *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике*. М.: Мир, 1985. 254 с.
- [3] Ахтямов А. М., Шагиев В. Р. Идентификация закрепления трубопровода с использованием минимального количества собственных частот // *Математические структуры и моделирование*. 2018. № 1(45). С. 95–107.
- [4] Мадибайұлы Ж. Устойчивость трубы с протекающей по ней жидкостью // *Международная конференция “Математика, механика, прикладные вопросы”*. Караганда, 12.06.2019–13.06.2019.

ҚҰРЫЛЫС КОНСТРУКЦИЯЛАРЫНДАҒЫ ДЕФОРМАЦИЯЛАРДЫ БАҚЫЛАУДА DISTRIBUTED ACOUSTIC SENSING (DAS) ТЕХНОЛОГИЯСЫН ҚОЛДАНУ

А.Е. КУТТЫБАЕВА¹, С.Р. КОБЛАНОВ², А. ТҮРЕБЕКОВА³, Б. СЕКЕНОВ⁴

Satbayev University, Алматы, Қазақстан

a.kuttybayeva@satbayev.university

Құрылыс конструкцияларының сенімділігі мен ұзақ мерзімді қауіпсіздігін қамтамасыз ету үшін олардың деформациялық күйін үздіксіз бақылау аса маңызды. Әсіресе сейсмикалық белсенді аймақтарда, динамикалық жүктемелерге ұшырайтын көпірлерде, биік ғимараттарда және көлік инфрақұрылымында конструкциялардың кернеулі - деформациялық күйін нақты уақыт режимінде тіркеу қажеттілігі артып отыр. Осы тұрғыда таратылған талшықты-оптикалық сенсорлау технологиялары, соның ішінде Distributed Acoustic Sensing (DAS), құрылымдық мониторинг саласында перспективалы шешім болып табылады.

Сейсмикалық белсенді аймақтарда орналасқан құрылыс объектілерінің сенімділігін қамтамасыз ету олардың динамикалық және квазистатикалық деформацияларын дәл әрі үздіксіз бақылаумен тікелей байланысты. Жер сілкінісі кезінде конструкцияларда пайда болатын серпімді толқындар, инерциялық күштер және резонанстық тербелістер олардың кернеулі-деформациялық күйін күрт өзгертеді. Сондықтан заманауи сейсмикалық мониторинг жүйелерінде жоғары кеңістіктік рұқсаттылыққа ие, ұзын сызықты объектілерді толық қамтитын таратылған сенсорлық технологияларды қолдану өзекті болып табылады.

DAS технологиясы оптикалық талшық бойымен таралатын лазерлік импульстардың кері Рэлей шашырауына негізделген. Талшықтың кез келген нүктесінде механикалық әсер (деформация, діріл, соққы) туындаған жағдайда, жарықтың шашырау фазасы мен амплитудасы өзгереді. Бұл өзгерістер интеррогатор құрылғысы арқылы тіркеліп, талшықтың бойындағы белгілі бір координатаға сәйкес келетін деформациялық сигнал ретінде өңделеді. Осылайша, бір ғана оптикалық талшық ондаған километр қашықтықта мыңдаған өлшеу нүктелерінің функциясын атқара алады.

DAS жүйесінің ерекшелігі — ол нүктелік сенсор емес, толықтай таратылған өлшеу принципімен жұмыс істейді. Кеңістіктік рұқсаттылығы әдетте 1–10 м аралығында, ал өлшеу ұзындығы 20–50 км дейін жетуі мүмкін. Бұл қасиет ірі құрылыс объектілерінің (мысалы, көпір аралықтары, туннельдер, бөгеттер) бойымен деформацияның таралуын толық карта түрінде алуға мүмкіндік береді.

Құрылыс конструкцияларында DAS технологиясы келесі міндеттерді шешуде тиімді:

- микродірілдер мен динамикалық жүктемелерді тіркеу;
- жарықшақтардың пайда болуын ерте кезеңде анықтау;
- динамикалық резонанстық режимдерді бақылау;
- сейсмикалық әсер кезіндегі конструкцияның реакциясын тіркеу;
- ұзын сызықты объектілердегі (құбырлар, эстакадалар) деформациялық өзгерістерді үздіксіз мониторингтеу.

Технологияның негізгі артықшылықтары — электромагниттік кедергілерге төзімділік, жарылысқа қауіпсіздік, ұзақ қашықтықта жұмыс істеу мүмкіндігі және бір талшық арқылы толық объектіні қамту қабілеті. Сонымен қатар, оптикалық талшықтың шағын диаметрі оны бетон құрылымдарына, арматуралық элементтерге немесе топырақ қабатына интеграциялауға мүмкіндік береді.

DAS технологиясының маңызды ерекшелігі — оның толық таратылған өлшеу принципі. Кеңістіктік рұқсаттылығы 1–5 м аралығында, ал мониторинг ұзындығы ондаған километрге

дейін жетуі мүмкін. Бұл қасиет көпірлер, туннельдер, биік ғимараттардың іргетастары және инженерлік желілер сияқты күрделі объектілерді кешенді бақылауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, оптикалық талшық электромагниттік кедергілерге сезімтал емес және агрессивті ортада ұзақ мерзімді тұрақты жұмыс істей алады.

Дәстүрлі нүктелік акселерометрлермен салыстырғанда DAS жүйесі конструкция бойындағы деформацияның таралу сипатын үздіксіз карта түрінде береді, бұл сейсмикалық әсердің кеңістіктік гетерогенділігін терең талдауға жағдай жасайды. Әсіресе жер сілкінісінен кейінгі жедел бағалау кезеңінде бұл технология зақымданған аймақтарды жылдам локализациялауға мүмкіндік береді.

Distributed Acoustic Sensing технологиясын құрылыс конструкцияларының сейсмикалық мониторинг жүйелеріне енгізу кеңістіктік жоғары рұқсаттылықты, үздіксіз бақылауды және нақты уақыттағы талдауды қамтамасыз ететін ғылыми негізделген және перспективалы бағыт болып табылады. Бұл тәсіл апаттық тәуекелдерді төмендетуге және инженерлік қауіпсіздік деңгейін арттыруға мүмкіндік береді.

Күтілетін нәтижелер: Distributed Acoustic Sensing технологиясы құрылыс конструкцияларының деформациялық күйін кеңістіктік үздіксіз бақылауға мүмкіндік беретін, жоғары сезімтал әрі сенімді заманауи мониторинг құралы болып табылады. Оның құрылымдық денсаулық мониторинг жүйелеріне енгізілуі апаттық жағдайлардың алдын алуға және инженерлік қауіпсіздікті арттыруға бағытталған ғылыми негізделген шешім болып саналады.

Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің қаржыландыруымен орындалады (№ AP26197553).

Кілт сөздер: DAS, акселерометр, оптикалық талшық, деформация, сейсмикалық мониторинг, құрылыс конструкциясы, сенімділік, Рэлей шашырауы.

ПЛАСТИНАНЫҢ ҮШІНШІ РЕТТІ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЖЕТІЛДІРІЛГЕН НҰСҚАСЫ

А.Ж. НУРГОЗИЕВА¹, А.Д. АҚЖОЛТАЙ²

Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

¹aizhanzhanabai@gmail.com, ²leoaltynai@gmail.com

Бүгінгі күнде пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескеретін дәлденген теорияның көптеген түрі бар. Солардың ішінде үшінші реттен жоғары пластина теориялары іс жүзінде қарастырылмайды, себебі жоғары ретті ығысу теориясы дәлдікті сәл көтергенімен үлкен алгебралық қиындықтар мен есептеу шығындарына алып келеді. Кең қолданысқа ие Рейсснер мен Миндлиннің бірінші ретті ығысу теориясында [1-2] қолданылатын түзетуші коэффициент Реддидің үшінші ретті ығысу теориясында болмайды, бұл пластинаның қалыңдығы бойынша көлденең ығысу деформациясының параболалық заңдылықпен өзгеруіне байланысты [3-4]. Аталған теорияларда шешуші теңдеулердің жалпы реті алтыға тең болады. Қазіргі кезде бірінші ретті ығысу теориясына негізделіп екі белгісіз функциясы бар қарапайымдатылған теориялар ұсынған жұмыстарда авторлар шешуші теңдеуді классикалық теория формасына келтіреді [5-7]. Берілген жетілдірілген теория нұсқасында жылжу әдісіне негізделіп көлденең ығысу деформациясын параметр ретінде қабылдап, шешуші теңдеуді Кирхгоф теориясындағыдай төртінші ретті сақтап алуға болатынын көрсетеміз [8-9].

Біртекті изотропты материалдан жасалған жұқа пластинаны (ұзындығы a_1 , ені a_2 және қалыңдығы h) қарастырайық. Пластина $O - x_1 - x_2 - x_3$ декарттық координаттар жүйесінде келесідей шектелген :

$$0 < x_1 < a_1, \quad 0 < x_2 < a_2, \quad -h/2 < x_3 < h/2 \quad (1)$$

Пластинаның $x_3 = -h/2$ бетіне $q(x_1, x_2)$ таралған жүктеме әсер етеді, ал $x_1 = 0, a_1$ және $x_2 = 0, a_2$ шеттері әр түрлі бекіністерге ие не бос болуы мүмкін. Пластина материалының E

серпімділік модулі, G ығысу модулі мен ν Пуассон коэффициенті өзара $G = E/2(1 + \nu)$ қатынаспен байланысқан.

Үшінші ретті ығысу теориясына негізделіп келесі болжамды қабылдаймыз:

1. Орта жазықтыққа нормал болатын кез-келген түзу сызықты элемент пластина деформацияланған соң түзу сызықты және нормал болмайды, оның ұзындығы сақталады және қалыңдық бойымен параболалық заңдылық бойынша өзгереді. Бұдан өсімен өстері арасында көлденең ығысу деформациясы пайда болады және келесі заңдылық бойынша өзгереді:

$$\gamma_{13} = \gamma_0 f(z) n \frac{\partial W}{\partial x_1}; \quad \gamma_{23} = \gamma_0 f(z) n \frac{\partial W}{\partial x_2};$$

$$n = E_0/G; \quad E_0 = E/(1 - \nu^2); \quad f(z) = 1 - 4z^2; \quad z = x_3/h \quad (2)$$

мұнда γ_0 — көлденең ығысу параметрі; n — серпімділік тұрақтылар параметрі; $f(z)$ — көлденең ығысудың таралу функциясы; z — көлденең өлшемсіз координата, $W(x_1, x_2)$ — жалпы майысу функциясы.

2. Пластинаның майысу функциясы екі компоненттен тұрады:

$$W(x_1, x_2) = W_0(x_1, x_2) + \frac{4}{5} \tilde{W}(x_1, x_2) \quad (3)$$

мұнда ығысу деформациясы ескерілген майысу функциясы, классикалық теория бойынша майысу функциясы.

Пластинаның дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуі мына түрде болады:

$$Dg \nabla^2 \nabla^2 W(x_1, x_2) = q(x_1, x_2); \quad g = 1 - \frac{4}{5} \gamma_0 n; \quad \gamma_0 = \frac{k^2 h^2}{8(1 + \frac{nk^2 h^2}{10})}, \quad (4)$$

мұнда g — цилиндрлік қатаңдық параметрі, k^2 — біртекті теңдеудің меншікті санының квадраты.

Өту теңдеуін қолданып

$$\nabla^2 W_0 + k^2 W_0 = 0 \quad (5)$$

жалпы майысу функциясы мен классикалық теория бойынша майысу функциясын байланыстыра аламыз

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{g} W_0(x_1, x_2) \quad (6)$$

Сонымен, ұсынылған жетілдірілген нұсқада шешуші теңдеу төртінші ретті болып қалады және көлденең ығысу деформациясын ескеріп пластинаны есептеу үшін классикалық теорияның дайын шешімдерін қолдануға болады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландырады (грант №AP22684709).

Кілтті сөздер: жұқа пластина, көлденең ығысу деформациясы, классикалық теория, бірінші ретті ығысу теориясы, үшінші ретті ығысу теориясы.

2020 Mathematics Subject Classification: 74K20

ӘДЕБИЕТ

- [1] Reissner E. On the theory of bending of elastic plates, *Journal of Math and Phys.*, (1944), 184–191.
- [2] Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics.*, (1951), 31–38.
- [3] Reddy J.N. A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, *International Journal of Solids and Structures.*, (1984), 881–896.
- [4] Shi G. A New Simple Third-order Shear Deformation Theory of Plates, *AIAA Journal.* Vol.40, (2002), 137–146.

[5] Shimpi R.P., Guruprasad P.J., Pakhare K.S. Single variable new first order shear deformation theory for isotropic plates, *Latin Am. J. Solids Struct.*, Vol.15, (2018), 1–25.

[6] Shimpi R.P. Refined plate theory and its variants, *AIAA Journal*, Vol. 40 (1). (2002), 137–146.

[7] Pakhare K.S., Sawhney H., Shimpi R.P. et al. Analytical and numerical investigations of the flexure of isotropic plates using the novel first-order shear deformation theory, *Proceedings of the Indian National Science Academ*, (2021), 379–392.

[8] Тұрсынов К.А. Ортоотроптық пластинаның иілуінің классикалық және дәлденген теориялары, *Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. №1 (37).*, (2005), 64–74.

[9] Тұрсынов К.А., Тұрсынов Д.К. *Конструкциялардың кеңістік элементтерін есептеу негіздері.*, ҚарМУ баспасы, Қарағанды (2007).

САЛМАҚТЫҚ СОБОЛЕВ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ КУБТЫҚ ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ ТЕГІСТІГІ

А.М. СЛЯМҚАНОВА¹, Л.К. ЖАПСАРБАЕВА², А.К. КАСТРО КАСТИЛЬЯ³

^{1,2}Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана

³Назарбаев университеті, Астана

¹maksatovnaaru2002@gmail.com, ²leylazhk67@gmail.com

$H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)$ салмақтық Соболев кеңістігінде сызықтық емес Шредингер теңдеуін зерттейміз:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2 u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Бұл жұмыста (1) теңдеу үшін Коши есебінің тегістік қасиеттері салмақтық Соболев кеңістігінде зерттеледі. Дюамель формуласын қолдана отырып, (1) теңдеуді келесі интегралдық түрде жазып алуға болады:

$$u(x, t) = e^{-i\partial_x^2 t} u_0(x) - i \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} (|u|^2 u)(x, t') dt' =: e^{-i\partial_x^2 t} u_0(x) - iI(x, t). \quad (2)$$

Бізді келесідей тұжырымдауға болатын бейсызық тегістік қасиеттері қызықтырады, яғни $u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)$ бастапқы шарттарымен берілген кейбір $s > \frac{1}{4}$ үшін (2) формуламен ұсынылған (1) сызықтық емес есеп пен бастапқы шарттары бірдей болатын сызықтық есеп арасындағы айырым келесі теңсіздікті қанағаттандыруы керек:

$$\|i \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} (|u|^2 u)(x, t') dt'\|_{H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2(r+\delta)}dx)} \leq C(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)}) \quad (3)$$

Бұл бағалаулар Бона Л., Коррея С. жұмыстарында классикалық Соболев кеңістіктері үшін көрсетілген, біз салмақтық Соболев кеңістігін қарастырамыз.

Теорема 1. *Кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін $\frac{1}{4} < s$, $0 < r \leq s$ болсын. (1) бастапқы шарты бар теңдеудің шешімін $u \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)$, ал $u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)$ деп алсақ. Онда:*

$$I \in C([0, T]; H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2(r+\delta)}dx)), \quad (4)$$

мұндағы

$$0 < \delta < \min \left\{ s - r + \varepsilon, r \right\}. \quad (5)$$

Бұл (2) формуладағы сызықты емес интегралды бөлігінің сызықтық бөлікке қарағанда ε мәнге тегістігі жоғары екенін білдіреді.

Дюамель формуласына негізделген интегралдық тәсіл арқылы кубтық Шрёдингер теңдеуінің шешімінің тегістігі салмақтық $H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2(r+\delta)})$ Соболев кеңістігінде зерттелді. Алынған нәтижелер жаңа болып табылады. Сонымен қатар бұл нәтижелер дисперсиялық теңдеулерге қойылған Коши есептерін зерттеуге үлес қосып отыр.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (AP23489433 «Математический анализ нелинейных k -обобщенных уравнений Кортевега-де Фриза в весовых дробных пространствах Соболева») қаржыландырады.

Кілтті сөздер: тегістік, Шрёдингер теңдеуі, сызықты емес теңдеу, Соболев кеңістігі.

2020 Mathematics Subject Classification: 35B65, 46E35, 35A02

ӘДЕБИЕТ

- [1] S. Correia, J. Drumond *Nonlinear smoothing for dispersive PDE: A unified approach*, J. Differ. Equ, (2020).
- [2] J. L. Bona, G. Ponce, J.-C. Saut, C. Sparbera *Dispersive blow-up for nonlinear Schrödinger equations revisited*, J. Math. Pures Appl, (2014), 782–811.

RIS ТЕХНОЛОГИЯСЫ НЕГІЗІНДЕ АДАПТИВТІ СӘУЛЕНІ ҚАЛЫПТАСТЫРУДА МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУДЫ ҚОЛДАНУ

Н.Қ. СМАЙЛОВ¹, А.А. АБДЫҚАДЫРОВ², Ж.М. ДОСБАЕВ³, С. МАРКСҰЛЫ⁴

^{1,2}Ұлттық ғылыми-технологиялық орталық, Алматы, Қазақстан

³Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

zhandosbayev@gmail.com

Қазіргі сымсыз байланыс жүйелерінде жоғары деректер жылдамдығы, энергия тиімділігі және қауіпсіздік талаптары бір мезетте күшейіп келеді. Бұл үрдіс IoT құрылғыларының, деректерге бай қосымшалардың, сондай-ақ виртуалды/кеңейтілген шындық, автономды көлік және «ақылды қала» сценарийлерінің кең таралуымен байланысты. 6G желілеріне тән мақсат — байланыс пен зондтауды (sensing) бір ортақ инфрақұрылымда үйлестіріп, спектрді барынша үнемдеу және орта туралы нақты ақпарат алу. Осы контексте интеграцияланған зондтау және байланыс (ISAC) парадигмасы, толық дуплексті (FD) байланыс және физикалық деңгейдегі қауіпсіздік (PLS) негізгі кандидат бағыттар ретінде қарастырылады.

Реконфигурацияланатын интеллектуалды беттер (RIS) — таралу ортасын «бағдарламаланатын» етуге мүмкіндік беретін метабет технологиясы. RIS элементтері шағылдыру фазасын (және кейде амплитудасын) басқару арқылы сигналды қажетті нүктеге когерентті жинақтап, көлеңкелі аймақтардағы жабуды арттырады. Дегенмен, нақты уақыттағы бейімделу үшін RIS параметрлерін, көпантенналық сәуле қалыптастыруды және FD режиміндегі өзіндік кедергіні (self-interference, SI) басуды бірлесіп оңтайландыру қажет. Бұл міндеттердің күрделілігі классикалық оптимизациямен ғана толық шешілмейді, сондықтан машиналық оқыту (ML) ерекше өзектілікке ие.

Негізгі мақсат — RIS-ке сүйенген адаптивті сәулені қалыптастыруды ML арқылы іске асырып, FD-ISAC желісінің өнімділігін (өткізу қабілеті, зондтау дәлдігі, спектр және энергия тиімділігі) және қауіпсіздігін арттыру. Жоба RIS-ті бөлшектеп орналастыру (RIS splitting) және бірнеше RIS блоктарын қолдану арқылы кеңістіктік еркіндік дәрежесін көбейтіп, байланыс сапасын көтеру, зондтау радиусын кеңейту және рұқсатсыз пайдаланушыларды басу (jamming) арқылы қорғанысты күшейтуге бағытталған.

ML негізіндегі адаптивті сәулені қалыптастыруды үш құрамдасқа бөлуге болады:

Біріншісі — канал күйін бағалау және қоршаған ортаны сипаттау. FD режимінде SI қалдығы және кедергілер болғандықтан, дәстүрлі пилоттық бағалау дәлдігі төмендеуі мүмкін. Бұл

жерде бақыланатын оқыту көмегімен арнаның параметрлерін бағалайтын CNN/Transformer архитектуралары, ал белгісіз ортада кластерлеу сияқты бақыланбайтын әдістер пайдалы. Уақытша корреляцияны ескеретін RNN/LSTM модельдері каналдың келесі күйін болжауға мүмкіндік беріп, RIS конфигурациясын алдын ала дайындауға жағдай жасайды.

Екіншісі — бірлескен оптимизация және басқару: (i) базалық станцияның көпантенналық сәуле векторлары, (ii) RIS элементтерінің фазалық матрицасы, (iii) FD параметрлері (SI басу сүзгілері, қуат бөлу). Нысаналы функция көпмақсатты болуы мүмкін: байланыс үшін суммарлық жылдамдық/SE, зондтау үшін өлшеу қателігі, ал қосымша ретінде энергия шығыны және аппараттық шектеулер (фаза квантталуы, қуат шегі). Мұндай есептер көптапсырмалы оқыту (MTL) немесе салмақталған шығын функциялары арқылы теңгеріледі.

Үшіншісі — нақты уақыттағы бейімделу үшін нығайтпалы оқыту (RL). RIS және FD параметрлерін әр уақыт қадамында өзгерту агенттің әрекеті ретінде қарастырылып, марапат жүйелік метрикамен анықталады. Үлкен әрекет кеңістігі үшін deep RL (DDPG, PPO, SAC) қолайлы; көп RIS блоктары немесе көппайдаланушы ортада көпагентті RL (MARL) масштабталуды жақсартады.

Қауіпсіздік тұрғысынан PLS қағидаттары RIS және FD мүмкіндіктерімен үйлеседі: RIS шағылдыру диаграммасын заңды қабылдағышқа бағыттап, тыңшы түйіндерге келетін сигналды әлсірете алады; ал қажет болса жасанды шу немесе бағытталған кедергі құру арқылы құпиялылық жылдамдығын арттыруға болады. ML шабуылдарды/аномалияларды анықтау (автоэнкодер, біркласс әдістер, GAN) және қауіпсіз сәуле қалыптастыру саясатын үйрету үшін қолданылады. Федеративті оқыту желі түйіндері арасында деректерді ашпай модельді бірлесіп үйретуге мүмкіндік береді.

Күтілетін нәтижелер: (1) RIS қолдайтын FD-ISAC жүйесіне арналған біртұтас аналитикалық модель және негізгі метрикалардың байланысын шығару; (2) канал бағалау/болжау, бірлескен сәуле қалыптастыру және қауіпсіздік басқаруы үшін ML мен классикалық оптимизацияны үйлестіретін гибриді алгоритмдер; (3) прототиптік платформада ұсынылған әдістерді өлшеп, имитация нәтижелерімен салыстыру. Бұл бағыттар 6G талаптарына сай жоғары өнімді, энергия-үнемді және қауіпсіз желілерді құруға негіз болады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің қаржыландыруымен орындалады (№ AP26104957, BR31715767).

Кілт сөздер: RIS, ISAC, толық дуплекс, адаптивті сәуле қалыптастыру, машиналық оқыту, нығайтпалы оқыту, физикалық деңгейдегі қауіпсіздік.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T05, 94A12, 90C26

О СИСТЕМЕ МОНИТОРИНГА ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ НА АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГАХ КАЗАХСТАНА

Е.Е. АЙТБАЕВ

Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова

No e-mail

Автомобильная дорога должна обеспечить круглосуточное бесперебойное движение транспортных средств в течение всего срока службы. Главными конструктивными элементами автомобильной дороги являются дорожная одежда и земляное полотно, которые подвержены многократным (миллионным, миллиардным) механическим воздействиям транспортных средств и изменчивых климатических и гидрологических факторов. Из числа последних температура играет важную роль в обеспечении проектного срока службы автомобильной дороги. Так, в зависимости от температуры в очень широких пределах изменяются механические и реологические свойства асфальтобетонов и других дорожных материалов, содержащих битумы. Температура определяет агрегатное состояние влаги (вода или лед) в порах грунта земляного

полотна. При отрицательных температурах часть влаги в порах грунта переходит из жидкого состояния (вода) в твердое состояние (лед) с выделением теплоты.

Температура является одним из ключевых характеристик, определяющих прочность и долговечность автомобильной дороги. Это требует знания закономерностей изменения температуры во времени в дорожной одежде и земляном полотне. Также необходимо знать влияние температуры на распределение влажности в земляном полотне в разные моменты времени с учетом фазовых переходов.

Таким образом, актуальным является проведение долгосрочного мониторинга температуры и влажности в конструкциях дорожных покрытий и дорожной одежды и их корректная интерпретация (обработка) с установлением важных закономерностей и показателей.

В данной работе представлены работы по установке (3 комплекса) автоматизированной системы мониторинга температуры и влажности (не менее 10 точек, включая место измерения температуры и влажности) для городов Алматы и Шымкент.

Данная система мониторинга используется на дорожной сети Казахстана и представляет собой специализированную систему. Она осуществляет автоматизированный сбор параметров водно-теплого режима дорожной конструкции на стационарных контрольных точках с передачей и консолидацией данных в центре мониторинга.

Полная комплектация автоматизированной системы мониторинга температуры и влажности в дорожной одежде и грунтовой основе автомобильных дорог г. Алматы представлена на рис. 1.

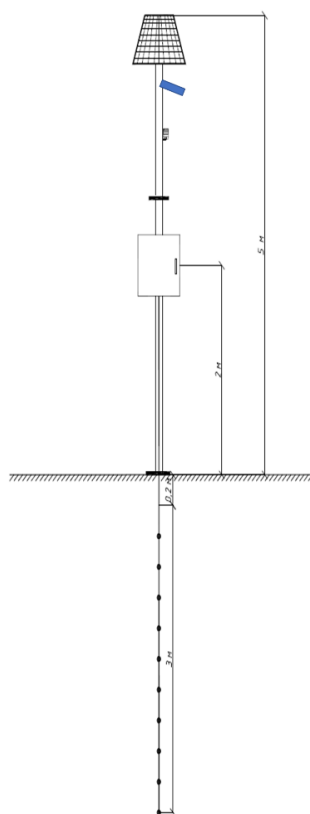


Рис. 1: Комплектация и схема расположения элементов комплекса

- Регистратор данных RSM rev.1 – 1 шт.
- Датчик грунта – 10 шт (длина кабеля 15 м).
- Датчик температуры – 1 шт (длина кабеля 5 м).

- Лазерный датчик температуры поверхности покрытия – 1 шт.
- Солнечные панели 30W – 3 шт.
- Комплект независимого, перезаряжаемого от солнечных панелей, источника питания (12Ач).
- Мачта для монтажа оборудования 5м.
- Аппаратный шкаф

Перед непосредственным использованием каждого комплекта датчиков проводились калибровки датчиков температуры и влажности, что показывает необходимость введения корреляционных уравнений и коэффициентов в программное обеспечение оборудования измерительных систем.

Данная работа имеет большое практическое значение для дорожной отрасли. Для решения этих задач и вопросов мониторинг водно-теплового режима на участках автомобильных дорог должен быть непрерывным. В связи с этим планируется провести многолетнюю комплексную обработку накопленной в базе данных информации о температуре и влажности дорожной одежды и дорожного покрытия. На ее основе можно будет разработать рекомендации для создания нового документа по дорожно-климатическому районированию Республики Казахстан.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ЛИНЕЙНОМ N-ЗВЕННОМ ТЕПЛОВОМ ГРАФЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ И СВЯЗАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Л.А АЛЕКСЕЕВА¹, Н.Ж. АЙНАКЕЕВА²

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

^{1,2}Институт механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова, Алматы,
Казахстан

^{2,3}Narxoz University, Алматы, Казахстан

¹alexeeva@math.kz, ²ainakeyevanursaule@gmail.com

С развитием машиностроения стали активно применяться сложные многосвязные стержневые конструкции, работающие в различных термических условиях. Они широко используются в строительной механике, машиностроении, робототехнике и многих других областях. Актуальной научно-технической задачей является исследование теплового состояния сетевых систем различного назначения при динамических и термических воздействиях с учётом их термоупругих свойств при динамических и термических воздействиях, в том числе видов воздействия. Это необходимо для анализа прочности и надёжности конструкций таких объектов, определения безопасных режимов эксплуатации и предотвращения катастроф. Математическое моделирование термодинамики стержневых конструкций и создание на его основе информационных технологий является одним из наиболее эффективных и недорогих методов исследования и проектирования таких систем.

Ранее авторами рассматривались решения краевых задач теплопроводности и термоупругости на звездном графе с одной узловой точкой. Здесь рассматриваются краевые задачи теплопроводности на линейном графе, состоящем из N последовательно соединённых звеньев с различными тепловыми параметрами с N-1 узловыми точками [1-4]. На основе Метода Обобщённых Функций и преобразования Фурье по времени разработана унифицированная методика решения краевых задач теплопроводности, типичных для технических приложений. Построены обобщённые решения нестационарных и стационарных краевых задач при различных граничных условиях на концах графа, как локальных, заданных на каждом конце графа, так

и связанных с температурой и тепловыми потоками на обоих концах. В аналитическом виде получены регулярные интегральные представления решений краевых задач.

Полученные решения позволяют моделировать источники тепла различного типа, в том числе с использованием сингулярных обобщённых функций и исследовать их воздействие на тепловое состояние всего графа. Представлены результаты численных экспериментов задач стационарных колебаний на двухзвенных и трехзвенных тепловых графах при разных краевых условиях. Исследовано влияние частоты колебаний и тепловых параметров графа на его температуру в любом элементе графа.

Разработанный метод исследования теплового состояния многозвенных стержневых конструкций можно использовать при проектировании опор зданий, мостов, тепловых магистралей и должен найти широкое применение в будущем.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488145 - Моделирование тепловых и волновых процессов в термоупругих стержневых конструкциях на графах, № BR31715767).

Ключевые слова: линейный граф, уравнение теплопроводности, краевые задачи, локальные и связанные граничные условия, метод обобщенных функций.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35K05, 35L05, 94C15

BIBLIOGRAPHY

- [1] Alexeyeva L.A., Prikazchikov D.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Solution of boundary value problems for a thermal star graph by generalized functions method, *Journal*, **2**:118 (2025), 4–15.
- [2] Ainakeyeva N.Zh., Alexeyeva L.A., Prikazchikov D.A. Dirichlet and Neumann problems for the heat equation on linear multilink thermal graphs and their solutions, *Kazakh Mathematical Journal*, **1**:25 (2025), 28–42.
- [3] Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Periodic boundary value problems on thermoelastic star graphs and their solutions by use general function method, *Acceloron aerospace journal*, **3**:6 (2025), 2–4.
- [4] Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. *Dirichlet problem on a stellar thermoelastic graph and its solution*, 14th AIMS Conference, Abu-Dabi (2024).

ВИБРОТРАНСПОРТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И ДИРАКА В БИКВАТЕРНИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРИ ДОСВЕТОВЫХ СКОРОСТЯХ И ИХ СВОЙСТВА

Л.А. АЛЕКСЕЕВА¹, Г.Н. АЗИЗ²

^{1,2}Институт механики и машиноведения им. Академика У. А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

¹alexeeva@math.kz, ²azizgulfariza@gmail.com

Основополагающими в квантовой теории поля и электродинамике являются уравнения Максвелла и Дирака. Построению и исследованию решений этих уравнений и краевых задач, начиная со второй половины XIX века, посвящены работы многих ученых. Эти уравнения допускают бикватернионные представления, что отмечено многими авторами: Acevedo M., De Leo S., Finkelstein D, Rodrigues W. A., Ефремов А.П., Марчук Н.Г. и др. Фундаментальные и обобщённые решения биволновых уравнений и краевых задач для них, которые содержат бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака построены в работах [1–3].

Среди действующих источников излучения ЭМ волн наиболее распространёнными являются подвижные источники колебаний, расположенные на платформах различных транспортных средств. Очевидно, что скорость их движения существенно влияет на процессы распространения ЭМ волн в средах с различной электрической проводимостью и магнитной проницаемостью, как и форма самого источника и характер его работы. Исследования в этом

направлении не столь многочисленны и связаны с определённым видом источника излучения. Транспортные решения этих уравнений при досветовых скоростях движения источника излучения построены в [4].

Здесь построены фундаментальные и регулярные досветовые вибротранспортные решения этих уравнений с учётом частоты колебания излучения. Построена бифункция Грина, описывающая поле сосредоточенного в точке источника, который движется с постоянной скоростью и колеблется с фиксированной частотой. На их основе построены общие решения вибротранспортного биволнового уравнения при действии как пространственно распределённых движущихся источников вибраций, так и сосредоточенных на движущихся поверхностях и линиях.

Построенные решения должны найти применение в теоретической физике, физике элементарных частиц, радиотехнике, электронике.

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP23488145).

Ключевые слова: бикватернион, биволновое уравнение, число Маха, частота колебаний, бифункция Грина, преобразование Фурье, бикватернионная свертка.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q40, 35Q53, 35Q60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions, in *Progress in analysis*, Proceedings of the 8th Congress of ISAAC (Moscow, Aug 22–27, 2011), pp. 153–161, 2013.

[2] Alexeyeva L.A. Biquaternionic Wave Equations and the Properties of Their Generalized Solutions, *Differential Equations*, vol. 57, no. 5, pp. 594–604, 2021.

DOI: 10.1134/S0012266121050049

[3] Alexeyeva L.A. Generalized Solutions of Stationary Boundary Value Problems for Biwave Equations, *Differential Equations*, vol. 58, no. 4, pp. 475–487, 2022. DOI: 10.1134/S0012266122040048

[4] Alexeyeva L.A., Aziz G.N. Transport solutions for biquaternion generalizations of Dirac and Maxwell equations at subluminal speeds and their properties, *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 225, no. 2, pp. 1981–1986, 2025.

DOI: 10.1134/S0040577925110078

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Т.Р. АМАНБАЕВ¹, Г.Е. ТИЛЕУОВ², Н.А. АБДУСАЛИЕВ³, Б.Е. АЙДАУЛЕТ⁴

^{1,2,3,4}ЮКУ им. М.О. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

В различных областях химической технологии и современной техники широко распространены дисперсные смеси (суспензии, эмульсии, газовзвеси и т. п.), что обуславливает актуальность изучения течений таких сред. Особый интерес представляет анализ поведения дисперсных частиц (капель) в пограничном слое вблизи твердых стенок (в том числе проницаемых), где может происходить осаждение твердой (жидкой) фазы и образование осадка (жидкой пленки) на них. Для управления течением в пограничном слое чаще всего используют отсос и вдув жидкости (газа) через поверхность. В связи с этим важно изучить влияние этих факторов на характер течения дисперсной смеси в пограничном слое.

В данной работе изучено влияние отсоса и вдува жидкости с поверхности проницаемого тела, обтекаемого дисперсным потоком, на диффузионный перенос и распределение броуновских частиц в пограничном слое. Сформулирована краевая задача в автомодельных переменных,

которая решена численным методом пристрелки в широком диапазоне изменения определяющих параметров. Проведен анализ уравнения диффузии при больших числах Шмидта Sc , и показано, что распределение концентрации частиц асимптотически стремится к скачкообразному (ступеньчатому) профилю, а распределение диффузионного потока — к дельта-функции Дирака. Изучена зависимость коэффициента осаждения частиц от числа Sc , и установлено, что в случае вдува он достигает максимума при некотором конечном значении Sc , а при отсосе монотонно возрастает с ростом Sc .

Полученные результаты могут быть полезны при изучении проблемы взаимодействия дисперсных сред с обтекаемыми поверхностями, анализе вопросов управления течением дисперсных смесей в пограничном слое вблизи поверхностей (например, при управлении тепло- и массообменными потоками в пограничном слое) и т. п. В частности, эффект появления зоны без частиц можно учитывать на практике с целью предотвращения осаждения частиц на обтекаемую поверхность.

РАЗРАБОТКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ОДНОМЕРНОЙ МЕТОДИКИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ЦЕНТРОБЕЖНЫХ КОНСОЛЬНЫХ НАСОСОВ ТИПА СНР ДЛЯ ПЕРЕКАЧИВАНИЯ МОРСКОЙ ВОДЫ

Т.Е. АМАНЖОЛОВ¹, А. ЭЛИУЛЫ², А.Н. СЕЙТОВ³, Е. АЯЗБАЙ⁴,
А. КАЛТАЕВ⁵

tannur.amanzholov@gmail.com

Проектирование насосного оборудования для систем водоснабжения и теплоэнергетики требует создания воспроизводимого подхода к гидравлическому расчету. Существующие эмпирические зависимости ориентированы на усредненные условия и чистую воду, не учитывая в полной мере специфику перекачивания морской воды — повышенную плотность, минерализацию и риск эрозии. Применение классических методик к насосам для агрессивных сред часто приводит к критическому занижению проходных сечений проточной части.

Разработать модифицированную методику расчета для определения основных геометрических и кинематических параметров центробежных консольных насосов типа СНР (на примере базовой ступени СНР 150–315/1500), обеспечивающую оптимизацию по критериям энергосбережения, кавитационной стойкости и ресурса.

В ходе работы проведен гидродинамический анализ параметров центробежного насоса СНР 150-315/1500. Для разработки модифицированной методики был интегрирован комплекс передовых полуэмпирических и теоретических подходов: диаграмма Кордье для определения D_s , теория Пфлейдерера для расчета коэффициента скольжения и угла β_2 , моделирование потерь по Гюлиху, а также метод отношения площадей Андерсона для спиральной камеры. Базовые данные и верификация одномерного расчета опираются на результаты CFD-моделирования (RANS) [1].

Сопоставление эталонной геометрии с пятью одномерными методами (Gulich, Ивановский, Спиридонов, Karassik, Cordier) выявило существенные расхождения: 1) *Безразмерные коэффициенты*: При фактическом $\psi \approx 0.485$, по коэффициенту расхода φ все классические методики дают завышение в 1,7 – 2,3 раза (от +71,4% до +123%). 2) *Диаметры колеса*: По наружному диаметру D_2 методы Gulich и Karassik достаточно точны (отклонения –1,5% и –6,1%), тогда как остальные занижают его на 10 – 17%. Входной диаметр D_1 во всех типовых расчетах переоценен на 20 – 50% (до +57,1% у Gulich). 3) *Ширина каналов*: Ширина проточной части на выходе b_2 критически недооценивается классическими школами на 30 – 45%. 4) *Углы лопаток*: Международные подходы (Gulich, Karassik) формируют излишне загнутые назад лопатки (отклонения по β_2 до –44,8%), тогда как методики Ивановского и Спиридонова дают меньшую погрешность (от –7% до +12%). В итоге, среднее модульное отклонение геометрических параметров для классических методов варьируется от 17,8% до 39,8%.

В модифицированной методике зафиксирован $\psi_{mod} = 0.48$ и принят пониженный $\phi_{mod} \approx 0.085$, что позволило расширить межлопаточный канал. Это сокращает максимальное относительное отклонение по ключевым размерам до 6,3%, а среднее модульное отклонение — до 1,9%. Для номинального режима получены расчетные размеры $D_2 = 325,6$ мм, $b_2 = 37,5$ мм. Отношение диаметров задано как $D_1/D_2 \approx 0.41$. Доказано, что для работы на морской воде ширина b_3 и площадь сечения A_{360} должны превышать классические расчеты на 25–50%. Это предотвращает превышение критической скорости эрозии (> 6 м/с), удерживая среднюю скорость потока на безопасном уровне 1,5–2,0 м/с и обеспечивая локальный КПД узла 99,6–99,7%. Оптимальный радиальный зазор в зоне языка определен как $\delta = 0,04–0,045D_2$. Оценка чувствительности для трех режимов ($Q = 200, 300, 400$ м³/ч при $H = 20, 32, 40$ м) подтвердила стабильность методики. Установлено, что гидравлическая мощность при этом возрастает в 4 раза (с 11,17 до 44,69 кВт). Входной угол β_1 демонстрирует высокую чувствительность, изменяясь от 16,15° до 11,57°, тогда как выходной угол β_2 остается стабильным ($\approx 10,3^\circ$).

Интеграция классических подходов в единый модифицированный расчетный алгоритм позволила преодолеть ограничения стандартных методик. Разработанная модель является надежным инструментом предварительного проектирования насосов для морской воды, обеспечивая отклонения от реальной геометрии менее 7% и формируя обоснованную базу для последующей CFD-оптимизации и испытаний.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR28713691).

Ключевые слова: центробежный насос, спиральная камера, морская вода, гидравлический расчет, диаграмма Кордье.

2020 Mathematics Subject Classification: 76D05, 76U05

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aliuly A., Amanzholov T., Seitov A., Momyshev N., Jaichibekov N. Hydraulic Design and CFD-Based Parametric Study for Optimizing Centrifugal Pump Impeller Performance, *Applied Sciences*, 14:22 (2024), 10161.
- [2] Gülich J. F. *Centrifugal Pumps*, Springer, Cham (2020).
- [3] Ивановский В. Н., Дарищев В. И., Сабиров А. А. и др. Оборудование для добычи нефти и газа, *Нефть и газ*, 1:1 (2002), 1–768.
- [4] Karassik I. J., Messina J. P., Cooper P., Heald C. C. *Pump Handbook*, McGraw-Hill Education, New York (2008).
- [5] Cordier O. Ähnlichkeitsbedingungen für Strömungsmaschinen, *VDI-Berichte*, 3 (1955), 85–88.
- [6] Pfeleiderer C. *Die Kreiselpumpen für Flüssigkeiten und Gase*, Springer, Berlin (1961).
- [7] Anderson H. H. *Centrifugal Pumps*, Trade & Technical Press, Morden (1980).

РАЗРАБОТКА И ВАЛИДАЦИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

А. ЭЛИУЛЫ¹, А.Н. СЕЙТОВ², Т.Е. АМАНЖОЛОВ³, Е. АЯЗБАЙ⁴,
А. КАЛТАЕВ⁵

КазННТУ имени К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

aliuly.abdurashid@gmail.com

Центробежные насосы широко применяются в энергетике, промышленности и системах водоснабжения. Эффективность их работы во многом определяется гидродинамическими процессами, происходящими в проточной части. Поток жидкости в межлопаточных каналах рабочего колеса обладает сложной трёхмерной структурой, характеризуется криволинейностью

траекторий, турбулентностью и наличием вторичных течений. В связи с этим для анализа характеристик насосов активно используются методы вычислительной гидродинамики (CFD).

Целью данной работы является разработка и валидация высокоточной гидродинамической модели турбулентного течения для центробежных насосов серии СНР и определение гидравлических характеристик промышленного насоса СНР 150–315 на основе численного моделирования.

Математическая постановка задачи основана на решении усреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS), описывающих движение несжимаемой вязкой жидкости. Уравнение неразрывности имеет вид

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

а уравнение импульса записывается как

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla \cdot \overline{u'u'} \quad (2)$$

Для замыкания системы уравнений использована модель турбулентности SST (Shear Stress Transport), обеспечивающая корректное описание пограничного слоя вблизи стенок и зон возможного отрыва потока.

В качестве объекта исследования выбран центробежный консольный насос СНР 150–315. Расчётная область включала входной патрубок, рабочее колесо, спиральный корпус (улитку) и выходной патрубок. Рабочее колесо моделировалось как вращающаяся область, тогда как остальные элементы проточной части рассматривались как стационарные. Взаимодействие между областями реализовано через интерфейс типа *Frozen Rotor*.

Для обеспечения высокой точности расчетов была сформирована вычислительная сетка общей размерностью около $3 \cdot 10^6$ элементов. Структурированная гексадерральная сетка использована для рабочего колеса, тогда как для улиточного корпуса применена гибридная тетраэдрально-призматическая сетка.

Численное моделирование выполнено в программном комплексе ANSYS CFX. На входе расчетной области задавалось давление, соответствующее кавитационному запасу $NPSH = 3$ м, а на выходе — массовый расход, соответствующий номинальной подаче $Q = 300$ м³/ч. На твердых стенках применялось условие прилипания.

По результатам моделирования получены интегральные гидравлические характеристики насоса. Расчётный напор составил около 34.14 м, мощность на валу — около 34.3 кВт, а коэффициент полезного действия — порядка 81.36%. Сравнение результатов численного моделирования с заводскими паспортными характеристиками и результатами стендовых испытаний показало удовлетворительное согласие основных гидравлических параметров насоса. Для оценки точности разработанной гидродинамической модели выполнено сопоставление расчетных значений напора, мощности и коэффициента полезного действия с имеющимися экспериментальными и заводскими данными (Таблица 1).

Таблица 1: Сводная таблица сравнения результатов

Параметр	Расчет (CFD)	Завод (fac)	Испытание (exp)	$\Delta(\text{CFD-fac})$	$\Delta(\text{CFD-exp})$
H , м	34.14	34.5	31.58	−1.0%	+7.5%
η , %	81.36	78	80.4	+4.1%	+1.2%
N , кВт	34.3	34	35.77	+0.9%	−4.3%

Анализ распределений давления и скорости подтвердил корректность структуры течения: наблюдается устойчивое ускорение потока в межлопаточных каналах, равномерное формирование напора и отсутствие крупных зон отрыва. Локальные вихревые структуры возникают в области выхода из рабочего колеса и в зоне язычка улитки, что соответствует классической гидродинамике центробежных насосов. Распределение статического давления и скорости внутри насоса показано на Рисунке 1.

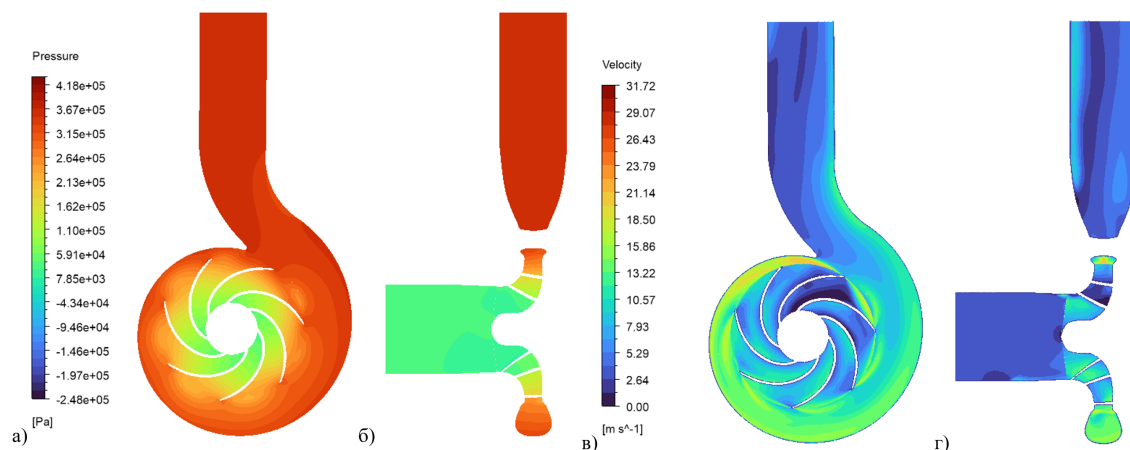


Рис. 1: Распределение статического давления (а, б) и контура скорости (в, г) внутри насоса: (а, в) в поперечном срезе; (б, г) в меридиональном срезе

Полученные результаты подтверждают корректность разработанной гидродинамической модели и её применимость для инженерного анализа, оптимизации геометрии проточной части и проектирования центробежных насосов серии СНР.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR28713691).

Ключевые слова: центробежный насос, гидродинамическое моделирование, вычислительная гидромеханика, моделирование турбулентности, анализ потока.

2020 Mathematics Subject Classification: 76F65, 76M10

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aliuly, A., Amanzholov, T., Seitov, A., Momys N., Jaichibekov, N., Kaltayev, A. Hydraulic Design and CFD - Based Parametric Study for Optimizing Centrifugal Pump Impeller Performance, *Applied Sciences Switzerland*, **14**:22 (2024), 10161.
- [2] Aliuly A., Seitov A., Kaltayev A. Hydrodynamic Modelling and Analysis of Single-Stage Single-Suction Centrifugal Pump, *Mechanisms and Machine Science*, **167**:MMS (2024), 381–389.
- [3] Momys N., Amanzholov, T., Jaichibekov, N., Aliuly, A., Seitov, A., Bazarlinov Zh., Kaltayev A. Hydraulic Calculation and Structural Design of the Single-Stage Centrifugal Pump Impeller, *Mechanisms and Machine Science*, **167**:MMS (2024), 361–378.
- [4] Menter F.R. Zonal Two Equation k- ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows, *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics and Lasers Conference, AIAA*, **93**:2906 (1993).
- [5] Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications, *AIAA Journal*, **38**:8 (1994), 1598–1605.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ В РАКЕТНОМ ДВИГАТЕЛЕ НА ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ

Ю.И. БАКИРОВА¹, А.О. БЕКЕТАЕВА²

¹Национальный центр космических исследований и технологий, Алматы, Казахстан

²Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

yulya.bakirova@gmail.com

Повышение энергетической эффективности современных ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ) неразрывно связано с использованием высокоэнергетических добавок, среди которых одной из наиболее распространенных является порошкообразный алюминий. Добавление алюминия позволяет существенно увеличить температуру продуктов сгорания, что

обеспечивает рост удельного импульса двигателя до 270–280 с [1]. Наряду с этим, наличие мелкодисперсной фазы способствует демпфированию высокочастотных акустических колебаний, возникающих в процессе горения, таким образом предотвращая возникновение критических пульсаций давления, угрожающих целостности конструкции двигателя [2].

Однако применение алюминия порождает ряд проблем, связанных с двухфазным характером течения и возникновением потерь удельного импульса вследствие динамической и термической неравновесности фаз. Кроме того, эффективность двигателя может ограничиваться фактом неполного сгорания металла, определяемым временем пребывания частиц в камере и задержкой воспламенения из-за наличия тугоплавкой оксидной пленки. Точный учет этих факторов необходим для адекватного предсказания энергетического баланса и минимизации потерь в РДТТ.

В работе предлагается модель горения алюминия, которая описывается как многостадийный процесс, учитывающий последовательную смену физико-химических превращений частицы (прогрев, плавление, испарение, горение в паровой фазе) [3–5]. Кинетика процесса включает в себя гетерогенные химические реакции (на поверхности частицы) и реакции в газовой фазе (от простых одностадийных до сложных). На основе разработанной модели горения одиночной частицы исследуется поведение всей дисперсной фазы в высокоскоростном газовом потоке.

Для численного исследования поставленных задач реализуется Эйлеров-Лагранжев подход с использованием метода двусторонней связи. Динамика несущей газовой фазы описывается отфильтрованными по пространству уравнениями Навье-Стокса, а для замыкания используется алгебраическая модель Смагоринского. Поведение дисперсной фазы, включая траектории, скорости и тепловое состояние частиц, моделируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений в Лагранжевой постановке. Численная реализация уравнений газовой фазы осуществляется с использованием схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory) третьего порядка аппроксимации [6, 7], позволяющей корректно описывать ударно-волновые процессы в камере сгорания. Система обыкновенных дифференциальных уравнений на этапе Лагранжа решается явным методом Эйлера второго порядка.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP32715385).

Ключевые слова: РДТТ, горение алюминия, Эйлеров-Лагранжев подход, ENO (Essentially Non-Oscillatory) схема.

2020 Mathematics Subject Classification: 80A30, 76F65

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yang V., Brill T. B., Ren W. Z. *Solid Propellant Chemistry, Combustion, and Motor Interior Ballistics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston (2000).
- [2] Fabignon Y., Dupays J., Avalon G. Instabilities and Pressure Oscillations in Solid Rocket Motors, *Aerospace Science and Technology*, **7**:3 (2003), 191–200.
- [3] Hu Z., Yang T., Xia Z. The Simulation of Different Combustion Stages of Micron-sized Aluminum Particles, *Applied Sciences*, **11**:4 (2021), Art. 1774.
- [4] Шишкин В. В. Моделирование зажигания капли алюминия при высоких давлениях, *Физика горения и взрыва*, **48**:4 (2012), 54–62.
- [5] Jackson T. L., Najjar F., Buckmaster J. New Aluminum Agglomeration Models and Their Use in Solid-Propellant-Rocket Simulations, *Journal of Propulsion and Power*, **21**:5 (2005), 925–936.
- [6] Bruel P., Naimanova A. Zh. Computation of the Normal Injection of a Hydrogen Jet into a Supersonic Air Flow, *Journal of Propulsion and Power*, **17**:4 (2010), 531–541.
- [7] Beketaeva A.O., Bruel P., Naimanova A. Zh. Detailed Comparative Analysis of Interaction of a Supersonic Flow with a Transverse Gas Jet at High Pressure Ratios, *Technical Physics*, **64**:10 (2019), 1430–1440.

О КОЛЕБАНИЯХ РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ НА ВИБРООПОРАХ КАЧЕНИЯ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

К. БИСЕМБАЕВ¹, Т. ДИКАМБАЙ²

¹Института механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

²Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы,
Казахстан

kuat_06@mail.ru

Исследования колебаний жидкости в резервуарах цилиндрической формы представляют большой интерес в связи с необходимостью решения комплекса проблем, связанных со строительством и эксплуатацией конструкций, имеющих в своем составе цилиндрические емкости с жидкостью. Они также постоянно стимулируются запросами авиационной, морской, ракетной и космической техники, а также ужесточением требований к проектированию таких гражданских объектов как наземные хранилища экологически небезопасных жидкостей, морских платформ и водонапорных башен, построенных в сейсмически опасных районах.

В работе приводятся решения задач о движении жидкости в частично заполненных резервуарах цилиндрической формы на опорах качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка.

Рассмотрим принцип работы кинематического фундамента, опорными элементами которого являются опоры качения, ограниченные поверхностями вращения высокого порядка. Модель кинематического фундамента показана в рисунке 1. Тело I — опора качения, ограниченная снизу и сверху поверхностями вращения, выраженными соответственно формулами

$$y_1 = a_1 x_1^n, \quad y_2 = a_2 x_2^m,$$

и имеющими общую ось симметрии (рисунок 1), а тела 2 и 3 являются стационарными основаниями (фундаментом) и нижним покрытием виброзащищаемого объекта. Специфика такой опоры заключается в том, что радиус кривизны в окрестности центральных опорных точек стремится к бесконечности и уменьшается по мере удаления от оси симметрии, т.е. имеет место спрямление опорных поверхностей в окрестности центральной точки. При стремлении n к бесконечности $n \rightarrow \infty$ опора качения примет цилиндрическую форму (рисунок 2).

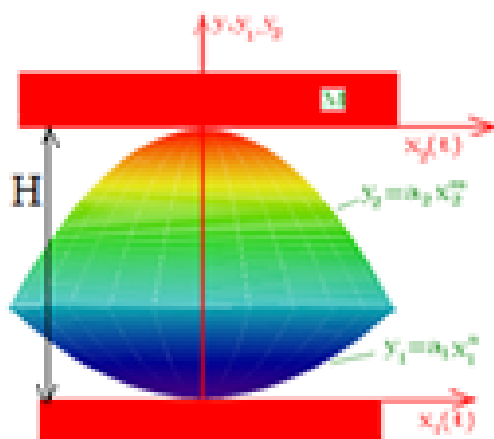


Рис. 1: Схема опоры качения с опорными поверхностями высокого порядка

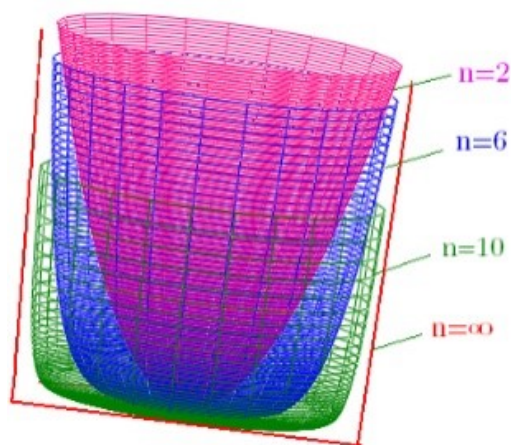


Рис. 2: Форма опоры качения с несущей поверхностью высокого порядка

Для опор качения, несущие элементы которых ограничены поверхностями вращения более высокого порядка, это условие существенно усложняется. Устойчивость движения оказывает-

ся зависимой как от конструктивных параметров, так и от начальных условий. В системах восстанавливающая сила возникает за счет увеличения потенциальной энергии при поднятии тяжести опор или опор и виброзащищаемого объекта.

Горизонтальное смещение основания обозначено $u_0(t)$. Через $u_1(t)$ обозначим смещение нижнего основания резервуара с жидкостью, опирающегося на опору качения.

Динамику резервуара с жидкостью сейсмоизоляция, которого обеспечена опорами качения со спрямленными поверхностями, изучим на следующей механической модели.

Пусть некоторые несущие тела имеют своей верхней границей плоскую поверхность и совершает поступательное движение. Будем считать, что по поверхностям тела перекачиваются тела носители (опора качения со спрямленными поверхностями) заданной конфигурации, поддерживая носимое тело (резервуар с жидкостью) большой массы.

Поверхности тел-носителей контактируют с поверхностями в нижнем плоском основании носимого тела (Рисунок 3).

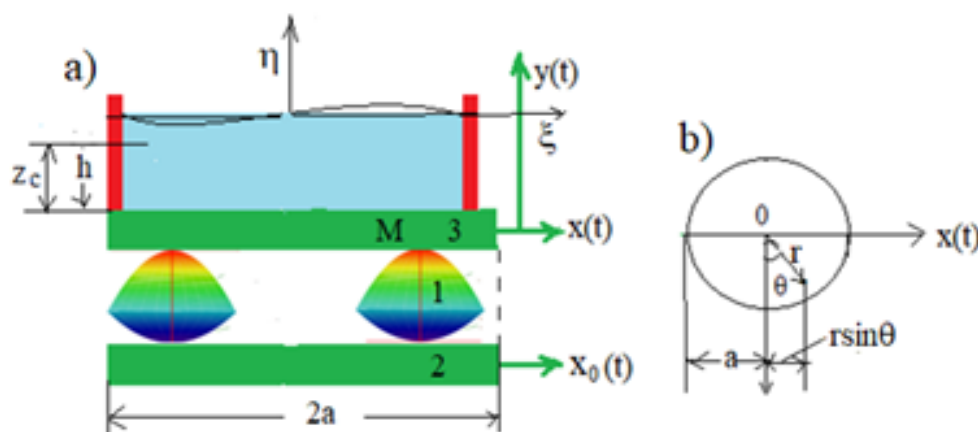


Рис. 3: а) Расположение осей

б) Обозначения для круглого резервуара

Схема колебания резервуара с жидкостью на опорах качения с подвижными основаниями

Тела-носители считаются одинаковыми и перед началом движения одинаково ориентированы в пространстве.

Динамику описанной выше механической системы изучим, сделав следующие предположения:

1. Массой опорных элементов можно пренебречь по сравнению с массой носимого тела, т.е. тела-носители определяют кинематику системы, но не обладают инерцией.
2. При качении опорных элементов по поверхностям несущего тела и носимого тела проскальзывание отсутствует.
3. Опорные элементы являются абсолютно твердыми телами.
4. Резервуар представляет собой абсолютно жесткое тело с недеформируемым контуром. Это допущение является вполне оправданным, так как резервуар имеет большую пространственную жесткость.
5. Жидкость, заполняющая резервуар, будем считать несжимаемой, идеальной, в которой затухание отсутствует.
6. Рассматриваем только горизонтальное движение резервуара.

Колебательная система, описанная выше, является механической моделью системы сейсмоизоляции резервуара наполненной жидкостью с помощью опора качения, ограниченных

поверхностями вращения высокого порядка. Колебательное движение этой механической модели возникает вследствие взаимодействия сил инерции резервуара с жидкостью, сил тяжести, а также сил трения качения и внешнего воздействия.

Проведено исследование динамики резервуара частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями с тяжелым основанием при свободном колебании. При расчете определены силы гидродинамического давления жидкости на стенки сосуда, образующие совместно с гидростатическими силами систему внешних сил.

Ключевые слова: колебания жидкости, резервуар, опоры качения, спрямленные поверхности, поверхности вращения высокого порядка, сейсмоизоляция, гидродинамическое давление.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГОМОГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Д.М. ДИАРОВА¹, Е.В. ИХСАНОВ²

¹Атырауский университет нефти и газа имени Сафи Утебаева, г. Атырау,
Республика Казахстан

²Атырауский университет имени Халела Досмухамедова, г. Атырау, Республика
Казахстан

¹D.Diarova@aogu.edu.kz, ²atyrau@aigi.kz

В работах [1-4] доказано существование гомографических решений в плоской системе взаимно притягивающихся $(n+1)$ -тел с центральной массой m_0 и n массами m_i ($i = \overline{1, n}$), которые находятся в вершинах правильных многоугольников. Вокруг центрального тела P_0 с постоянной угловой скоростью ω вращаются тела P_i ($i = \overline{1, n}$). Их координаты не изменяются в плоскости, равномерно вращающейся относительно некоторой неподвижной системы координат P_0xyz с началом в точке P_0 .

Рассматривается ограниченная ньютонова задача $(n+2)$ -тел. Движение тела P с бесконечно малой массой в ньютоновом гравитационном поле данных $(n+1)$ -тел описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2x + 2\omega\frac{dy}{dt} - \frac{fm_0x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x-x_i)m_i}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2y - 2\omega\frac{dx}{dt} - \frac{fm_0y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y-y_i)m_i}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{fm_0z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{zm_i}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (1)$$

Нахождение стационарных решений этой системы дифференциальных уравнений сводится к решению системы алгебраических уравнений, из-за нелинейности которой невозможно найти решение в аналитическом виде.

В данной работе с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica было построено графическое решение и найдены координаты точек равновесия с произвольной точностью. Проведено исследование устойчивости по Ляпунову найденных решений [3]. Такое качественное исследование возможно только методом Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ-теория) [3]. Для применения теоремы Арнольда-Мозера была выполнена нормализация гамильтониана по Биркгофу в окрестности положения равновесия и найдены значения геометрических и динамических параметров модели. Было доказано, что стационарные решения задачи являются устойчивыми не только в первом приближении, но и по Ляпунову.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иксанов Е.В. *Исследование устойчивости стационарных решений ограниченных задач космической динамики*, ALIPRESS, Алматы (2025).
- [2] Диарова Д.М. *Гомографические решения ньютоновой проблемы многих тел*, РУДН, Москва (2013).
- [3] Гребеников Е.А. *Математические проблемы гомографической динамики*, РУДН, Москва (2011).
- [4] Земцова Н.И. Новые гомографические решения в ньютоновой проблеме многих тел, *Фундаментальные проблемы системной безопасности*, ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец (2014), 44–49.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРОГОСТИ

А.Б. ДЖАНМУЛДАЕВА¹, А.Ж. МАДЕЛХАНОВА², Ж.Т. ДЖАЛБИРОВА³,
Е.А. АБЖАНОВ⁴, Б.Д. ДЖАНМУЛДАЕВ⁵

¹Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева
^{2,3,4,5}Кызылординский университет им. Коркыт Ата

В настоящей работе исследуются частоты собственных колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины, находящейся под поверхностью, методом декомпозиции. Выводятся уравнения частот собственных колебаний при различных закреплениях по контуру. Показаны эффективность и сравнительная простота этого метода. Приводятся данные численного расчета при различных значениях параметров характеризующих материалы пластинки, верхнего слоя и основания.

Классические уравнения поперечного пластинки содержат производные не выше 4-го порядка, и в частности пластинки постоянной толщины, находящейся под поверхностью.

Ключевые слова: метод декомпозиции, модель Максвелла, интегродифференциальное уравнение, коэффициент Пуассона, постоянные Ламе, краевая задача, ряд Фурье, аппроксимирующие функции, система алгебраических уравнений, частотное уравнение.

Рассматривается интегродифференциальное уравнение

$$A_1 \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^4 W_{11}}{\partial t^4} + A_3 \Delta \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial t^2} + A_4 \Delta^2 W_{11} + P W_{11} = 0 \quad (1.1)$$

Полученное в работе [1], где W_{11} – поперечное смещение точек срединной плоскости $z = 0$, а операторы A_j и реакция основания P равны:

$$A_1 = \rho_1 M_1^{-1} h_1 + \rho_2 N_2^{-1} (h_0 - h_1)$$

$$A_2 = \frac{\rho_1^2 M_1^{-1} (N_1^{-1} + 3M_1^{-1}) h_1^3}{6} + \frac{\rho_2 N_2^{-1} (h_0 - h_1)^3}{6} + \rho_1 N_3^{-1} h_1^2 (h_0 - h_1)^2$$

$$A_3 = \frac{3 - 4M_2 N_2^{-1} (h_0 - h_1)^3}{6} - (2M_1 N_1^{-1} - 1) h_1^2 (h_0 - h_1)^2 - \rho_2 N_2^{-1} - \rho_1^3 M_1^{-1} N_1^{-1} h_1^3 / 3$$

$$A_4 = \frac{4(1 - M_1 N_1^{-1}) h_1^3}{3} - 2(1 - M_2 N_2^{-1}) (N_1^{-1} M_2) (h_0 - h_2)^3 / 3$$

$$P = S_2 \rho_1 M_1^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_1^2}{2} \rho_1 M_1^{-1} + 3N_1^{-1} \frac{\partial^3}{\partial t^3} - 4 \frac{\partial}{\partial t} \Delta + 2M_1 N_1^{-1} \rho_2 N_2^{-1} \frac{\partial^3}{\partial t^3} h_2 (h_0 - h_1)$$

а операторы N_1 и M_1 для модели Максвелла равны:

$$N_1 = \lambda_1 + 2\mu_1 E, \quad M_1 = \mu E$$

$$E = \zeta t - \frac{1}{\tau_0} t e^{t-\xi/\tau} \zeta(\xi) d\xi$$

$$N_2 = \lambda_2 + 2\mu_2, \quad M_2 = \mu_2$$

где λ_j, μ_j ($j = 1, 2, \dots$) – постоянные Ламе, τ – время релаксации.

Уравнение (1.1) эквивалентно дифференциальному уравнению:

$$D_0 \left(W_{11} + D_1 \frac{\partial W_{11}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} W_{11} + D_2 \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial W_{11}}{\partial t} + \frac{1}{\tau^2} W_{11} \right) = 0$$

Далее, с применением метода декомпозиции получены расчетные формулы, позволяющие определять частоты собственных колебаний прямоугольной вязкоупругой пластинки постоянной толщины, находящейся под поверхностью деформируемой среды, при различных условиях закрепления по контуру.

Показано, что полученные методом декомпозиции формулы для определения значений частот свободных поперечных колебаний пластинки постоянной толщины, находящейся под поверхностью деформируемой среды, удобны для практического использования.

В результате численного анализа частотного уравнения (3.9) выявлено, что действительные части корней, характеризующие затухание колебаний пластинки из-за наличия деформируемого основания, слабо зависят от параметра γ , но сильно зависят от параметра S_0 , связанного с параметрами деформируемого основания. А мнимые части или частоты собственных колебаний имеют сильную зависимость от γ и слабую зависимость от S_0 и h .

СИМУЛЯТОР ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТРОСОВОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РОБОТА ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ЛЮДЕЙ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ

А.А. ДЖОМАРТОВ¹, А.К. ТУЛЕШОВ², А.Е. АБДУРАИМОВ³, А.Н. КАМАЛ⁴

*Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, г. Алматы,
Казахстан*

legsert@mail.ru

В мире по меньшей мере сотни миллионов людей подвержены существенному сейсмическому риску катастрофического ущерба. Особенно остро эта проблема касается г. Алматы, последнее землетрясение весной 2024 года вызвало панику у людей и показало полную неготовность тому, как себя чувствовать и вести себя, когда происходит землетрясение. Землетрясения представляют собой опасность и риск для всех людей, и соответствующие знания и меры защиты необходимо знать всем.

В настоящее время в мире большое внимание уделяется проектированию симуляторов землетрясения для обучения поведения людей при землетрясении. Симулятор землетрясения — это устройство для имитации движения грунта при землетрясении, и предназначен для воспроизведения сейсмических волн по сейсмограммам произошедших землетрясений [1,2,3,4]. Внезапное землетрясение может повергнуть людей в состояние паники. Таким образом, необходимо обучать людей тому, как себя чувствовать и вести себя, когда происходит землетрясение. Для достижения адекватной реакции и правильных действий людей при землетрясении, необходимы проведения учений сотрудниками МЧС с применением симулятора землетрясения. В связи с этим, актуальной задачей является, создание симулятора землетрясения для обучения поведения людей при землетрясении.

На рисунке 1 показана схема конструкции симулятора землетрясения, построенная на основе ТПР (тросового параллельного робота) [5]. Подвижная платформа симулятора землетрясения приводится в движение на неподвижном основании четырьмя тросами, которые соединены с лебедками, которые приводятся в движение серводвигателями.

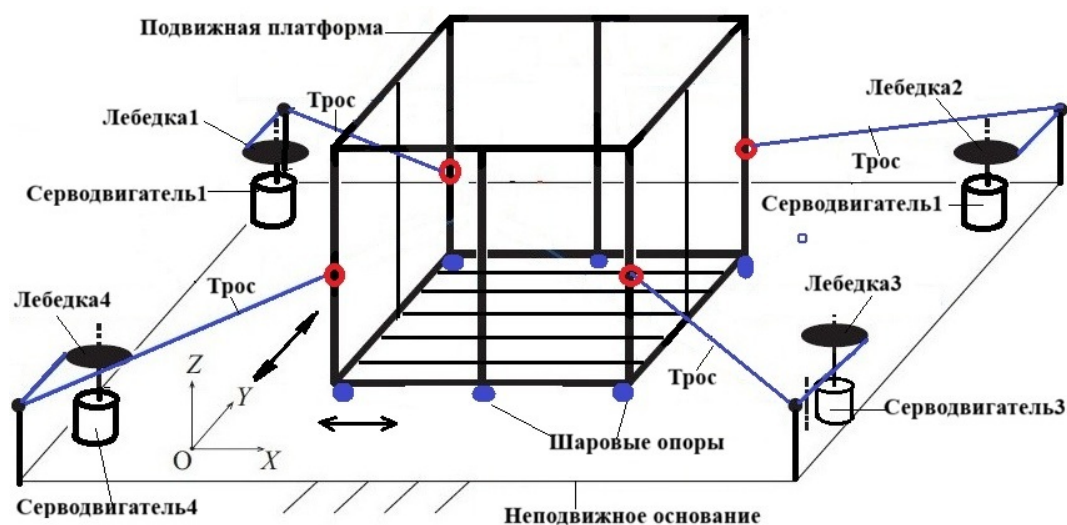


Рис. 1: Схема конструкции симулятора землетрясения на основе ТПР

В Институте механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова был изготовлен прототип симулятора землетрясения на основе ТПР [6], показанный на рисунке 2.



Рис. 2: Прототип симулятора землетрясения на основе ТПР

Разработан интерфейс программы для управления прототипом симулятора землетрясения основе плоского ТПР для воспроизведения заданной сейсмограммы землетрясения. Проведены экспериментальные исследования прототипа симулятора землетрясения основе ТПР, определены натяжения тросов при движении платформы по заданной циклограммы.

Выводы В работе разработан симулятор землетрясения на основе тросового параллельного робота, для обучения поведения людей при землетрясении. Спроектирован и изготовлен прототип симулятора землетрясения на основе ТПР. Проведены экспериментальные исследования прототипа симулятора землетрясения, которые подтвердили возможность воспроизведения им заданной сейсмограммы.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (BR31715767, AP26195455).

Ключевые слова: симулятор, тросовый параллельный робот, землетрясение, сейсмограмма.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wang, J., Gonzales, B., Milewski, A., Tepfenhart, W. Design and development of an Earthquake Disaster Simulator // Proc. IEEE Int. Conf. Systems Man and Cybernetics. 2010. P. 2557–2563. <https://doi.org/10.1109/ICSMC.2010.5641916>.
- [2] Takeuchi, L. Rescue Simulation and Its Road Map // Proc. Int. Conf. SICE. 2002. P. 1056–1061. <https://doi.org/10.1109/SICE.2002.1195422>.
- [3] Ohtani, K., Ogawa, N., Takayama, T., Shibata, H. Construction of E-DEFENSE (3-D full-scale earthquake testing facility) // Third tenth World Conference on Earthquake Engineering. 2001. No. 189.
- [4] Roh, S., et al. Development of the portable ground motion simulator of an earthquake // 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Tokyo, Japan. 2013. P. 5339–5344. <https://doi.org/10.1109/IROS.2013.6697129>.
- [5] Pott, A. *Cable-Driven Parallel Robots. Theory and Application*. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018.
- [6] Джомартов, А.А., Камал, А.А., Абдураимов, А.Е., Джамалов, Н.К. Симулятор землетрясения // Евразийский патент на изобретение. 2022. № 040346.

ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕРАБОТКИ И ПРОИЗВОДСТВО СУХОГО ВЕРБЛЮЖЬЕГО МОЛОКО МАКСИМАЛЬНЫМ СОХРАНЕНИЕМ ВИТАМИННОГО СОСТАВА

Е.А. ДЮСЕМБИН

АЛТ Университет имени Мухамеджана Тынышпаева, Алматы, Казахстан

Введение. В последние годы в мире отмечается устойчивый рост интереса к верблюжьюму молоку и продукции, произведенной на его основе. Это объясняется его уникальным биохимическим составом и выраженными лечебными свойствами. Верблюжье молоко содержит железо, аминокислоты, фосфор, кальций, кобальт, калий, витамины группы В, С и D, а также натрий. Благодаря высокому содержанию биологически активных веществ, продукт широко используется в пищевой, фармацевтической и косметологической промышленности. Регулярное употребление верблюжьего молока способствует укреплению иммунной системы, нормализации обменных процессов, профилактике анемии и сахарного диабета, а также улучшению состояния кожи и ЖКТ.

Проблематика. Свежее верблюжье молоко имеет ограниченный срок хранения и низкую устойчивость к транспортировке, что затрудняет его широкое распространение. Наиболее эффективный способ решения данной проблемы — преобразование продукта в сухую форму. Однако существующие в мировой практике методы сушки, основанные на многоступенчатой термообработке, приводят к разрушению до 40

Цель исследования. Разработка научно обоснованной технологии производства сухого верблюжьего молока с сохранением 98–100

Научная новизна. Разработана инновационная технология переработки верблюжьего молока, предусматривающая низкотемпературную вакуумную сушку, которая минимизирует

тепловое воздействие и обеспечивает сохранность витаминов, аминокислот и ненасыщенных жирных кислот.

Исследованием методом газо-жидкостной хроматографии установлено, что в процессе переработки по предложенной технологии содержание ненасыщенных жирных кислот и белковых структур остается стабильным, что подтверждает эффективность метода.

Практическая значимость. 1. Получение сухого порошка верблюжьего молока, сохраняющего витаминный состав и биоактивные вещества исходного продукта.

2. Увеличение срока хранения до 24 месяцев при сохранении лечебно-диетических свойств.

3. Возможность создания экспортно-ориентированного продукта под национальным брендом Казахстана — «ARUANA», конкурентоспособного на мировом рынке.

4. Продукт рекомендуется к использованию в рационе людей с анемией, сахарным диабетом, нарушениями обмена веществ, а также в составе функционального и детского питания.

Результаты. В ходе экспериментальных исследований установлено:

- содержание белка в среднем — 3,9
- сохранность витаминов при сушке — 98–100
- энергетическая ценность конечных продуктов — 68–180 ккал;
- устойчивость продукта при хранении при 4–6°C — до 45 суток (в виде готовой продукции) и до 24 месяцев (в виде порошка).

Заключение. Разработанная технология переработки верблюжьего молока обеспечивает производство высококачественного сухого продукта с сохранением витаминного и минерального состава, что открывает новые перспективы для развития молочной промышленности Казахстана и расширения экспорта функциональных продуктов питания на международный рынок.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Meena S, Rajput YS, Sharma R. *Comparative fat digestibility of goat, camel, cow and buffalo milk*, International Dairy Journal, Reston (2014), 35:153-156. DOI: 10.1016/j.idairyj.2013.11.009.
- [2] <https://www.marketdataforecast.com/market-reports/camel-milk-market>
- [3] <https://www.khaleejtimes.com/business/local/camel-the-new-cash-cow>
- [4] <https://www.mccourier.com/global-camel-milk-market-2020-to-2028-at-a-cagr-5-with-key-players-are-camelicious-desert-farms-the-camel-milk-vital-camel-milk/>
- [5] Высокие производственные затраты снижают потенциал рынка верблюжьего молока. Февраль 2019 года. retail/high-production-costs-dampen-camel-milk-market-potential/
- [6] FSSAI_News_Camel_Milk_Food_news_24_07_2018
- [7] Habib H.M., Ibrahim W.H., Stock R.H., Hassan H.M. Camel milk reduces the proliferation of colorectal cancer cells and exerts antioxidant and DNA damage inhibitory activities, *Food Chem*, (2013), 141:148–152.
- [8] Agrawal R.P., Beniwal R., Kochar D.K., Tuteja F.C., Ghorui S.K. Camel milk as an adjunct to insulin therapy improves long-term glycemic control and reduction in doses of insulin in patients with type-1 diabetes A 1 year randomized controlled trial, *Diabetes Res Clin Pract*, (2005), 68:176–177.
- [9] Limon A., Gallegos-Perez J.-L., Reyes-Ruiz J.M., Aljohi M.A., Alshancheeti A.S., Miledi R. The endogenous GABA bioactivity of camel, bovine, goat and human milks, *Food Chem*, (2014), 145:481–487.
- [10] Khatoon H., Najam R. Bioactive components in camel milk: Their nutritive value and therapeutic application, In: *Nutrients in Dairy and Their Implications for Health and Disease*. Cambridge: Academic press, (2017), 377-387. DOI: 10.1016/B978-0-12-809762-5.00029-2
- [11] Yagil R., Etzion Z. Effect of drought condition on the quality of camel milk, *J Dairy Res*, (1980), 47:159–166
- [12] El Miniawy H.M.F., Ahemad K.A., Tony M.A., Mansour S.A., Khattab M.M.S. Camel milk inhibits murine hepatic carcinogenesis initiated by diethylnitrosamine and promoted by phenobarbitone, *Indian J Vet Sci Med*, (2014), 2:137–141

[13] El-Fakharany E.M., Tabil A., El-Wahab A.A., Haroun B.M., Redwan E.M. Potential activity of camel milk amylase and lactoferrin against hepatitis C virus infectivity in HepG2 and lymphocytes, *Hepat Mon*, (2008), 8(2):101–109

[14] Shabo Y., Barzel R., Margoulis M., Yagil R. Camel milk for food allergies in children, *Immunology and allergies. Israel Med Assoc*, (2005), 7:1–3

[15] El-Agamy E.I., Nawar M., Shamsia S.M., Awad S., Haenlein G.F.W. Are camel milk proteins convenient to the nutrition of cow milk allergic children, *Small Rumin Res*, (2009), 82:1–6

ОЦЕНКА МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ДОРОЖНОЙ ОДЕЖДЫ В СЕВЕРНОМ КАЗАХСТАНЕ

А.С. ЖАЙСАНБАЕВ

Институт механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова, Алматы,
Казахстан

author@email.com

Обследуемый участок протяженностью 47 км расположен на автомобильной дороге «Екатеринбург – Алматы» (км 380-427). Обследуемый участок дороги имеет следующие основные показатели: категория дороги – III; число полос движения – 2; ширина проезжей части – 7,0 (2х3,5 м); ширина обочин – 2х2,50 м. Участок расположен на расстоянии 74 км от г. Костанай (Северный регион Казахстана) в направлении г. Екатеринбург (Россия). В 2025 году на участке был выполнен капитальный ремонт, с устройством новой дорожной одежды, а в 2014-2015 годах на участке был осуществлен средний ремонт: устроена шероховатая поверхностная обработка. Общее состояние проезжей части представлено на рисунке 1а.

Для определения существующей конструкции дорожной одежды было проведено вскрытие дорожной одежды и грунтового основания на километр 380+000 (асфальтобетон – 6,5 см; асфальтобетон – 8,5; асфальтобетон – 9,0; гравийно-песчаная смесь (ГПС) – 33 см; щебень – 8 см; ГПС – 15 см; всего 80 см) и километре 421+000 (асфальтобетон – 7 см; Асфальтобетон – 10 см; ГПС – 20 см; всего 37 см).

Для оценки прочности дорожной одежды (модули упругости) была использована передвижная дорожная лаборатория (дефлектометр) компании Dynatest (Дания) [1]. Процесс измерения модуля упругости дефлектометром приведена на рисунке 1б.



Рис. 1: Общий вид обследуемого участка (а); процесс измерения модуля упругости дорожной одежды дефлектометром (б)

Прочность дорожной одежды характеризуется по величине общего модуля упругости E_0 (МПа), определенного по формуле:

$$E_0 = \frac{qD(1 - \nu^2)}{l}, \quad (1)$$

где q – удельная нагрузка на поверхности дорожного покрытия, МПа; D – диаметр плиты нагружения, мм; ν – среднее значение коэффициента Пуассона конструкции дорожной одежды, равное 0,3; l – максимальный прогиб поверхности дорожного покрытия, мм.

Измерения прогиба поверхности асфальтобетонного покрытия посредством дефлектометра осуществлены с учетом требований стандартов [2].

Как видно из рисунка 2, на рассмотренном 47 км автомобильной дороги, модуль упругости дорожной одежды изменяется в широких пределах, наименьшее значение составляет $E_{\min} = 229$ МПа, а наибольшее значение $E_{\max} = 869$ МПа. Диапазон изменения модуля упругости составил $\Delta E = 640$ МПа. Требуемый минимальный общий модуль упругости согласно [3] составляет 180 МПа.

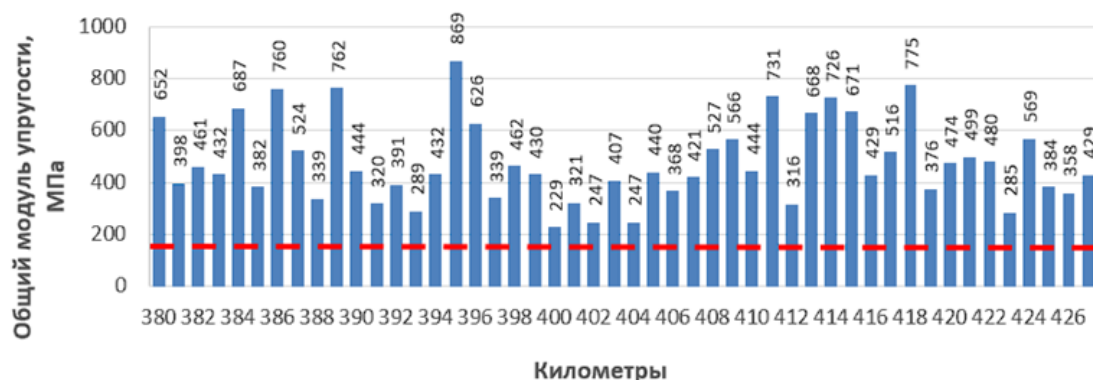


Рис. 2: Общий модуль упругости дорожной одежды

Результаты подсчета интенсивности приведены на рисунке 3. Суточная интенсивность составила – 4342 авт/сут, из них 2175 авт/сут (50,1%) составляют легковые автомобили, а остальные 2167 авт/сут (49,9%) составляют грузовые автомобили.

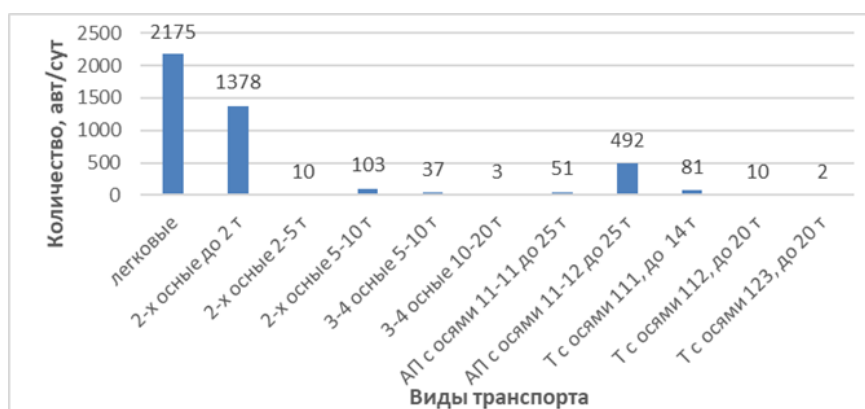


Рис. 3: Интенсивность и состав транспортного потока

В целом, значения модулей упругости на обследуемом участке изменяются в широких пределах ($\Delta E = 640$ МПа), это связано с различной конструкцией дорожной одежды на разных местах, так на км 380+000 общая толщина составила – 80 см, с модулем упругости – 652 МПа, а на километре 421+000 – 37 см, с модулем упругости – 499 МПа. Конструкция дорожной одежды обследуемого участка достаточно прочная для существующей интенсивности – 4342 авт/сут, а измеренные значения модуля упругости не ниже минимально допустимого нормативного значения 180 МПа. Поэтому усиления дорожной одежды на данном участке не требуется, а ремонт слоя износа (покрытия) выполняется по мере появления на них дефектов.

Финансирование: Авторы выражают искреннюю благодарность за финансовую поддержку фундаментальных исследований Министерству науки и высшего образования Республики Казахстан (номер гранта: BR31715767).

Ключевые слова: модуль упругости, дорожная одежда, дефлектометр, прогиб, интенсивность движения, прочность дорожной конструкции.

2020 Mathematics Subject Classification: 74B05, 74C99, 86A30

ЛИТЕРАТУРА

- [1] ПР РК 218-27-2014. Инструкция по диагностике и оценке транспортно-эксплуатационного состояния автомобильных дорог.
- [2] СТ РК 1377-2015. Дороги автомобильные и аэродромы. Метод определения модуля упругости нежестких дорожных одежд установками динамического нагружения. Астана, 2015.
- [3] СП РК 3.03-104-2014* Проектирование дорожных одежд нежесткого типа.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММЫ УГЛА ТАНГАЖА РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ЕЕ ПОЛЕТА

Н.Н. ЖУМАБЕКОВА¹, М.М. МОЛДАБЕКОВ², Н.Ж. ТІЛЕКТЕС³,
А.Б БАТЕНОВ⁴

¹Казахский Национальный исследовательский технический университет имени
К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан

²Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

^{3,4}Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
³tlektesnurzhaugan@gmail.com

Полет РН на начальном стартовом участке, а затем в воздушном и безвоздушном пространствах имеет свои особенности, поэтому программная траектория ее полета, которая всецело лежит в стартовой плоскости и строится на Земле заблаговременно до старта РН, делится на четыре участка [1-3]: 1) ракета стартует вертикально; 2) после вертикального взлета необходимо обеспечить наклон траектории в заданном направлении с помощью маневра отклонения от вертикали на заданный угол; 3) начиная со скорости 0.8 М и далее углы атаки должны быть близки к нулю, что соответствует гравитационному развороту РН; 4) полет в безвоздушном пространстве.

Основным фактором, определяющим характер траектории и численные значения как текущих, так и конечных значений кинематических параметров, является программа изменения угла тангажа [1-5]. Программой угла тангажа называют зависимость изменения угла наклона продольной оси РН относительно стартовой плоскости. Она формирует траекторию полета, обеспечивающую выведение полезного груза в заданную точку пространства при заданной скорости и угле наклона траектории.

Запуск РН осуществляется по программной траектории, которая лежит на стартовой плоскости, связанной со стартовой инерциальной системой координат [1-3]. Уравнения движения РН на этой плоскости имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_S &= v_{S_x}, \dot{z}_S = v_{S_z}, \dot{\vartheta}_{S_x} = \frac{F_t}{m} \cos(\theta + \delta) - \frac{\mu(x_s + R_e)}{r^3} - A_x, \dot{m} = -\beta, \\ \dot{\vartheta}_{S_z} &= \frac{F_t}{m} \sin(\theta + \delta) - \frac{\mu z_s}{r^3} - A_z, \dot{\omega}_y = \frac{M_y + M_{ay}}{I_y}, \dot{\theta} = \omega_y, \dot{\delta} = \frac{1}{T}(u - \delta), \end{aligned} \quad (1)$$

где x_S, z_S — вертикальная и горизонтальная координаты центра масс РН; θ — угол тангажа РН; v_{S_x}, v_{S_z} — координаты скорости РН; ω_y — угловая скорость вокруг оси тангажа; F_t — сила тяги двигателя РН, $r = \sqrt{(R_e + x_s)^2 + z_s^2}$ — радиус-вектор относительно центра

Земли; m — масса РН; β — скорость горения топлива; μ — гравитационная постоянная; $A_x = \frac{C_A \rho \vartheta_S^2}{m} S$, $A_z = \frac{C_N \rho \vartheta_S^2}{m} S$ — ускорения от аэродинамических сил; C_A, C_N — аэродинамические коэффициенты; ρ — плотность воздуха; $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь миделева сечения РН; ϑ_S — скорость РН, $\Theta = \arctg \frac{\vartheta_{Sx}}{\vartheta_{Sz}}$ — траекторный угол; I_y — момент инерции РН по оси тангажа; $M_y = -x_{gim} F_t \sin \delta$ — управляющий момент силы тяги двигателя РН вокруг оси тангажа; x_{gim} — расстояние от центра тяжести РН до точки приложения силы тяги; $M_{ay} = C_{m_p} \frac{1}{2} \rho S \vartheta_S^2 l$ — момент аэродинамических сил вокруг оси тангажа; C_{m_p} — аэродинамический коэффициент; u — управление соплом двигателя; T — постоянная времени исполнительного органа.

Программу угла тангажа $\theta_{пр}(t)$ зададим в виде экспоненты:

$$\theta_{пр}(t) = a \left[1 - e^{-\gamma_\theta(t-t_1)} \right], \quad t \in [t_1, t_2], \quad (2)$$

где a — заданное конечное значение угла $\theta(t_2)$. Для момента вращения РН вокруг оси тангажа имеем:

$$-\frac{1}{J_y} x_{gim} F_t \sin u_\theta = -a \gamma_\theta^2 e^{-\gamma_\theta(t-t_{2n})} \quad (3)$$

и слагаемое управления u_θ , обеспечивающее требуемое значение a программы угла тангажа:

$$u_\theta(t) = \arcsin \left[\frac{J_y a \gamma_\theta^2}{x_{gim} F_t} e^{-\gamma_\theta(t-t_{2n})} \right]. \quad (4)$$

Второе слагаемое управления u , обеспечивающее стремление угла атаки α к нулю, примем в виде:

$$u_\alpha = \gamma_\alpha \alpha(t). \quad (5)$$

Полное управление u имеет вид:

$$u = u_\theta + u_\alpha. \quad (6)$$

Результаты численного моделирования, приведенные на рисунке 1, показывают, что погрешности достижения трех заданных значений параметра a составляют соответственно 2%, 10.2% и 7.3%. Отклонение угла атаки α от нуля при достижении РН звуковой скорости составляет соответственно 0.39°, 0.47° и 1.42°.

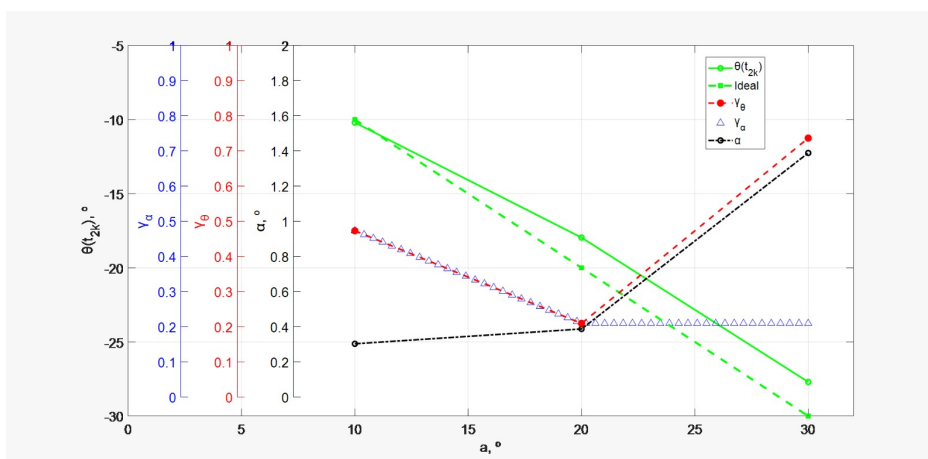


Рис. 1: Зависимость отклонения угла атаки и погрешности достижения параметра a .

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31715767).

Ключевые слова: ракета-носитель, участок наклона траектории, программа угла тангажа, ограничения.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сердюк В.К. *Проектирование средств выведения космических аппаратов: Учебное пособие для ВУЗов*, Машиностроение, М. (2009).
- [2] Сихарулидзе Ю.Г. *Баллистика и наведение летательных аппаратов* [Электронный ресурс], БИНОМ. Лаборатория знаний, М. (2015).
- [3] Wei Du *Dynamic modeling and ascent flight control of Ares-I Crew Launch Vehicle*, Iowa State University, Ames (2010), 167 p.
- [4] Bong Wie *Space Vehicle Dynamics and Control*, 2nd Edition, AIAA, Reston (2008). ISBN: 9781563479533.
- [5] Лемешонок Т.Ю., и др. *Математические модели динамики движения летательных аппаратов: учебное пособие*, Балт. гос. техн. ун-т, СПб. (2020), 122 с.

ОБТЕКАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ ВО ВНЕЗАПНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

А.Х. ЗАКИРОВ

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
asqar_z@mail.ru

Из экспериментальных и теоретических исследований известно, что при движении жидкости в диффузорах наблюдаются такие явления, как отрыв потока от поверхности, обратное течение и усиление турбулентности. Причем отрыв потока в диффузоре сильно зависит от его геометрии и параметров потока. Основной задачей при рассмотрении взаимодействия струи с различными твердыми преградами является определение силы давления струи на эти преграды. Целью исследования является изучение взаимодействия струи, вытекающей из узкой части трубы с твердой стенкой конической формы и осью, совпадающей с осью трубы.

Рассматривается задача об обтекании клина потоком идеальной несжимаемой жидкости в трубе с внезапным расширением. Представлен метод расчета параметров струйных течений в двумерной постановке, очень удобный для решения практических задач. На примере стационарной задачи обтекания клина дозвуковым потоком жидкости в трубе проведено теоретическое исследование с целью изучить взаимодействия струи, вытекающей из узкой части трубы с твердой стенкой конической формы. С использованием методов теории струй получено аналитическое решение поставленной задачи. Определено распределение скоростей и давлений на каждом отрезке границы параметрической полуплоскости.

Предполагается, что течение установившееся, вихри и внешние силы отсутствуют. На твердых границах внутри канала граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Решение данной задачи строится в параметрической форме, причем в качестве канонической области взят верхняя полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Область, занятую движущейся жидкости, отобразим на область параметрического переменного (ζ). Для определения потока находим функцию скоростей $\bar{V}(\zeta)$. Согласно методу особых точек Чаплыгина конформное отображение верхней полуплоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на полосу осуществляется функцией [1]:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi} \ln(\zeta - 1) + i\frac{q}{\pi}.$$

Введем в рассмотрение функцию Н.Е. Жуковского [2]

$$\omega = \ln \left(\frac{V_0 dz}{dW} \right) = \ln \left(\frac{V_0}{V} \right) + i\theta,$$

где θ — угол скорости с осью абсцисс x , V_0 — скорость на свободной поверхности. Согласно методу Н.Е. Жуковского, находим сопряженную комплексную скорость:

$$\bar{V} = V_0 \left[\frac{\sqrt{b+\zeta}}{\sqrt{b\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{b+1}}} \right]^{2\alpha} \frac{(\sqrt{k}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{k-1})\sqrt{\zeta-e}}{(\sqrt{e}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{e-1})\sqrt{\zeta-k}}.$$

Из последнего выражения можно найти распределение продольной и радиальной скорости и давлений на соответствующих границах верхней полуплоскости (ζ). Конформно отображающую функцию $z = z(\zeta)$ находим из уравнения

$$dz = \frac{dW}{d\zeta} \left(\frac{dW}{dz} \right)^{-1} d\zeta.$$

Для нахождения уравнения свободной поверхности в параметрической форме достаточно проинтегрировать последние выражения. Проводились расчеты для основных гидродинамических параметров течения и определены формы свободной поверхности струи.

Ключевые слова: уравнение диффузии, однородное тело, начальное состояние, локальная неоднородность, прозрачные граничные условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости, Наука, Москва (1979).
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного, Наука, Москва (1987).

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕМПФИРУЮЩЕЙ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ж. ИСКАКОВ¹, А. АБДУРАИМОВ², К. АЗИЗ³

*Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан*

Абстракт. В работе предлагается метод численного решения дифференциальных уравнений движения в случае неизвестности характеристики источника энергии для случая неидеального гироскопического ротора с нелинейным кубическим демпфированием.

Abstract. The paper proposes a method for numerically solving differential equations of motion in the case of unknown characteristics of the energy source for the case of a non-ideal anisotropic gyroscopic rotor with nonlinear cubic damping.

В методах динамического анализа и аналитико-численного решения дифференциальных уравнений движения неидеальных механических систем, представленных в ряде работ, в качестве источников возбуждения, как правило, рассматриваются неидеальные приводы, преимущественно двигатели постоянного тока с заданными характеристиками. В случае отсутствия информации о характеристиках источника возбуждения целесообразно применить метод численного решения дифференциальных уравнений движения механической системы, ранее разработанный авторами в работе [1], более расширенном варианте.

В данной работе данный метод предлагается для прямого решения дифференциальных уравнений движения неидеального гироскопического жёсткого ротора с нелинейным кубическим демпфированием нелинейной кубической жёсткостью упругой опоры. Сущность метода

заключается в замене неизвестной характеристики источника возбуждения её выражением, полученным из частотного уравнения, выведенного из системы амплитудно- и фазово-частотных уравнений вынужденных стационарных колебаний при предположении, что угловое ускорение существенно меньше квадрата угловой скорости вращения. При этом угловая скорость стационарного вращения заменяется производной угла поворота вала.

Результаты численного решения демонстрируют хорошее согласие с результатами аналитического решения соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений движения. Кроме того, результаты прямого моделирования движения роторной системы при неизвестной характеристике источника возбуждения и при линейной характеристике двигателя постоянного тока оказываются близкими. Проведённый численный динамический анализ подтверждает эффективность подавления амплитуды околорезонансных колебаний за счёт совместного действия линейного и нелинейного кубического демпфирования. Рассматриваемый метод предназначен для получения решений в первом приближении и применим к задачам слабонелинейных колебаний в резонансной области, где скорость вращения вала сопоставима с собственной частотой колебательной системы.

Ключевые слова: гироскопический ротор, нелинейное демпфирование, неидеальный источник энергии, анизотропная жесткость, аналитическое решение, численное решение.

Key words: gyroscopic rotor, nonlinear damping, non-ideal energy source, anisotropic stiffness, analytical solution, numerical solution.

Работа выполнена в рамках реализации раздела программы фундаментальных научных исследований BR31715767 в 2026–2028 годах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Iskakov Zh., Bissembayev K., Jamalov N. Resonance Vibrations of a Gyroscopic Rotor with Linear and Nonlinear Damping and Nonlinear Stiffness of the Elastic Support in Interaction with a Non-ideal Energy Source. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022. Vol. 170. 108773. doi:10.1016/j.ymssp.2021.108773.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНО-НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, КОГДА НАГРУЖЕННЫЕ ЧАСТИ СОДЕРЖАТ ОПЕРАТОРЫ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РИМАНА - ЛИУВИЛЛЯ

Б.И. ИСЛОМОВ

¹Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
islomovbozor@yandex.com

В данной работе исследуется краевая задача для дробно-нагруженного гиперболического уравнения, когда нагруженные части содержат операторы дробных производных Римана-Лиувилля. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \mu_1 D_t^{\beta_1} u(x, t)|_{x=x_0}, & 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + \mu_2 D_{0\xi}^{\beta_2} u(0, \xi), & -\infty < x < 0, t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + \mu_3 D_{0\xi}^{\beta_3} u(\xi, 0), & 0 < x < +\infty, t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup J_1 \cup J_2$, где

$$\Omega_1 = \{(x, t) : 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, t) : -\infty < x < 0, 0 < t < +\infty\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, t) : 0 < x < +\infty, -\infty < t < 0\},$$

$$J_1 = \{(x, t) : 0 < x < +\infty, t = 0\}, \quad J_2 = \{(x, t) : x = 0, 0 < t < +\infty\}.$$

Обозначим

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J_2, \quad \Omega_2^* = \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup J_1,$$

а $D_t^\gamma u(x, t)$ и $D_{0\xi}^\gamma u(x, t)$ операторы дробных производных Римана–Лиувилля вида [1]:

$$D_t^\gamma u = \begin{cases} D_{tx}^\gamma u(x, t), & t < x, \\ D_{xt}^\gamma u(x, t), & t > x, \end{cases} \quad (1)$$

$$D_{tx}^\gamma u = \frac{\text{sign}(x-t)}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^x \frac{u(x, z)}{|x-z|^\gamma} dz. \quad (2)$$

В уравнении (1) $x_0 > 0$, $\xi = x + y$, μ_j ($j=1,3$) - заданные действительные числа, причем

$$\mu_k \in \mathbb{R}, 0 \leq \beta_k < 1, (k = 1, 3). \quad (3)$$

Для уравнения (1) в области Ω поставлена нелокальная краевая задача с условием Бицадзе–Самарским, а также доказана существование и единственность решения этой задачи.

Задача Noloc(Ω). Найти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

$$1) u(x, t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1^*) \cap C^1(\Omega_2^*);$$

$$2) u(x, t) \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3);$$

$$D_t^{\beta_1} u(x_0, t) \in C(\Omega_1), \quad D_{0\xi}^{\beta_2} u(0, \xi) \in C(\Omega_2), \quad D_{0\xi}^{\beta_3} u(\xi, 0) \in C(\Omega_3),$$

и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_j ($j = 1, 3$); 3) $u(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) &= a_1(x)u(x, 0) + b_1(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \\ u\left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) &= a_2(t)u(0, t) + b_2(t), \quad 0 \leq t < +\infty, \end{aligned}$$

где $a_1(x), b_1(x), a_2(t), b_2(t)$ — заданные функции, причем

$$(1 - a_2(0))b_1(0) = (1 - a_1(0))b_2(0), \quad 1 - a_j(0) \neq 0. \quad (4)$$

$$a_1(x), b_1(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty), \quad a_2(t), b_2(t) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty), \quad (5)$$

$$a_1(x), b_1(x) \text{ ограничена на } x \in [0, +\infty), \quad a_2(t), b_2(t) \text{ ограничена на } t \in [0, +\infty). \quad (6)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3)–(6), то в области Ω решение задачи Noloc(Ω) однозначно разрешима.

Теорема доказывается методом интегральных уравнений. Согласно этого задача Noloc(Ω) эквивалентным образом сведется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Однозначная разрешимость задачи следует из еоднозначной разрешимости интегрального уравнения Вольтерра [2].

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект Ф3-202009211).



Рис. 1: Общий вид обследуемого участка (а); процесс вскрытия конструкции дорожной одежды (б)

Ключевые слова: нелокальная задача, дробно-нагруженное гиперболический уравнения, оператор дробных производных Римана-Лиувилля.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35L10

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987.
- [2] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.

РЕЗУЛЬТАТЫ ПОЛЕВОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕСТ КОЛЕЕОБРАЗОВАНИЯ НА АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГАХ Г. ШЫМКЕНТ

У.С. КАЛЫБАЕВ

Казахский автомобильно-дорожный институт им. Л.Б. Гончарова, Алматы,
Казахстан

No e-mail

Обследуемый участок расположен на автомобильной дороге А-2 на пересечении улиц Аль-Фараби. Обследуемый участок дороги имеет следующие основные показатели: категория дороги – магистральная улица; число полос движения – 6; ширина проезжей части – 10,5 (3х3,5 м). Участок расположен на расстоянии 3 метра от стоп-линии перед светофором на пересечении с улицей Аль-Фараби. В 2020 году на участке была выполнена реконструкция данного участка с увеличением количества полос до 3 в одном направлении. Общее состояние проезжей части представлено на рисунке 1а.

Для определения существующей конструкции дорожной одежды было проведено вскрытие дорожной одежды и грунтового основания (рисунок 1б). Все полевые работы выполнялись согласно требованиям действующих нормативных документов [1-3]. Существующая конструкция имела следующие слои: ЩМА-20 – 5 см; асфальтобетон крупнозернистый – 7 см; черный щебень – 5; песчано-гравийная смесь – 60 см, грунт - суглинок. Общая толщина дорожной одежды составило - 77 см.

На обследуемом участке проведено измерение колеи на поверхности дорожной одежды. Результаты измерения приведены на рисунке 2.

Наибольшая глубина колеи на поверхности дорожной одежды составило – 55 мм. В результате вскрытия определено, что колееобразованию подвержены в основном верхние асфальтобетонные слои дорожной одежды.

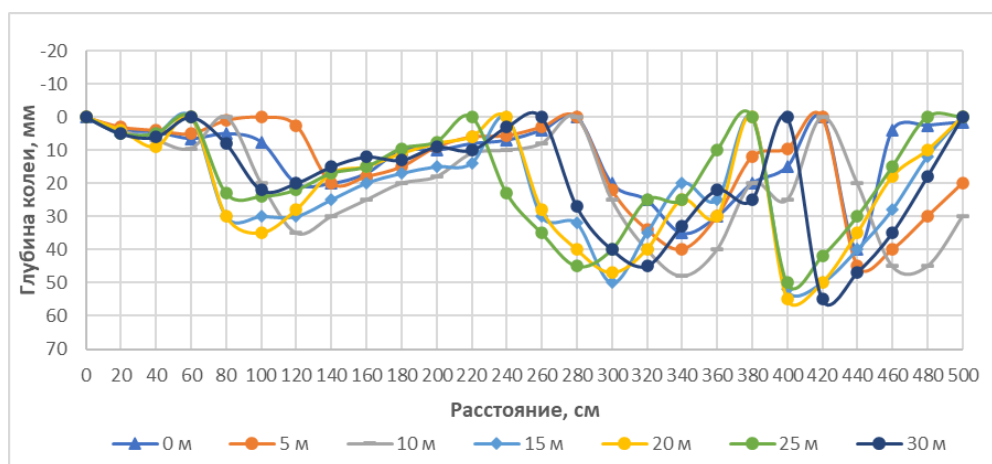


Рис. 2: Результаты измерения колеи на поверхности дорожной одежды на разном расстоянии от стоп-линии

REFERENCES

- [1] ПР РК 218-27-2014. *Инструкция по диагностике и оценке транспортно-эксплуатационного состояния автомобильных дорог.*
- [2] ГОСТ 28514-90. *Строительная геотехника. Определение плотности грунтов.*
- [3] ВСН 41-92. *Инструкция по организации движения в местах производства работ на автомобильных дорогах Республики Казахстан.* Москва (1992)

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ХОЙКЕНА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО И УПРАВЛЯЕМОГО ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

Д.Б. КЕРИМКУЛОВ¹, А.К. ТУЛЕШОВ²

^{1,2}Институт механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова, Алматы,
Казахстан

rain-forest@inbox.ru

Введение

Преобразование вращательного движения в поступательное широко применяется в различных механических системах, в том числе в механизмах подачи заготовок при резке материалов. Наиболее распространённым решением является кривошипно-ползунный механизм, однако его использование требует наличия направляющих элементов, воспринимающих значительные боковые нагрузки.

При выполнении операций резки заготовок наличие боковых нагрузок приводит к увеличению трения в направляющих ползуна и повышенному износу элементов механизма. В связи с этим представляет интерес применение механизмов, обеспечивающих приближённо прямолинейное движение без использования направляющих или с минимальной нагрузкой на них.

Одним из таких механизмов является механизм Хойкена, представляющий собой специальную конфигурацию четырёхзвенника, в котором траектория определённой точки звена содержит участок, близкий к прямой линии.

Постановка задачи

Целью работы является исследование кинематических особенностей механизма Хойкена при использовании его в системе подачи заготовки для резки.

Основными задачами исследования являются:

- определение участка траектории выходной точки механизма, в пределах которого движение может считаться квазилинейным;
- оценка равномерности поступательного движения на выбранном участке;
- определение диапазона углов входного звена, пригодного для практического использования;
- анализ возможности упрощения алгоритма управления шаговым приводом путём использования кинематических свойств механизма.

В рассматриваемой системе шаговый двигатель используется в качестве привода механизма. Это позволяет ограничить рабочий диапазон углов входного звена и использовать только участок траектории, обеспечивающий минимальное отклонение от прямолинейности и наиболее равномерную подачу.

Кинематическая модель

Рассматриваемый механизм представляет собой четырёхзвенник типа Хойкена, состоящий из кривошипа длины a , стойки длины $2a$ и двух звеньев длиной $2.5a$.

При вращении входного звена определённая точка длинного звена описывает траекторию, содержащую участок, близкий к прямой линии.

Координаты выходной точки можно представить в виде функций угла поворота входного звена

$$x = x(\theta), \quad y = y(\theta),$$

где θ — угол поворота входного звена.

Для оценки равномерности подачи анализируется зависимость скорости перемещения

$$v_x = \frac{dx}{d\theta} \omega,$$

где ω — угловая скорость входного звена.

Минимизация отклонения координаты y позволяет определить участок траектории, близкий к прямолинейному, который используется в качестве рабочего диапазона механизма.

Практическое применение

Использование механизма Хойкена в системе подачи заготовки позволяет снизить боковые нагрузки на направляющие ползуна за счёт формирования участка квазилинейного движения.

Ограничение рабочего диапазона углов входного звена и управление скоростью вращения шагового двигателя позволяют дополнительно компенсировать неравномерность кинематической передачи и упростить алгоритм управления подачей.

Заключение

Проведённый анализ показывает, что механизм Хойкена может быть использован для реализации квазилинейного поступательного движения в системах подачи заготовок. Определение рабочего диапазона углов входного звена позволяет использовать только участок траектории, обладающий минимальным отклонением от прямой линии и наиболее равномерным законом движения.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании механизмов подачи с шаговыми приводами, где требуется снижение боковых нагрузок на направляющие и упрощение алгоритмов управления.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке научного проекта BR24992947.

Ключевые слова: механизм Хойкена, четырёхзвенник, кинематический анализ, прямолинейное движение, шаговый привод.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. J. Patel, R. K. Patel. Optimization of Hoeken Mechanism for Walking Prototypes, *International Journal of Design and Manufacturing Technology*, **17**:1 (2023), 1–10.

- [2] S. D. Carra, M. Ceccarelli. Straight-line mechanisms: analysis and design, *Mechanism and Machine Theory*, **72** (2014), 1–15.
- [3] S. Kumar, P. Kumar. Design and analysis of Hoeken mechanism, *International Journal of Design and Manufacturing Technology*, **17**:1 (2023), 1–12.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ИСКУССТВЕННО ВЫДЕЛЕННУЮ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНУЮ ОБЛАСТЬ

И. МИРЗАЕВ¹, С.М. ГАЙНАЗАРОВ²

^{1,2}Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

¹Национальный исследовательский институт сейсмической безопасности и
устойчивого строительства при Ташкентском архитектурно-строительном
университете, Ташкент, Узбекистан

²Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

ibrakhim.mirzaev@gmail.com

При численном моделировании поведения подземных объектов в безграничной грунтовой среде на волновые воздействия требуется ограничение исследуемой области. При этом возникает необходимость обеспечения не отражения как внешних, так и внутренних волн на границах исследуемой области. В работе [1] впервые предложены формулы зависимости напряжений от скоростей частиц для плоских волн на искусственных границах. Следует отметить, что эти условия и их модификации являются приближенными условиями на границах. В работе [2] представлены точные условия прозрачности границ для плоских упругих волн. В настоящем исследовании впервые выведены точные граничные условия прозрачности в случае падающей плоской продольной волны на искусственно ограниченный параллелепипед.

Пусть на параллелепипед, выделенной из неограниченной области, падает плоская упругая волна, линия фронта которой параллельна нижней грани.

Распространение волны в указанной области определяется слабой формой уравнения движения [2]. Применяя метод частичной дискретизации конечными элементами, получим известную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Начальные условия нулевые.

Рассмотрим падающую на нижнюю грань параллелепипеда плоскую волну, скорости частиц которой задается в виде нарастающей гармонической волны с заданной частотой в виде $v_p = f(t_p)$, где f – заданная функции для продольной волны, t_p – время, представляющее разность между текущим временем и временем появления продольной волны в точке обзора, который зависит от координат точки вдоль искусственных границ.

Полная скорость частиц на искусственной границе области состоит из суммы скоростей частицы в заданной волне v , пришедшей к границе, и идущей к границе изнутри области. Выражая напряжения на границах области через скорости частиц и деформации и учитывая, что напряжения в волне на границах состоят из суммы двух напряжений: в падающей волне и возникшей внутри расчетной области, получим следующие условия на гранях параллелепипеда.

На нижней грани для усилия на единичной площади имеем:

$$P_{zz} = -c_p \rho \dot{u}_z + 2c_p \rho v_p - \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad P_{xz} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{yz} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (1)$$

аналогично, на верхней грани имеют место:

$$P_{zz} = -c_p \rho \dot{u}_z + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad P_{xz} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{yz} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (2)$$

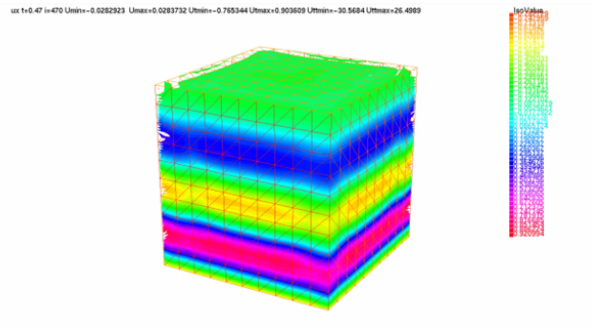


Рис. 1: Распространение продольной плоской волны в параллелепипедной области при $t=0.47$ с.

на левой грани для усилия на единичной площади имеем:

$$P_{xx} = -c_p \rho \dot{u}_x - \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} - \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{zx} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad P_{yx} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (3)$$

на правой грани:

$$P_{xx} = -c_p \rho \dot{u}_x + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{zx} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad P_{yx} = -c_s \rho \dot{u}_y; \quad (4)$$

на передней грани для усилия на единичной площади имеем:

$$P_{yy} = -c_p \rho \dot{u}_y - \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{xy} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{zy} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad (5)$$

на задней грани:

$$P_{yy} = -c_p \rho \dot{u}_y + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad P_{xy} = -c_s \rho \dot{u}_x; \quad P_{zy} = -c_s \rho (\dot{u}_z - v_p); \quad (6)$$

где c_p, c_s – скорости частиц продольных и поперечных волн в грунтовой среде; ρ – плотность материала; u_x, u_y, u_z – перемещения на границе области. Для решения задачи с граничными условиями (1)–(6) применяется неявный конечно-разностный метод Бате.

Рассмотрим задачу распространения плоской продольной упругой волны в прямоугольной области $100 \times 100 \times 100$ м, которая представляет однородный грунт со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга $E=150$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и плотность $\rho = 2000$ кг/м³. В расчетах приняты следующие значения параметров падающей волны: $A=1$ м/с, $t_s=0.5$ с, $\omega=3$ Гц. Динамический расчет проводился с шагом интегрирования 0.001 с в течение времени $t=2$ с. На рисунке время кадра взята при $t=0.47$ с.

Из рисунка видно, что волна проходит не отражаясь от границ области даже при грубом разбиении на конечные элементы.

Получены точные условия на прозрачных границах, когда заданная плоская волна поступает в искусственно ограниченную параллелепипедную область. Численно решена задача и приведена картина результатов расчета, показывающие хорошее качество условий прозрачности на искусственных границах. Результаты исследования показали правильность предложенной модели и адекватность распространения волны в пространственной области.

Ключевые слова: упругая среда, обделка, прозрачные границы, распространение волны, метод конечных элементов, метод интегрирования Бате.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lysmer J., Kuhlemeyer L. *Finite Dynamic Model for Infinite Media.*, *Engineering Mechanics Division, ASCE*, **4**, (1969), 859-887.
- [2] Mirzaev I., Gaynazarov S. Impact of Plane Waves on Lining in Elastic Medium With Transparent Artificial Boundary. *WSEAS TRANSACTIONS on APPLIED and THEORETICAL MECHANICS*, **20** (2025), 31-40.

РАСШИРЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО PID – РЕГУЛЯТОРА

М.М. МОЛДАБЕКОВ¹, Н.Н. ЖУМАБЕКОВА², Н.Ж. ТІЛЕКТЕС³,
А.Б. БАТЕНОВ⁴

¹Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

²Казахский Национальный исследовательский технический университет имени
К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан

^{3,4}Казахский Национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

³tlektesnurzhaugan@gmail.com

Классический PID-регулятор остаётся простым и популярным регулятором, но его статическая структура делает его менее эффективным для нелинейных, нестационарных или неопределённых систем. Современные модификации PID-регулятора добавляют дробный порядок, нечёткую логику, нейросетевую идентификацию, обучение с подкреплением, скользящий режим, эволюционные оптимизаторы и другие механизмы [1-7 и др.]. Эти расширения создают адаптивные и робастные контроллеры, которые автоматически корректируют коэффициенты в ответ на изменения условий и улучшают точность, устойчивость и быстродействие по сравнению с классическим PID.

Классический PID-регулятор используется на практике с двумя вариантами закона управления:

$$u_1(t) = k_p e(t) + k_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (1)$$

$$u_2(t) = k_p x(t) + k_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{dx(t)}{dt}, \quad (2)$$

где $x_3(t)$ и $x(t)$ — программное и текущее значения управляемой переменной, $e(t) = x_3 - x(t)$ — отклонение текущего значения управляемой переменной от программного; $t \in [t_0, \infty)$; k_p , k_i , k_d — параметры (коэффициенты) PID-регулятора по пропорциональному, интегральному и дифференциальному каналам.

Динамические характеристики систем автоматического управления (САУ) одними и теми же объектами управления с помощью указанных вариантов PID-регулятора существенно различаются между собой, так как передаточная функция замкнутой САУ одним и тем же объектом управления в первом случае имеет нули, а во втором случае не имеет. Соответственно, в зависимости от соотношений динамических параметров объекта управления и исполнительного органа САУ в одних случаях лучшие результаты по качеству управления даёт первый, а в других случаях — второй вариант PID-регулятора. Например, для САУ летательными аппаратами (самолеты, ракеты) предпочтение отдается второму варианту [8].

В данном докладе впервые вводится понятие расширенного PID-регулятора, сочетающего в себе свойства обоих вариантов PID-регулятора (1) и (2). Это достигается тем, что к трём параметрам k_p , k_i , k_d классического PID-регулятора добавляются два дополнительных параметра α_1 и α_2 , $\alpha_2 \in [0, 1]$, выражающие веса сигналов обратной связи по пропорциональному и дифференциальному каналам по ошибке $e(t)$ и по ее производной $\frac{de(t)}{dt}$. Соответственно, сигналы обратной связи по $x(t)$ и $\frac{dx(t)}{dt}$ подаются на вход управляющего устройства с весами $(1 - \alpha_1)$ и $(1 - \alpha_2)$.

В итоге закон управления в расширенном PID-регуляторе имеет вид:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = k_p [\alpha_1 e(t) + (1 - \alpha_2)x(t)] + k_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_d \left[\alpha_2 \frac{de(t)}{dt} + (1 - \alpha_2) \frac{dx(t)}{dt} \right]. \quad (3)$$

В качестве примера, иллюстрирующего высокую эффективность применения расширенного PID-регулятора, рассматривается система угловой стабилизации (СУС) ракеты по каналу

тангажа. Передаточная функция СУС ракеты имеет вид:

$$W(p) = \frac{(\alpha_2 k_p p^2 + \alpha_1 k_p p + k_i) Fl}{D(p)}, \quad (4)$$

где $D(p) = (Tp + 1)J_y p^3 + k_d Fl p^2 + k_d Fl p + k_i Fl$ — характеристический полином СУС; T — постоянная времени исполнительного органа; J_y — момент инерции ракеты по оси тангажа; F — сила тяги двигателя; l — расстояние от центра масс РН до точки приложения силы тяги двигателя.

Как следует из равенства (4), в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ расширенный PID-регулятор трансформируется в классический PID-регулятор, а СУС не имеет нулей в передаточной функции. При этом характеристический полином в знаменателе передаточной функции СУС остается неизменным, что означает отсутствие влияния дополнительных параметров α_1 и α_2 на устойчивость СУС. Присутствие дополнительных параметров α_1 и α_2 в числителе передаточной функции (4) свидетельствует о том, что путем их соответствующего выбора можно концептуально повысить качество СУС (время нарастания переходного процесса). Все модификации PID-регулятора, которые упомянуты выше [1-7 и др.], могут быть применены и в случае расширенного PID-регулятора. Графики переходных процессов при $\alpha_2 = 0$ и при различных значениях α_1 представлены на рис. 1.

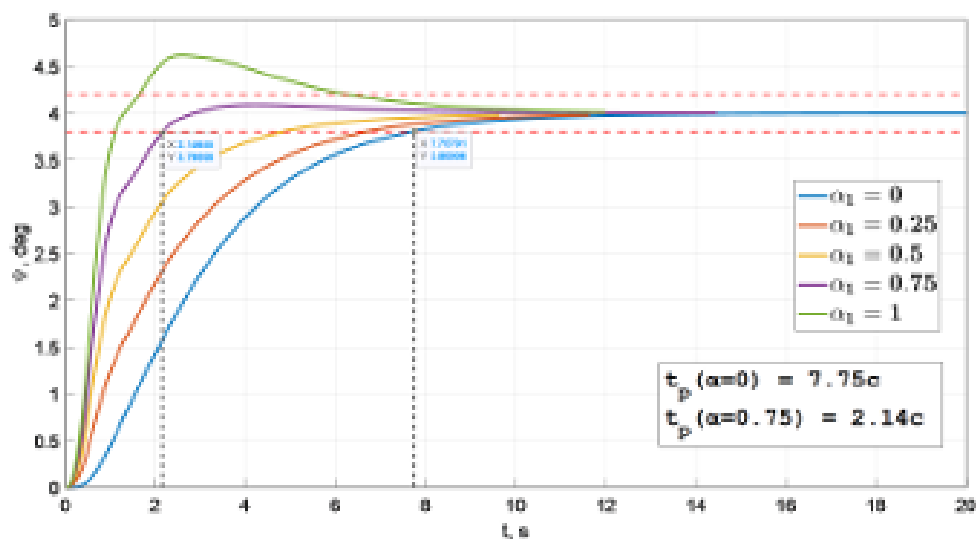


Рис. 1: Переходные процессы при разных значениях α_1

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31715767).

Ключевые слова: PID-регулятор, расширение числа параметров.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сердюк В. К. *Проектирование средств выведения космических аппаратов*, Машиностроение, М. (2009).
- [2] Сихарулидзе Ю. Г. *Баллистика и наведение летательных аппаратов*, 3-е изд. (электронное), БИНОМ. Лаборатория знаний, М. (2015).
- [3] Du W. *Dynamic modeling and ascent flight control of Ares-I Crew Launch Vehicle*, Iowa State University (2010).
- [4] Wie B. *Space Vehicle Dynamics and Control*, AIAA, Second Edition (2008).

[5] Лемешонок Т. Ю. и др. *Математические модели динамики движения летательных аппаратов*, Балт. гос. техн. ун-т, СПб. (2020).

[6] Cedro L., Wiczorkowski K., Szcześniak A. An adaptive PID control system for the attitude and altitude control of a quadcopter, *Acta Mechanica et Automatica*, **18**:1 (2024).

[7] Hao X., Xin Z., Huang W., Wan S., Qiu G., Wang T., Wang Z. Deep reinforcement learning enhanced PID control for hydraulic servo systems in injection molding machines, *Scientific Reports*, **15** (2025).

[8] Петров Б. Н., Соколов Н. И., Липатов А. В. и др. *Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: инженерные методы анализа и синтеза*, Машиностроение, М. (1986).

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА TD3 ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТИЗИРОВАННЫМИ МАНИПУЛЯТОРАМИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

З.З. МОМЫНКУЛОВ¹, Б.С. ОМАРОВ²

¹Институт механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

²Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
mrjohnnyunited@gmail.com

Методы обучения с подкреплением позволяют формировать стратегию управления на основе взаимодействия в различных промышленных средах. В данной работе рассматривается применение алгоритма Twin Delayed Deep Deterministic Policy Gradient (TD3) для оптимального управления манипуляторами. Динамика роботизированного манипулятора описывается уравнением:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ - вектор обобщённых координат, $M(q)$ - матрица инерции, $C(q, \dot{q})$ - кориолисовы силы, $G(q)$ - вектор гравитационных сил, τ - управляющие моменты.

В таком виде, состояние системы определяется вектором: $s = (q, \dot{q}, x, x_d)$, где x - положение рабочего инструмента, x_d - целевая позиция.

Процесс обучения описывается марковским процессом принятия решений:

$$\mathcal{M} = (S, A, P, R, \gamma), \quad (2)$$

где S - множество состояний, A - множество действий, P - вероятность перехода, R - функция награды, γ - коэффициент дисконтирования.

Функция ценности определяется как:

$$Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t \right]. \quad (3)$$

В алгоритме TD3 используются две независимые Q -функции: $Q_1(s, a)$, $Q_2(s, a)$.

Целевое значение вычисляется по формуле: $y = r + \gamma \min_{i=1,2} Q'_i(s', a')$.

Обновление политики осуществляется методом градиентного подъёма:

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E} \left[\nabla_a Q_1(s, a)|_{a=\pi_\theta(s)} \nabla_\theta \pi_\theta(s) \right]. \quad (4)$$

Функция награды формируется следующим образом:

$$R = -\alpha \|x - x_d\|^2 - \beta \|\tau\|^2 + \delta I_s, \quad (5)$$

где α, β, δ - весовые коэффициенты, I_s - индикатор успешного выполнения задачи. Дополнительно вводится штраф за превышение скоростей:

$$R_v = -\eta \|\dot{q}\|^2. \quad (6)$$

Итоговая награда:

$$R_{total} = R + R_v. \quad (7)$$

Определение 1. Под оптимальной политикой управления понимается отображение

$$\pi^* : S \rightarrow A,$$

максимизирующее ожидаемую суммарную награду.

Теорема 2. Алгоритм TD3 уменьшает переоценку функции ценности по сравнению с DDPG.

Использование двух независимых критиков в формуле (??) ограничивает рост положительной ошибки аппроксимации, что уменьшает смещение оценки Q-функции.

Замечание 3. Применение TD3 обеспечивает устойчивое обучение в задачах управления манипуляторами с непрерывным пространством управления.

Финансирование: Работа выполнена в рамках программно-целевого финансирования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (номер гранта: BR24992947).

Ключевые слова: обучение с подкреплением, TD3, робот-манипулятор, управление, машиностроение, оптимизация.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Fujimoto S., van Hoof H., Meger D. Addressing Function Approximation Error in Actor-Critic Methods, in: *Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning*, PMLR 80 (2018), 1587–1596.
- [2] Kober J., Bagnell J.A., Peters J. Reinforcement Learning in Robotics: A Survey, *International Journal of Robotics Research*, **32**(11) (2013), 1238–1274.
- [3] Todorov E., Erez T., Tassa Y. MuJoCo: A Physics Engine for Model-Based Control, in: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, IEEE, Vilamoura-Algarve (2012), 5026–5033.

О СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Р.Г. МУХАРЛЯМОВ

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия

robgar@mail.ru

Современное развитие производственных технологий и комплексной автоматизации предъявляет высокие требования к разработке методов математического моделирования динамики управляемых систем, содержащих элементы различной физической природы. Основной задачей описания аналитической динамики механических систем и их аналогов состоит в построении дифференциальных уравнений движений, решения которых удовлетворяют требуемым условиям. Для построения уравнений динамики обычно используются принципы классической механики и уравнения связей, определяющие кинематические соотношения и цели управления системы.

В классической механике кинематические свойства системы определяются контактными связями, которые рассматриваются как первые интегралы уравнений динамики, дополненных реакциями связей, что приводит к неустойчивости численного решения уравнений движений замкнутой системы и необходимости стабилизации связей [1]. В системах управления требуемые свойства системы задаются уравнениями сервосвязей, допускающих возможные отклонения от уравнений связей, и реализуются дополнительными управляющими силами. При этом ограничение отклонений от уравнений связей, вызванных погрешностями численного решения дифференциально-алгебраических уравнений и задания начальных условий, возможно только в том случае, когда они определяются частными интегралами уравнений динамики [2] и обеспечена асимптотическая устойчивость по отношению к уравнениям связей. Для решения задачи стабилизации связей в [3,4] введены понятия уравнений программных связей

$$y^\alpha = g^\alpha(q, t), \quad z^\beta = g_i^\beta(q, t) v^i + g_0^\beta(q, t), \quad (1)$$

$$q = (q^1, \dots, q^n), \quad v^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad \alpha = 1, \dots, a, \quad \beta = 1, \dots, b, \quad a \leq b \leq n, \quad (2)$$

где величины y^α, z^β определяются решением системы уравнений возмущений связей

$$\frac{dy^\beta}{dt} = z^\beta, \quad \frac{dz^\beta}{dt} = Z^\beta(z, y, v, q, t), \quad Z^\beta(0, 0, v, q, t) = 0, \quad (3)$$

$$y^\alpha(t_0) = g^\alpha(q_0, t_0), \quad z^\beta(t_0) = g_i^\beta(q_0, t_0) v_0^i + g_0^\beta(q_0, t_0). \quad (4)$$

В соответствии с уравнениями программных связей определяются динамические показатели и виртуальные перемещения системы, а из принципа Даламбера–Лагранжа или принципа Гамильтона–Остроградского следуют уравнения динамики. Можно доказать, что совокупность уравнений динамики и уравнений возмущений связей содержат циклические координаты, соответствующие уравнениям неголономных программных связей. Установлены условия, накладываемые на правые части уравнений возмущений связей, обеспечивающие предельные отклонения решений уравнений динамики от уравнений связей при численном решении. Введение уравнений программных связей позволило получить решение задачи обеспечения устойчивости траектории в задаче Бертрана о движении материальной точки по коническому сечению в центральном поле сил, предложить метод моделирования динамики упругой системы станков вертикально-сверлильной группы и ряда других задач.

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25- 21-00153, <https://rscf.ru/project/25-21-00153/>).

Ключевые слова: задача, динамика, уравнение, программная связь, стабилизация, управление.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Baumgarte J. *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*, Comp. Math. Appl. Mech. Eng., 1 (1972), pp. 1–16.
- [2] Еругин Н.П. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений*, Наука и техника, Минск (1979), 744 с.
- [3] Мухарлямов Р.Г. *Управление программным движением адаптивной оптической системы*, Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика, № 1 (1994), Изд-во РУДН, М., с. 22–40.
- [4] Mukharlyamov R.G. *On the Construction of Differential Equations of Systems with Program Constraints*, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 45, No. 11 (2024), pp. 5649–5657. DOI: 10.1134/S1995080224606738.

Mathematical and numerical modeling of liquid filtration processes in a porous medium

S.T. MUKHAMBETZHANOV¹, S.K. JANABEKOVA²

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

¹saltanbek.kaznu@gmail.com, ²s.janabekova@gmail.com

In this paper, one mathematical model of filtration theory with phase transitions is investigated. When using surface-active substances (surfactants) for the development of oil and gas fields in the reservoir occur sorption processes at the interfaces of individual phases (surfactants and oil, or surfactants and soil). In real processes a finite time is required for achievement equilibrium. Therefore considering the mathematical model was called the mathematical model with phase relaxation. The solvability of the mathematical model, the limiting transition in relaxation time are investigated. It is proved that in the limiting case, the original problem is a problem of Stefan type.

This paper is a logical continuation of studying the mathematical model presented in [1]. However, between phases, many authors believe that either Henry's law or Langmuir's law is fulfilled. Based on the results of [2], below we assume that there is some characteristic relaxation time for achieving equilibrium between the phases:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(H(c) - s), \quad (1)$$

where τ positive constant and called relaxation time. Then the concentration of surfactant $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ is a solution to the following equation:

$$m \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \Delta c - \nu \cdot \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (2)$$

where Ω – positive constants, ν rate of fluid filtration in a porous medium, function $H(c) = 1$ if $c(x, t) > c_*$, $H(c) = 0$ if $c(x, t) < c_*$ and in the case of equilibrium processes $s = H(c)$. Then the system (1), (2) reduces to the well-known Stefan problem. Similar mathematical models were investigated in [1,2,7].

1. Formulation of the problem. Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^m$ with a sufficiently smooth border Γ , $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. Required to find functions $c(x, t)$, $s(x, t)$ (surfactant concentrations in liquid and solid phases), defined in the area Q_T , satisfying equations (1), (2) and initial conditions

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad s(x, 0) = s_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

and one of the boundary conditions

$$c(x, t) = c_f(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} - \nu \cdot c(x, t) = c_f(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T. \quad (5)$$

Here n is the internal normal vector to Γ .

Further, under task we understand the problem (1)–(4), and task II is understood as problem (1)–(3), (5).

Definition 1. The solution of problem I (problem II) is a pair of functions $\{c, s\}$ such that:

1. $c \in W_q^{2,1}(Q_T)$, $1 < q < \infty$, $s_t, s \in L_\infty(Q_T)$;
2. Equations (1), (2) are performed almost everywhere (a.e.) in Q_T ;

3. Initial and boundary conditions for $c(x, t)$ are accepted in the sense of traces of functions from the indicated classes, for s the initial condition is taken as follows $\|s(x, t) - s_0\|_{\infty, \Omega} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$.

Designations norms and spaces of functions coincide with the notation in [2].

Lemma 1. Let $u \in W_{\mu}^i(Q)$, α be a bounded domain in $\mathbb{R}^k$, $\rho > 1$, $A_c = \{x \in \Omega : |u(x)| < \varepsilon\}$. Then $u = 0$ a.e. in A_0 .

Lemma 2. Let Q be a bounded domain in $\mathbb{R}^k$, $v_n, v, g \in L_p(Q)$, $\rho > 1$, $\forall x \in Q \setminus A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = f(x)$ and $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n(x)| \leq g(x)$, where $\text{mes } A = 0$; $v_n \rightarrow v$ weakly in $L_p(Q)$. Then $v = f$ a.e. in Q .

From Lemma 1 it follows that in the domain $E_c = \{(x, t) \in Q_T : c(x, t) = 0\}$ equalities are performed: $c_t = \Delta c = 0$. Then from equations (1), (2) we obtain $H(c(x, t)) = s(x, t)$ for a.e. $(x, t) \in E_c$. From the definition of the function $H(c)$, in particular, it follows that $0 \leq s(x, t) \leq 1$ for a.e. $(x, t) \in E_c$.

3. The correctness of the mathematical model. Replacement of independent variables and sought functions is done:

$$t = \frac{t}{\tau}, \quad x = x \sqrt{\frac{m}{\tau D}}, \quad s = s, \quad c = cm, \quad H(c) = H(mc).$$

Also, the rate of fluid filtration everywhere below is considered positive constant and the strokes are omitted in the equations.

$$s_t = H(c) - s, \quad (6)$$

$$c_t - \Delta c + \nu \cdot \nabla c + s_t = 0. \quad (7)$$

Beyond the change area of independent variables, the initial and boundary data old designations are preserved. Further, the problem I' (or II') is understood as task I (II) in which equations (1), (2) are replaced by (6), (7).

Theorem 1. Let the border $\Gamma \in C^2$, function $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$ conditions (3), (4) (respectively (3), (5)), $s_0, c_0, c_f(x, t)$ measurable and $0 \leq \{s_0(x), c_0, c_f(x, t)\} \leq 1$ for $x \in \Omega$. Then the problem I' (accordingly the task II') has a unique solution. In this case the following estimates are fair:

$$\|c\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \leq K_1(1 + \|u\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}), \quad 0 \leq c(x, t) \leq 1, \quad (8)$$

$$0 \leq s(x, t) \leq 1, \quad |s_t| \leq 1. \quad (9)$$

Positive constant K_1 depends only on q, Ω and T . It should be noted, that when $q > (m + 2)/2$ the solution $c \in H^\alpha(Q_T)$ for some $\alpha > 0$. When $q > m + 2$ it becomes Hölder continuous.

4. Existence. The function $H(c)$ is approximated by continuous monotonic functions $H_n(c)$ at $c > \frac{1}{n} + c_*$, $c < c_*$, $n = 1, 2, \dots$. By $(6)_n, (7)_n$ denote the equations (6), (7) where instead of H the function H_n is considered. For each n an approximate problem $(6)_n, (7)_n, (3), (4)$ is considered. The operator $P : W_q^{2,1}(Q_T) \rightarrow W_q^{2,1}(Q_T)$ is defined: $c = P(g)$ if c satisfies equation (7) with

$$s(x, t) = s_0(x)e^{-t} + \int_0^t H_n(g(x, \mu)) e^{\mu-t} d\mu.$$

Using Leray–Schauder fixed point theorem one obtains a solution for each n . Then by a priori estimates and compactness, passing to the limit $n \rightarrow \infty$ yields a solution of the original problem.

5. Uniqueness. To prove uniqueness we consider two solutions and their difference. Using auxiliary functions ϕ, ψ with certain properties and the method of “differentiation” in the sense of distributions, we derive an integral identity. Choosing appropriate test functions, we show that the difference vanishes almost everywhere. The uniqueness then follows.

6. The continuity of the solution on the initial and boundary data. Let $\{c^1, s^1\}$ and $\{c^2, s^2\}$ be two solutions of the problem with different initial and boundary data. Denote $c = c^1 - c^2$,

$s = s^1 - s^2$, $H = H(c^1) - H(c^2)$. Then c, s, H satisfy (6), (7) and homogeneous conditions. The following theorem holds.

Theorem 2. If the assumptions of Theorem 1 are fulfilled for the functions, then the following estimates are true:

$$\|c\|_{L_1(Q_T)} \leq K(\|c_0\|_{L_1(\Omega)} + \|s_0\|_{L_1(\Omega)} + \|c_f\|_{L_1(\Gamma_T)}), \quad (6)$$

$$\|s\|_{L_1(Q_T)} \leq K(\|c_0\|_{L_1(\Omega)} + \|s_0\|_{L_1(\Omega)} + \|c_f\|_{L_1(\Gamma_T)}). \quad (7)$$

Thus the solution depends continuously on the data in the integral sense. However, ordinary continuity in the maximum norm may not hold, as shown by a counterexample.

7. Limit transition in relaxation time. We study the behavior of the solution as $\tau \rightarrow 0$ for problem I. Introduce the space $K(Q_T)$ with the norm

$$\|u\|_{K,T} = \|u\|_{\infty,Q_T} + \|u_{tt}\|_{1,Q_T} + \|\nabla u\|_{2,Q_T} + \|u_t\|_{2,Q_T} + \|\nabla u_t\|_{2,1,Q_T}.$$

Let $c^\tau(x, t)$, $s^\tau(x, t)$ satisfy equations (1), (2) and conditions

$$c^\tau(x, 0) = c_0^\tau(x), \quad s^\tau(x, 0) = s_0^\tau(x), \quad (8)$$

$$s_0^\tau(x) = H(c_0^\tau(x)), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

with $c_0^\tau \in W_q^{2,1}(Q_T) \cap K(Q_T)$, $s_0^\tau \in L_\infty(\Omega)$.

Lemma. For the solution of (1), (2), (25), (26) the following estimates hold:

$$\|c^\tau\|_{\infty,Q_T} \leq K_5, \quad (10)$$

$$\|c_t^\tau\|_{2,Q_T} + \max_{[0,T]} \|\nabla c^\tau\|_{2,\Omega} \leq K_6, \quad (11)$$

$$\|H(c^\tau) - s^\tau\|_{1,Q_T^\delta} \leq K_7 \delta^{-1/2} \tau, \quad \delta > 0, \quad (12)$$

where $Q_T^\delta = \Omega^\delta \times (0, T)$, $\Omega^\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$ and constants K_i depend only on T, Ω and $\|c_0^\tau\|_{K,T}$.

Now let $U = c + H(c)$ be the generalized solution of the Stefan problem (see [9]) satisfying initial and boundary conditions:

$$U(x, 0) = c_0(x, 0) + s_0(x), \quad x \in \Omega, \quad c(x, t) = c_f(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T.$$

Theorem 3. If

$$\|c_0^\tau - c_0\|_{K,T} + \|s_0^\tau - s_0\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{as } \tau \rightarrow 0,$$

then $c^\tau + s^\tau$ converges to U as $\tau \rightarrow 0$ in the sense:

$$c^{\tau_k} \rightharpoonup c^0 \text{ weakly in } W_2^1(Q_T), \text{ * -weakly in } L_\infty(Q_T), \quad (13)$$

$$s^{\tau_k} \rightharpoonup H(c^0) \text{ * -weakly in } L_\infty(Q_T) \quad (14)$$

for some subsequence $\tau_k \rightarrow 0$.

8. Numerical experiments. We analyze a model problem from [5], which has important practical significance:

$$u_t - u_{xx} + \chi w_t = 0, \quad w_t = \frac{1}{\tau} [H(u) - w] + \lambda w_{xx},$$

with $H(u)$ defined as in (35). Initial and boundary conditions:

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad w(x, 0) = 1 - e^{-x}, \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = (1 + t)^2, \quad u(1, t) = (1 + t)^3.$$

A finite difference scheme with a uniform grid is constructed. The system is solved sequentially using the sweep method. Numerical results are presented for various values of parameters λ, χ, u^* .

The obtained numerical results confirm the theoretical analysis and show the behavior of the solution depending on the parameters.

The work was carried out under the scientific project No. BR28713313 “Creating an intelligent computational model for automating bioinformatics and quantum computing using supercomputer resources” of the Ministry of Higher and Secondary Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords. Sorption, adsorption, surfactant, relaxation time, mass transfer processes, numerical experiments.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q35, 65M06, 76S05

References

- [1] Kaliev I.A., Mukhambetzhano S.T., Sabitova G.S. Numerical modeling of the non-equilibrium sorption process, *Ufa Mathematical Journal*, vol. 8, no. 2, pp. 39–43, 2016.
- [2] Kaliev I.A., Rasinkov E.N. About the Stefan problem with phase relaxation, *Collection of scientific papers DCC*, issue 91, pp. 21–36, 1989.
- [3] Lapidus L., Amundson W.R. Mathematics of adsorption in beds. VI. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns, *J. Phys. Chem.*, vol. 56, pp. 984–988, 1952.
- [4] Kaliev I.A., Sabitova G.S. On a problem of nonequilibrium sorption, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, vol. VI, no. 1 (13), pp. 35–39, 2003.
- [5] Kaliev I.A., Mukhambetzhano S.T., Rasinkov E.N. The correctness of the mathematical model of nonequilibrium phase transitions of water in porous media, *Collection Dynamics of a continuous medium*, Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, issue 93–94, pp. 46–59, 1989.
- [6] Ahmed-Zaki D.Zh., Mukhambetzhano S.T., Imankulov T.S. Design of i-fields system component: Computer model of oil-recovery by polymer flooding, *Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 12th International Conference*, vol. 2, pp. 510–516, 2015.
- [7] Meirmanov A.M., Mukhambetzhano S.T., Nurtas M. Seismic in composite media: Elastic and poroelastic components, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 13, 2016.
- [8] Kenzhebayev T.S., Mukhambetzhano S.T. Numerical Solution Of The Inverse Problem Of Filtration Theory By Modulating Functions, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 99, no. 12, pp. 1779–1794, 2016.
- [9] Meirmanov A.M. *Stefan problem*. Novosibirsk: Nauka, 1986. 239 p.
- [10] Coats K.H., Smith B.D. Dead and pore volume and dispersion in porous media, *Soc. Petrol. Eng. J.*, vol. 4, no. 1, pp. 73–84, 1964.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТРОПОИДОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ АППАРАТА КОМПЛЕКСНОЙ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ АЛГЕБРЫ В СРАВНЕНИИ С МАТРИЦАМИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОВОРОТА ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Р.Г. МУХАРЛЯМОВ¹, А.В. БОРИСОВ², И.Е. КАСПИРОВИЧ³, К.С. МАСЛОВА⁴,
А.А. КОРОТКИХ⁵

^{1,2,3,4}Институт физических исследований и технологий ФГАОУ ВО Российский
университет дружбы народов, Москва, Россия

⁵Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ», Смоленск, Россия

robgar@mail.ru

При рассмотрении многозвенных стержневых механизмов с шарнирными соединениями звеньев антропоидной структуры возникает проблема создания математической модели в виде системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода. Она связана с экспоненциальным ростом количества операций в зависимости от числа степеней подвижности рассматриваемого механизма. Так, при рассмотрении плоских механизмов со звеньями переменной длины,

количество степеней подвижности у механизма с пятью подвижными звеньями переменной длины равно десяти, при переходе к пространственной модели равно двадцати. Соответственно, для такой модели время, затрачиваемое на составление системы дифференциальных уравнений движения на обычном офисном компьютере, исчисляется в часах. Значительная часть времени затрачивается на пересчет координат точек, в которых находятся центры масс звеньев механизма и координаты подвижных шарниров, при переходе от локальных к абсолютной неподвижной системе координат. Для ускорения процессов вычисления данных координат в работе предложено использовать для плоского случая комплексные числа. При этом каждое весовое абсолютно твердое звено или участок звена описывается одним комплексным числом. В пространственном случае каждое звено описывается одним кватернионом. Работа с комплексными числами и кватернионами более рациональна, в сравнении с выписываемыми в явном виде матрицами перехода. В работе оценена эффективность работы созданных методов применения комплексных чисел и кватернионов при создании математических моделей плоских и пространственных мехатронных систем в виде экзоскелетов с человеком внутри, активными приводами и управляемыми абсолютно твердыми и звеньями переменной длины с точки зрения трудоемкости выполняемых преобразований и затрат времени, в сравнении с матрицами относительного поворота локальных систем координат.

Ключевые слова: эффективность, звено переменной длины, абсолютно твердое звено, антропоморфный механизм, комплексные функции, гиперкомплексная алгебра, локальные системы координат, матрицы относительного поворота.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blinov A.O., Borisov A.V., Mukharlyamov R.G., Novikova M.A. *Exoskeleton Dynamics Simulation with the System of Three Variable-Length Links of Adjustable Stiffness*, Mechanics of Solids, Reston (2024), Vol. 59, No. 1, pp. 156–166.

DOI: 10.1134/S0025654423600770

[2] Mukharlyamov R., Kaspirovich I., Borisov A., Maslova K., Borisova V. 3D Model of the Upper Limb Link of a Variable-Length Exoskeleton with Controlled Rigidity and a Movable Pole for Construction Workers, *Hydraulic and Civil Engineering Technology X. Proceedings of the 10th International Technical Conference*, (2025), Xiamen, China, 26-28 September 2025. P. 1249 – 1254. DOI 10.3233/ATDE251371

О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Р.Г. МУХАРЛЯМОВ¹, И.Е. КАСПИРОВИЧ², Ж.К. КИРГИЗБАЕВ³

^{1,2}Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

³Южно-Казахстанский университет имени М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

robgar@mail.ru

Основной задачей моделирования динамики систем управления, содержащих элементы различной физической природы, является построение систем дифференциально-алгебраических уравнений, решения которых обладают требуемыми свойствами. В классической механике уравнения движений обычно следуют из принципов механики и могут быть получены с использованием систем аналитических вычислений [1]. Известные уравнения динамики несвободных систем, содержащих множители Лагранжа, не обеспечивают асимптотическую устойчивость интегрального многообразия, соответствующего уравнениям связей [2]. Стабилизация связей возможна только в том случае, когда уравнения возмущений связей имеют асимптотически устойчивое тривиальное решение.

В докладе излагаются методы построения уравнений динамики управляемого твердого тела переменной массы. Рассматривается решение обратных задач динамики твердого тела

переменной массы с гироскопом в случае Лагранжа. Задачи моделирования динамики систем с переменной массой исследуются в [3]. По известным интегралам уравнений движений устанавливаются выражения приложенных к телу сил. В случае, когда заданные функции являются первыми интегралами уравнений движений, найдены частные решения и получены условия асимптотической устойчивости соответствующего перманентного вращения. Известно, что при определенных допущениях уравнение движения тела переменной массы допускают определенные интегралы. По заданным выражениям интегралов могут быть определены динамические свойства тела и поле сил, в котором движение тела обладает указанными свойствами. Приводятся уравнения движений тела переменной массы, указываются первые интегралы предельных уравнений, используемые для исследования устойчивости некоторых частных движений, которые соответствуют классическим случаям решения задачи движения твердого тела с неподвижной точкой.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, № 25-21-00153 (<https://rscf.ru/project/25-21-00153/>)

Ключевые слова: задача, динамика, уравнение, программная связь, стабилизация, управление.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Blinov, A. V. Borisov, R. G. Mukharlyamov, and M. A. Novikova. *Exoskeleton dynamics simulation with the system of three variable-length links of adjustable stiffness*. Mech. Solids 59 (1), 156–166 (2024).
2. Мухарлямов Р. Г., Киргизбаев Ж. К. *Modeling of dynamics processes and dynamics control*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 2 (114), 2024, pp. 165–177.
3. Мухарлямов Р. Г., Киргизбаев Ж. К. *Управление программным движением и обратные задачи динамики систем переменной массы*. М.: Изд. РУДН, 2020. 208 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ОТКРЫТЫХ КАНАЛОВ С МАКСИМАЛЬНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ

Е.А. НЫСАНОВ¹, С.Е. КОЖАБАЕВ²

Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
shsabor@mail.ru

В работе исследуется влияние формы поперечного сечения открытого канала на его пропускную способность при установившемся течении воды. Рассматриваются полукруглое, полуэллиптическое и параболическое сечения. Математическая модель основана на стационарном уравнении Навье–Стокса для продольной скорости потока с условиями прилипания на дне и стенках канала и условием отсутствия касательного напряжения на свободной поверхности. Сравнивая расходы для различных поперечных сечений между собой при равных площадях, определяем оптимальное сечение с максимальным расходом.

За последние годы в гидродинамике и гидравлике достигнуты определённые успехи в области исследований влияния формы поперечного сечения открытого канала на его течение [1]. В научной литературе и инженерных исследованиях есть работы, которые прямо или косвенно касаются оптимизации формы поперечного сечения открытых каналов для максимальной пропускной способности, минимизации потерь, смоченного периметра и других характеристик.

В работе [2] на основе эмпирических формул и экспериментальных данных было выведено общее выражение для пропускной способности и получен параметр, описывающий влияние формы поперечного сечения на пропускную способность. Для описания формы поперечного сечения было выбрано отношение ширины к смоченному периметру.

В концепции оптимального проектирования [3] геометрические размеры поперечного сечения канала определяются таким образом, чтобы минимизировать общие затраты на строительство. Такие инженерные подходы [4] не учитывают реальное распределение скорости в поперечном сечении.

В данной работе используется более строгий гидродинамический подход, основанный на решении краевой задачи для уравнения Навье–Стокса. Особенностью настоящего исследования является то, что теоретические выводы о преимуществе тех или иных форм напрямую сопоставляются с численными полями скорости, полученными для конкретных геометрий: полукруга, полуэллиптического и параболического канала.

Постановка задачи. Математическая модель основана на стационарном уравнении Навье–Стокса для продольной скорости потока с условиями прилипания на дне и стенках канала и условием отсутствия касательного напряжения на свободной поверхности (вертикальной и поперечной составляющими пренебрегаем, так как в открытых каналах основную роль играет продольная скорость).

Требуется определить оптимальное поперечное сечение открытого канала с максимальным расходом. Рассматриваются полукруглое, полуэллиптическое и параболическое сечения при одинаковых площадях.

Вводится декартова система координат: ось x направлена вдоль потока; ось y направлена вертикально вверх от дна канала; ось z направлена в поперечном направлении.

Дно канала соответствует $y = 0$, свободная поверхность потока $y = H_0$. Граница канала в поперечном направлении определяется уравнением $z = \pm\varphi(y)$, где функция $\varphi(y)$ задаёт форму поперечного сечения.

Полуэллиптическое сечение:

$$\varphi(y) = e\sqrt{1 - \frac{(y - H_0)^2}{H_0^2}},$$

где e — полуось эллипса в направлении оси z .

Полукруглое и параболические сечения:

$$\varphi(y) = \sqrt{H_0^2 - (y - H_0)^2}, \quad \varphi(y) = a\sqrt{\frac{y}{H_0}},$$

где a — параметр параболы.

В результате получаем краевые условия:

$$u = 0, \quad \text{при } y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = H_0, \quad u = 0, \quad \text{при } z = \pm\varphi(y).$$

Методы решения. Для решения полученного дифференциального уравнения в частных производных (по y и z) второго порядка с соответствующими краевыми условиями использован метод конечных разностей и итерационный метод Гаусса–Зейделя.

Результаты. Расход потока через найденную продольную скорость определяется следующим образом:

$$Q = \int_0^{H_0} \int_{-\varphi(y)}^{\varphi(y)} u \, dy \, dz$$

Сравнивая расходы для различных поперечных сечений между собой при равных площадях, определяем оптимальное сечение с максимальным расходом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нысанов Е.А. Моделирование и методы расчета совместной задачи течения воды в открытых каналах и пористой среде при неполном насыщении. Монография. ЮКГУ им. М.Аuezova, Шымкент, 2012. - 174 с.

[2] Chunlin Qiu, Shihe Liu, Jiesheng Huang, Wenhao Pan and Rui Xu. Influence of Cross-Sectional Shape on Flow Capacity of Open Channels, *Water* 2023, <https://doi.org/10.3390/w15101877>

[3] Ayman T. Hameed. Optimal design of round bottomed triangle channels , in: *Tikrit Journal of Eng.Sciences*, Vol.17, № 3, 2010. 41-43

[4] Noriaki Ohara, Katsu Yamatani. Theoretical Stable Hydraulic Section based on the Principle of Least Action, *Sci Rep.* 2019 May 28;8:7957. doi: 10.1038/s41598-019-44347-4

СТАБИЛЬНОСТЬ ОБУЧЕНИЯ И АРХИТЕКТУРА АСТОР-CRITIC В ГЛУБОКОМ ОБУЧЕНИИ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

О.М. ОЛЖАЕВ¹, А.З. ИКРАМОВ²

^{1,2}Институт механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

Международный Университет Информационных Технологий, Алматы, Казахстан

o.olzhaev@gmail.com

Обучение с подкреплением (Reinforcement Learning, RL) является одним из базовых подходов к решению задач оптимального управления и принятия решений в условиях неопределённости. В методах глубокого обучения с подкреплением (Deep Reinforcement Learning, Deep RL) стратегия агента аппроксимируется нейронной сетью, что позволяет работать с высокоразмерными пространствами состояний и действий. Однако такой подход приводит к ряду проблем устойчивости обучения, связанных с нестационарностью данных и особенностями градиентной оптимизации.

Целевая функция обучения в RL формулируется как задача максимизации математического ожидания суммарной дисконтированной награды

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_{\theta}} \left[\sum_{t=0}^T \gamma^t r_t \right], \quad (1)$$

где $\pi_{\theta}(a | s)$ – параметризованная стратегия, а $\gamma \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования. В Deep RL обновление параметров θ оказывает глобальное влияние на стратегию, что делает процесс обучения особенно чувствительным к ошибкам градиента.

Одной из ключевых причин нестабильности является коррелированность последовательных наблюдений. В отличие от классического обучения нейросетей, состояния среды s_t и s_{t+1} не являются независимыми. Более того, распределение данных зависит от самой стратегии π_{θ} , что приводит к нестационарности задачи оптимизации и может вызывать катастрофическое забывание ранее выученных стратегий.

Дополнительную проблему создаёт высокая дисперсия оценок градиента в методах прямой оптимизации политики. В алгоритме REINFORCE градиент целевой функции имеет вид

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_{\theta}} [\nabla_{\theta} \log \pi_{\theta}(a_t | s_t) G_t], \quad (2)$$

где G_t – суммарная награда эпизода. Большая дисперсия G_t приводит к шумным и неустойчивым обновлениям параметров.

Для снижения дисперсии используется архитектура Actor-Critic, в которой вводится аппроксимация функции ценности состояния

$$V(s) = \mathbb{E}_{\pi} \left[\sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r_k \mid s_t = s \right]. \quad (3)$$

Обновление стратегии осуществляется через функцию преимущества

$$A(s_t, a_t) = r_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t), \quad (4)$$

что позволяет учитывать локальное качество выбранного действия и центрировать градиент обновления.

Даже при использовании Actor-Critic чрезмерно большие обновления параметров могут приводить к разрушению политики. В алгоритме Proximal Policy Optimization (PPO) вводится отношение вероятностей

$$r_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t | s_t)}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t | s_t)}, \quad (5)$$

которое используется для ограничения шага оптимизации и повышения устойчивости обучения.

Для предотвращения преждевременной сходимости к детерминированной стратегии в функцию потерь добавляется энтропийная регуляризация

$$H(\pi_\theta) = -\mathbb{E}_{\pi_\theta}[\log \pi_\theta(a | s)], \quad (6)$$

поощряющая исследование среды на ранних этапах обучения.

Таким образом, архитектура Actor-Critic, ограничение шага обновления в PPO и энтропийная регуляризация позволяют существенно повысить устойчивость обучения в задачах глубокого обучения с подкреплением и лежат в основе большинства современных алгоритмов Deep RL.

Финансирование: Работа выполнена в рамках программно-целевого финансирования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (номер гранта: BR24992947).

Ключевые слова: обучение с подкреплением, глубокое обучение, Actor-Critic, Proximal Policy Optimization, устойчивость обучения.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sutton R. S., Barto A. G. *Reinforcement Learning: An Introduction*, MIT Press, 2018.
- [2] Williams R. J. *Simple statistical gradient-following algorithms for connectionist reinforcement learning*, Machine Learning. 1992. Vol. 8. P. 229-256.
- [3] Konda V. R., Tsitsiklis J. N. *Actor-Critic algorithms*, Advances in Neural Information Processing Systems. 2000. P. 1008-1014.
- [4] Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. *Proximal Policy Optimization Algorithms*, arXiv:1707.06347, 2017.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ ВАКУУМ-СУБЛИМАЦИОННОЙ СУШИЛКИ

А.Б. РАХМАТУЛИНА¹, Н.С. ИМАНБАЕВА², Д.К. СМАГУЛОВ³,
Ж.Ж. ОМИРБЕКОВА⁴, А. МОЛДАШЕВ⁵

^{1,2,3,4,5}Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы,
Казахстан

ayaurakhmatulina@gmail.com

Вакуумная сублимационная сушка (лиофилизация) является одним из наиболее щадящих методов удаления влаги, при котором лёд при пониженном давлении переходит в пар, минуя жидкую фазу, что позволяет максимально сохранить структуру белков, аминокислот и термолабильных витаминов [1–3]. Этот метод особенно важен для кобыльего и верблюжьего молока, содержащих лактоферрин, иммуноглобулины и казеиновые фракции, чувствительные к нагреву выше 50 °С [4–6]. Для предотвращения денатурации белков и потери функциональности продукта в проекте реализована многоуровневая автоматизированная система управления

контроль; направляющие и фиксаторы съёмных поддонов, смотровое окно, освещение, ИК-датчики.

Основные характеристики FD-4.1: масса — 398,56 кг; объём — 50 248 700 мм³; площадь поверхности — 14,14 м²; рабочее давление — до 10⁻² мм рт. ст; диапазон температур эксплуатации — -50...+70 °С.

Материалы: корпус/силовые элементы — легированная сталь ($\sigma_T \approx 250$ МПа); внутренние панели — нержавеющая сталь AISI 304; внутренние поверхности полированы (санитарные требования и облегчение мойки).

Сборка и контроль качества: герметичность обеспечивается сплошной сваркой и вакуум-проверкой; соединения проходят УЗК и визуальный контроль; предусмотрена возможность подключения к СІР-мойке без разборки.

С целью повышения производительности и технологичности разработана концепция нового оборудования (серия FD-5.x) на базе цифрового прототипа в Autodesk Inventor. Цели модернизации: повышение энергоэффективности и компактности; увеличение производительности за счёт оптимизации компоновки поддонов и нагревательных пластин; улучшение санитарной обработки (СІР-мойка, доступность элементов обслуживания).

Выводы. Таким образом, цифровое проектирование установки вакуум-сублимационной сушки в Autodesk Inventor 2020 обеспечило выпуск полного комплекта ПКД по ЕСКД/ЕСТД, создание 3D-моделей ключевых узлов (FD-4.x) и разработку 3D-модели системы автоматизации участка. Полученный цифровой прототип позволяет: ускорить изготовление опытного образца за счёт точной компоновки и спецификаций; снизить риск монтажных коллизий (трубопроводы/кабельные трассы/каркас).

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (№ BR21881957).

Ключевые слова: вакуум-сублимационная сушка, кобылье молоко, верблюжье молоко, 3D-модель, Autodesk Inventor, ПКД, ЕСКД, автоматизация, конденсатор льда.

2020 Mathematics Subject Classification: 80A22, 93C95, 70B15

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowak D., Jakubczyk E. The Freeze-Drying of Foods—The Characteristic of the Process Course and the Effect of Its Parameters on the Physical Properties of Food Materials. *Foods*, **9** (2020), 1488.
- [2] Liu Y., Zhang Z., Hu L. High efficient freeze-drying technology in food industry. *Crit Rev Food Sci Nutr*, **62**:12 (2022), 3370–3388.
- [3] Rakhmatulina A. et al. Numerical Simulation and Experimental Analysis of Mare's Milk Sublimation Drying. *Processes*, **13** (2025), 206.
- [4] Đaković D., Kljajić M., Milivojević N., Doder Đ., Anđelković A.S. Review of Energy-Related Machine Learning Applications in Drying Processes. *Energies*, **17** (2023), 224.
- [5] Konuspayeva G., Faye B. Recent Advances in Camel Milk Processing. *Animals*, **11** (2021), 1045.
- [6] DVT-05-K sensor passport. URL: <https://file.aketo.kz/avtor/relsib/dvt/dvt-05-k-n-pass.pdf>
- [7] Aliyev B., Zhabayev N. Stress in pipe systems. *ANSYS Reports* (2023).
- [8] Massei A., Falco N., Fissore D. NIR-Based Real-Time Monitoring of Freeze-Drying Processes: Application to Fault and Endpoint Detection. *Processes*, **13** (2025), 452.
- [9] Sajjad U. et al. Machine learning enabled assessment of the vacuum freeze-drying of the kiwifruit. *Information Processing in Agriculture* (2024).

О МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

А. САПАРМУРАДОВ

Туркменский государственный университет, Ашхабад, Туркменистан

saparmuradow1958@gmail.com

Исследуются множества достижимости одномерной параболической системы, когда управляющие воздействия входят в граничные условия и принадлежат банаховым пространствам $L_p[0, T]$ и $C[0, T]$. Вводится специальное пространство последовательностей для исследования множества достижимости рассматриваемых систем. В этом пространстве устанавливается свойство компактности множества последовательностей, определяемого моментными соотношениями соответствующих систем. Указывается пространство функций, в котором существует элемент, соответствующий элементу из пространства последовательностей. Полученные результаты позволяют указать необходимое условие разрешимости проблемы моментов. Доказано, что область значений оператора A не заполняет всё пространство l_p^α , т.е. существуют элементы, которые недостижимы. Указано пространство, где имеет место свойство компактности множества последовательностей, определяемого моментными соотношениями соответствующих систем, когда управляющие воздействия принадлежат пространству непрерывных функций. Доказанное необходимое условие разрешимости проблемы моментов верно и для этого случая. Исследовано свойство компактности множества последовательностей, определяемого моментными соотношениями параболических систем, описываемых первой краевой задачей. В теории управляемости большой интерес представляет исследование множества достижимости (принадлежность определённому классу функций, свойства замкнутости, ограниченности, компактности этого множества). Исследуется множество достижимости управляемой линейной одномерной параболической системы.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), \quad \psi_x(0, t) = 0, \quad \psi_x(1, t) + h\psi(1, t) = u(t), \quad h = \text{const} > 0. \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция из $L_2(0, 1)$, управление $u(t) \in L_p(0, T)$, $1 \leq p < \infty$.

За класс допустимых управлений возьмем функции $u(t) \in L_p(0, T)$. Каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует функция $\psi^T(x)$, определяемая решением задачи (1)–(2) по формуле $\psi(x, T) = \psi^T(x)$. Решение задачи сведём к проблеме моментов [1]:

$$\int_0^T \exp[\lambda_k^2(t - T)] u(t) dt = b_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

где

$$b_k = X_k^{-1}(1) [\psi_k^T - \varphi_k \exp(-\lambda_k^2 T)].$$

Для заданного класса управлений $u(t)$ по моментным соотношениям (3) требуется исследовать, какими свойствами обладает множество последовательностей $\{b_k\}$, определяемое равенствами (3). Не теряя общности, положим $\varphi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Соотношения (3) запишем в операторной форме: $Au = b$. Введём пространство l_p^α последовательностей $\{b_k\}$, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha |b_k|^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Норму в l_p^α определим по формуле $\|b\| = (\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha |b_k|^p)^{1/p}$ [2].

Теорема 1. Если допустимые управления $u(t)$ образуют ограниченное множество U в пространстве $L_p[0, T]$, то соответствующее им множество последовательностей $\{b_k\}$, определяемое моментными соотношениями (3) системы (1) – (2), является компактным в пространстве l_p^α , $\alpha < 2p - 3$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. М.: Наука, 1978, -463 с.

[2] Сапармуратов А. *О множестве достижимости управляемых параболических систем*. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1988, -105 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЛАТФОРМОЙ СТЮАРТА

А.Ж. СЕЙДАХМЕТ¹, А.К. ТУЛЕШОВ², М.Ж. ҚАЛИЕВ³, В.И. ЗЕМЦОВ⁴,
Н.Е. ҚҰМАРБЕК⁵

*Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, г. Алматы,
Казахстан*

seydakhmet@mail.ru

Платформа Стюарта (ПС) является параллельным манипулятором, состоящим из двух платформ (основания и подвижной верхней платформы), соединенных шестью независимыми приводами (ногами), обеспечивающий 6 степеней свободы (3 поступательных и 3 вращательных движения). ПС широко применяется как авиасимулятор, в станках и позиционировании телескопов. В отличие от последовательных роботов, здесь все приводы соединены параллельно между основанием и платформой, что обеспечивает высокую жесткость, грузоподъемность и точность. Платформа может двигаться вверх-вниз, влево-вправо, вперед-назад, а также вращаться вокруг трех осей (крен, тангаж, рыскание). Основными преимуществами ПС являются:

- высокая грузоподъемность: нагрузка распределяется сразу на шесть опор;
- жесткость: конструкция очень стабильна и устойчива к вибрациям;
- точность: ошибки отдельных актуаторов не накапливаются, а усредняются.

Для приведения в движение верхней платформы используются шесть линейных приводов (гидравлических или электрических), прикрепленных с помощью шарниров, длина которых меняется для изменения ориентации платформы. Особый интерес представляют ПС с электрическими приводами, которые перемещают ноги с постоянной длиной с помощью прикрепленных к валу серводвигателей кривошипов (рисунок 1).

На рисунке 1 показана схема ПС с 2 платформами, 6 ногами, 6 рычагами и имеет 6 степеней свободы и 6 сервоприводов.

Как видно из рисунка 1, кривошипная ПС состоит из неподвижной платформы 1, подвижной платформы 2, шести ног 3, шести рычагов 4 и шести сервоприводов 5. Ноги соединяются к подвижной платформе с помощью сферического шарнира, а к кривошипам шарнирами. Направление вращения, а также скорость вращения лебедок с сервоприводами 4 задается блоком управления 6. Сервоприводы соединяются с микропроцессором Arduino 6, который далее соединяется с компьютером 7.

Математическая модель необходима для разработки системы управления ПС.

Для создания математической модели рассматриваются уравнения обратной кинематики ПС.

Решение задачи обратной кинематики для платформы Стюарта с кривошипным приводом (когда вместо раздвижных ног используются сервоприводы с качалками) сводится к нахождению углов поворота каждого сервомотора θ_i , при которых платформа примет заданное положение.

1. Геометрия одной «ноги»

Для каждой из 6 ножек (где $i = 1, \dots, 6$) мы имеем векторную цепь. Пусть:

- B_i — координаты точки крепления сервопривода неподвижной платформе.
- P_i — координаты точки крепления тяги на подвижной платформе в локальной системе координат.

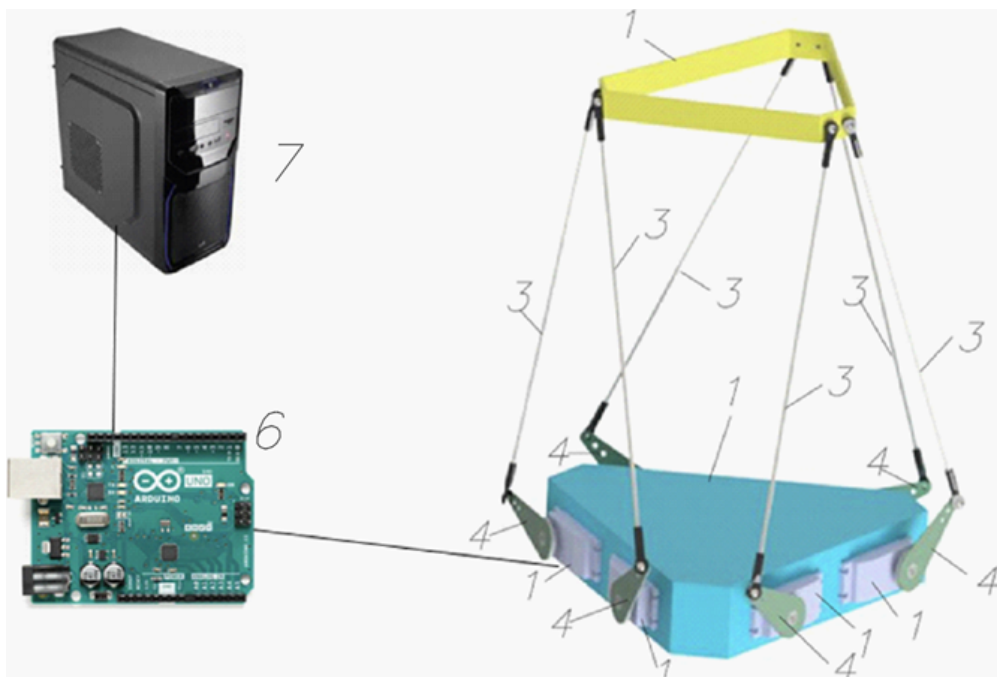


Рис. 1: Платформа Стюарта с системой управления

- T — вектор смещения центра платформы.
- R — матрица вращения платформы.
- a — длина кривошипа.
- s — длина ноги.

Для определения координат точек крепления сначала найдем положение точек крепления на неподвижной платформе в глобальной системе координат:

$$Q_i = T + R \cdot P_i. \quad (1)$$

Вектор L_i направленный вдоль i -той ноги, соединяющий точку крепления на базе с точкой на платформе имеет вид:

$$L_i = Q_i - B_i. \quad (2)$$

Положение конца кривошипа (точки сочленения с тягой) A_i можно выразить через угол θ_i . Если сервопривод вращается в плоскости, перпендикулярной базе, то:

$$A_i = B_i + a(\cos \theta_i \cdot u_i + \sin \theta_i \cdot v_i). \quad (3)$$

Где коэффициенты зависят от координат Q_i и параметров конструкции:

- $G_i = \|L_i\|^2 - (s^2 - a^2) = s^2$;
- E_i, F_i — определяются геометрической ориентацией сервопривода.

Уравнение решается методом половинного угла:

$$\theta_i = \arcsin \left(\frac{G_i}{\sqrt{E_i^2 + F_i^2}} \right) - \text{atan2}(E_i, F_i). \quad (4)$$

Для реализации обратной кинематики ПС с кривошипным приводом в MATLAB [1], необходимо создать функцию, которая принимает на вход целевое положение (смещения X, Y, Z и углы Эйлера φ, θ, ψ) и возвращает углы поворота сервоприводов θ_i .

Выводы

Описанный в статье алгоритм нахождения углов поворота сервоприводов θ_i позволяет создать программу управления ПС для выполнения всех 6 движений - перемещения X, Y, Z и углы поворота φ, θ, ψ подвижной платформы.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (№BR31715767, № AP23490163).

Ключевые слова: платформа Стюарта, параллельный робот, обратная кинематика, подвижная платформа, математическая модель.

ЛИТЕРАТУРА

[1] MATLAB/Simulink. URL: <https://www.mathworks.com/products/simulink.html> (accessed on 10 January 2026).

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН, СТРОГО ОБОСНОВАННОЙ ПОСТАНОВКОЙ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КОЛЕБАНИЯ

А.Ж. СЕЙТМУРАТОВ¹, Ж.Е. НАКИПБЕК²

Кызылординский университет им. Қорқыт Ата, Кызылорда, Казахстан

¹angisin@mail.ru, ²zhenisbek.nakypbek99@gmail.com

В данной работе развивается теория колебания слоистых пластин, строго обоснованной постановкой различных краевых задач колебания.

Плоские элементы являются составляющими многих конструкций. Построение общих и приближенных уравнений колебания различного вида плоских элементов представляет актуальную проблему в разработке теоретических основ расчета различных конструкций. К таким проблемам относятся задачи совершенствования моделей нестационарного характера конструкций и их элементов, материалы которых проявляют сложные механические, реологические свойства, присущие различным конструкциям при влиянии различных внешних факторов.

Пусть имеется трехслойная безграничная в плане пластинка из вязкоупругого материала, причем срединная составляющая толщины $2h_0$, а верхняя и нижняя составляющие толщиной $(h_1 - h_0)$ и состоят из одного и того же материала.

Такую трехслойную пластинку будем считать слоистой средой той же структуры, при этом параметры материала среднего слоя обозначим индексом "0", а параметры верхнего и нижнего слоя индексом "1".

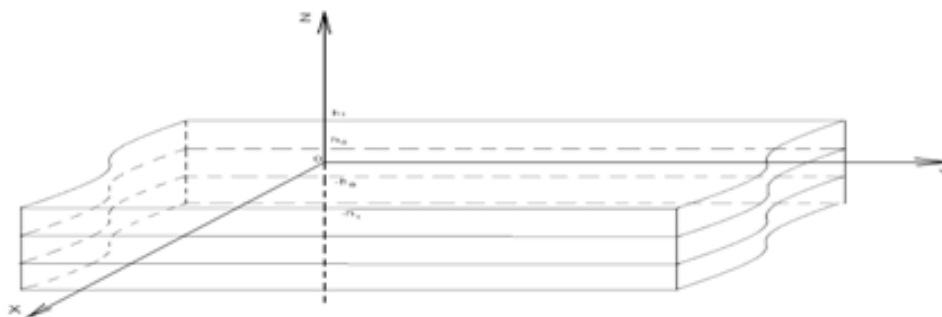


Рис. 1: Уравнения движения материала слоев принимают вид

$$N_l \left(\Delta \Phi^{(l)} \right) = \rho_l \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial t^2}; \quad M_l \left(\Delta \vec{\Psi}^{(l)} \right) = \rho_l \frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(l)}}{\partial t^2}; \quad N_l = L_l + 2M_l \quad (1)$$

При формулировке граничных условий будем предполагать, что в плоскости раздела неоднородности слои находятся в жестком контакте, а верхняя и нижняя поверхности плоские.

Решения уравнений движения (1) будем искать в виде

$$\Phi^{(l)} = \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \sin(kx) \\ -\cos(kx) \end{array} \right\} dk \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \sin(qy) \\ -\cos(qy) \end{array} \right\} dq \int_{(l)} \Phi_0^{(l)} e^{pt} dp, \quad (2)$$

$$\Psi_1^{(l)} = \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \sin(kx) \\ -\cos(kx) \end{array} \right\} dk \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \cos(qy) \\ \sin(qy) \end{array} \right\} dq \int_{(l)} \Psi_{10}^{(l)} e^{pt} dp, \quad (3)$$

$$\Psi_2^{(l)} = \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{array} \right\} dk \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \sin(qy) \\ -\cos(qy) \end{array} \right\} dq \int_{(l)} \Psi_{20}^{(l)} e^{pt} dp, \quad (4)$$

$$\Psi_3^{(l)} = \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{array} \right\} dk \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} \cos(qy) \\ \sin(qy) \end{array} \right\} dq \int_{(l)} \Psi_{30}^{(l)} e^{pt} dp. \quad (5)$$

Подставляя (2) в уравнения (1), для $\Phi_0^{(l)}$ и $\Phi_1^{(l)}$ получаем уравнения

$$\frac{d^2 \Phi_0^{(l)}}{dt^2} - \alpha_l^2 \Phi_0^{(l)} = 0; \quad \frac{d^2 \Psi_{i0}^{(l)}}{dt^2} - \beta_l \Psi_{i0}^{(l)} = 0; \quad (6)$$

Общие решения уравнений (2) строятся обычным способом и имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(l)} &= A_1^{(l)} \operatorname{ch}[\alpha_l(z - z_l)] + A_2^{(l)} \operatorname{sh}[\alpha_l(z - z_l)], \quad \Psi_{10}^{(l)} = B_{11}^{(l)} \operatorname{sh}[\beta_l(z - z_l)] + B_{12}^{(l)} \operatorname{ch}[\beta_l(z - z_l)], \\ \Psi_{20}^{(l)} &= B_{21}^{(l)} \operatorname{sh}[\beta_l(z - z_l)] + B_{22}^{(l)} \operatorname{ch}[\beta_l(z - z_l)], \quad \Psi_{30}^{(l)} = B_{31}^{(l)} \operatorname{ch}[\beta_l(z - z_l)] + B_{32}^{(l)} \operatorname{sh}[\beta_l(z - z_l)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Имея общие решения (4), для преобразованных перемещений $u_0^{(l)}$; $v_0^{(l)}$; $w_0^{(l)}$ точек слоев получаем выражения

$$\begin{aligned} u_0^{(l)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[k \alpha_l^{2n} A_1^{(l)} - \left(\beta_l B_{21}^{(l)} + q B_{31}^{(l)} \right) \beta_l^{2n} \right] \frac{(z - z_l)^{2n}}{(2n)!} + \right. \\ &\quad \left. \left[k \alpha_l^{2n+1} A_2^{(l)} - \left(\beta_l B_{22}^{(l)} + q B_{32}^{(l)} \right) \beta_l^{2n+1} \right] \frac{(z - z_l)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\}; \\ v_0^{(l)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[q \alpha_l^{2n} A_1^{(l)} + \left(\beta_l B_{11}^{(l)} + k B_{31}^{(l)} \right) \beta_l^{2n} \right] \frac{(z - z_l)^{2n}}{(2n)!} + \right. \\ &\quad \left. \left[q \alpha_l^{2n+1} A_2^{(l)} - \left(\beta_l B_{22}^{(l)} + k B_{32}^{(l)} \right) \beta_l^{2n+1} \right] \frac{(z - z_l)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\}; \\ w_0^{(l)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_l^{2n+2} A_1^{(l)} + \left(q B_{11}^{(l)} + k B_{21}^{(l)} \right) \beta_l^{2n+1} \right] \frac{(z - z_l)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \right. \\ &\quad \left. \left[\alpha_l^{2n+1} A_2^{(l)} + \left(q B_{12}^{(l)} - k B_{22}^{(l)} \right) \beta_l^{2n} \right] \frac{(z - z_l)^{2n}}{(2n)!} \right\}; \end{aligned} \quad (5)$$

при этом гиперболические функции в (4) представлялись в виде степенных рядов по аргументу.

В классической постановке за искомые функции берутся перемещения и деформации точек срединной плоскости $z = 0$.

Аналогично этому вместо постоянных интегрирования $A_j^{(l)}, B_{jk}^{(l)}$ в решении для внутреннего и внешних слоев введем неизвестные

Не трудно видеть, что для смещений получены лишь при решении уравнений (1) с учетом нулевых начальных условий и они являются общими решениями задачи Коши, причем выражены через шесть произвольных функций $u^{(l)}, v^{(l)}, w^{(l)}, U_1^{(l)}, V_1^{(l)}, W_1^{(l)}$ для каждого из слоев. Зная выражения для смещений через произвольные функции получаем аналогичные выражения для напряжений.

Среди всех неизвестных, которых в общем случае двенадцать, независимыми являются шесть. В качестве основных неизвестных возьмем неизвестные для внутреннего слоя, и тогда из граничных условий получим зависимости $U^{(l)}, V^{(l)}, W^{(l)}, u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$.

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= u^{(0)}, & V^{(1)} &= v^{(0)}, & W^{(1)} &= w^{(0)}, \\ U_1^{(1)} &= M_1^{-1} \sigma_{xz}^{(0)} - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}; & V_1^{(1)} &= M_1^{-1} \sigma_{yz}^{(0)} - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}; \\ W^{(1)} &= N_1^{-1} \sigma_{zz}^{(0)} + (1 - D_1)(1 + C_2) \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Полученная система описывает, в общем случае, колебания слоистой среды или слоистой (кусочно-однородной) пластинки.

В общем случае трехслойной пластинки выкладки для вывода общих и приближенных уравнений ее колебания весьма громоздки, однако для такой пластинки имеют место как чисто продольное, так и чисто поперечное колебание.

Ключевые слова: слоистые пластины, вязкоупругость, колебания, краевые задачи, математическая модель.

2020 Mathematics Subject Classification: 74K20, 74J05, 74D05

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Филиппов И.Г., Чебан В.Г. *Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней*, Кишинев: Штиинца, 1988. 190 с.
- [2] Seitmuratov A., Tileubay S., Toxanova S., Ibragimova N., Doszhanov B., Aitimov M.Zh. *The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid boundaries*, News of NAS RK. Series of physico-mathematical sciences, 2018, No. 5(321), pp. 42–48.
- [3] Филиппов И.Г. *Приближенный метод решения динамических задач для вязкоупругих сред*, ПММ, т. 43, № 1, 1979, с. 133–137.
- [4] Филиппов И.Г., Ишрипкулов Т.Ш., Мирзанабилов С.М. *Нестационарные колебания линейных упругих и вязкоупругих сред*, Ташкент: ФАН УзССР, 1909.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И РОБИНА

А. ТАШЕВ

Институт Механики и Машиноведения им. Академика У. А. Джолдасбекова

Рассмотрим определение закона распределения температуры на тонкой пластине, когда на одной (левой) грани пластины задаётся температура, а на другой (противоположной) правой – происходит теплообмен с окружающей средой, а другие грани теплоизолированы.

Математическая постановка задачи сводится к решению дифференциального уравнения

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

при ограничениях

- Дирихле (на левой грани)

$$T = T_L \text{ на левой грани } \Gamma_L, \quad x = 0,$$

- Робина (на правой грани)

$$k \frac{\partial T}{\partial x} - h(T - T_{oc}) = 0 \text{ на правой грани } \Gamma_R, \quad x = L.$$

где k – коэффициент теплопроводности; h – коэффициент теплоотдачи; T_{oc} – температура окружающей среды; L – длина и ширина пластины.

Решение этой задачи вариационным методом сводится к минимизации функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} h(T - T_{oc})^2 d\Gamma.$$

Пластина разбивается на определённое количество элементов (треугольников), и в каждом элементе e температура аппроксимируется функцией

$$T^e(x, y) = N_i^e(x, y)T_i^e + N_j^e(x, y)T_j^e + N_k^e(x, y)T_k^e,$$

где

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2A} \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}, \quad N_j^e(x, y) = \frac{1}{2A} \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{pmatrix},$$

$$N_k^e(x, y) = \frac{1}{2A} \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}.$$

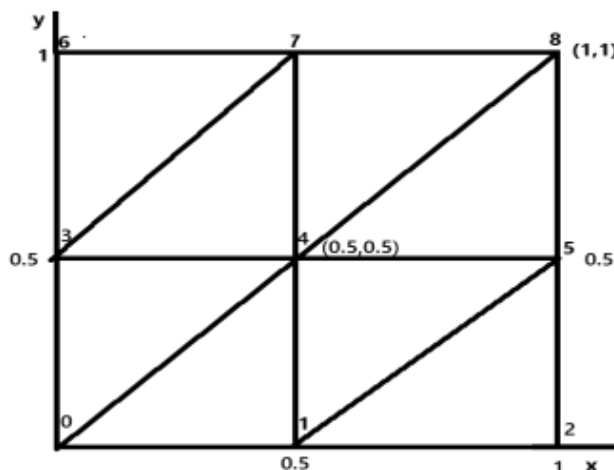


Рис. 1: Пример разбиения пластины на 8 треугольников

После взятия производной функционала J по T_i , T_j , T_k по значениям на угловых точках по всем элементам e и приравнивания к нулю, получим систему линейных уравнений

$$\mathbf{KT} = \mathbf{A}, \quad (2)$$

Для того чтобы построить общую матрицу $\mathbf{K}$, начинаем с нулевой матрицы. Потом добавляем элементы из матрицы, построенной для соответствующих треугольников.

Далее, учитываем температуру на левом конце. Пусть в соседних узлах i и j задана температура T_i и T_j . Тогда i -ый столбец и i -ую строку в матрице $\mathbf{K}$ удаляем. Во всех других строках l по i -му столбцу элемент $K_{li}T_i$ переносим в правую часть. То же самое проделываем и со строкой и столбцом j . Число уравнений уменьшается на два.

Пример 1. Рассмотрим разбиение пластины на 8 одинаковых треугольников (см. рис. 1). Длина пластины $L = 1$ м, $h = 10$ Вт/(м²·°C), $k = 1$ Вт/(м·°C), температура на левой грани $T_0 = 100$ °C, $T_{oc} = 20$ °C.

Пусть заданы температуры в узлах $(0,3,6)$: $T_0 = T_3 = T_6 = 100$ °C. Тогда получаем систему уравнений, решением которой относительно температуры является

$$T_0 = T_3 = T_6 = 100 \text{ °C}, \quad T_1 = T_4 = T_7 = 63.63 \text{ °C}, \quad T_2 = T_5 = T_8 = 27.27 \text{ °C},$$

то есть температура уменьшается при переходе от левой грани к правой.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31715767).

Ключевые слова: метод конечных элементов, уравнение теплопроводности, граничные условия Дирихле и Робина, температурное поле.

2020 Mathematics Subject Classification: 65N30, 80M10

АНАЛИЗ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ БИТУМОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТИПА И КОНЦЕНТРАЦИИ МОДИФИЦИРУЮЩЕГО ПОЛИМЕРА

Б.Б. ТЕЛТАЕВ¹, А.М. КАДЫР²

¹Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

²ТОО “QAZAQ BITUM Processing”, Шымкент, Казахстан

kadyr.a@qazaqbitum.kz

Ключевые слова и словосочетания: полимерно-модифицированный битум; стирол-бутадиен-стирол (СБС); физико-механические характеристики.

В работе представлен анализ влияния типа и концентрации модифицирующего полимера на формирование физико-механических характеристик полимерно-модифицированных битумов. Рассмотрены термоэластопласты на основе стирол-бутадиен-стирольных блок-сополимеров (СБС) линейной и радиальной структуры при различных уровнях дозирования.

Установлено, что изменение вида полимера оказывает существенное влияние на процессы структурообразования в битумной матрице, формирование эластомерной сетки и степень фазовой совместимости компонентов. Увеличение концентрации модификатора приводит к росту температуры размягчения, повышению упруго-эластических характеристик и устойчивости к колееобразованию [1], однако при превышении оптимального содержания возможно ухудшение технологичности, повышение вязкости и снижение стабильности хранения вследствие фазовой сегрегации [2]. Показано, что морфология полимера определяет степень диспергирования и формирование фазовой структуры системы «битум–полимер», что напрямую отражается на показателях пенетрации, температуры размягчения, эластичности и реологических параметрах [3].

Линейные полимеры смешиваются с битумом более эффективно, чем полимеры, имеющие сложную разветвленную структуру [4]. Это объясняется большей подвижностью макромолекулярных цепей и более равномерным набуханием в мальтеновой фазе. В результате формируется более однородная дисперсная структура [5]. С точки зрения физико-механических характеристик это проявляется следующим образом: при использовании линейного СБС: - наблюдается более выраженный рост эластичности (восстановление после деформации); - формируется устойчивое вязкоупругое поведение без чрезмерного увеличения вязкости; - достигается благоприятный баланс между модулем упругости и способностью к релаксации напряжений; - улучшаются показатели усталостной стойкости за счет более равномерного распределения

деформаций. В отличие от этого, радиальный СБС, имеющий трех или четырехлучевую архитектуру, формирует более плотную пространственную сетку. Это приводит к: - увеличению комплексного модуля $|G^*|$; - росту температуры размягчения; - повышению сопротивления сдвиговым деформациям (устойчивости к колееобразованию); - увеличению жесткости при средних и высоких температурах.

Таким образом, различие между линейной и радиальной архитектурой проявляется прежде всего в механизме формирования вязкоупругой структуры [6]: линейный СБС способствует формированию более пластично-эластичной системы с улучшенными показателями трещиностойкости, радиальный СБС усиливает упруго-жесткий отклик, повышая устойчивость к колееобразованию, но при этом увеличивает жесткость материала.

Заключение Результаты исследования подтверждают необходимость комплексного подхода к выбору типа и дозировки полимера для обеспечения сбалансированных физико-механических характеристик полимерного битума. Выбор архитектуры полимера должен осуществляться исходя из приоритетных эксплуатационных требований: для регионов с высокой температурной нагрузкой и интенсивным трафиком предпочтительна более жесткая структура (радиальный СБС), тогда как для условий, требующих повышенной трещиностойкости и устойчивости к усталостным повреждениям, рационально применение линейного СБС. Одновременно отмечается, что влияние полимерной модификации на низкотемпературные характеристики не является однозначным и зависит от природы базового битума, типа полимера и его концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Teltayev B.B., Amirbayev E., Radovskiy B. *Evaluating the Effect of Polymer Modification on the Low-Temperature Rheological Properties of Asphalt Binder, Polymers* (2022).
- [2] Teltayev B.B., Radovskiy B., Seilkhanov T., Rossi C.O., Amirbayev E. Low and high temperature characteristics of compounded and modified bitumens, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* (2022), p 5.
- [3] Teltayev B.B., Radovskiy B. Viscoelastic Properties of Asphalts Based on Penetration and Softening Point, *Springer International Publishing* (2018), p 10.
- [4] Galdina V. D. Viscoelastic Properties of Asphalts Based on Penetration and Softening Point, *Modified bitumens: Textbook* (2009), Omsk, 27-67.
- [5] Walkering C.P., Vonk W.C., Whiteoak C.D. Improved Asphalt Properties Using SBS modified Bitumens, *Shell Bitum. Rev.* (1992), 9-11.
- [6] The Shell Bitumen Handbook Improved Asphalt Properties Using SBS modified Bitumens, *Thomas Telford Publishing.* (1992), London, p 67.

РАЗРАБОТКА КОЭФФИЦИЕНТА РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НА ДОРОЖНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В ЗОНЕ РЕГУЛИРУЕМЫХ ПЕРЕКРЕСТКОВ

Б.Б. ТЕЛТАЕВ¹, А.Ж. МАСАНОВ², Н. АМАНДЫКОВ³

¹Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

^{2,3}Казахский научно-исследовательский институт безопасности дорожного движения, Алматы, Казахстан

massanov.a.zh@gmail.com

Одним из важнейших факторов, определяющих долговечность дорожных одежд и транспортно - эксплуатационное состояние автомобильных дорог, является характер воздействия транспортного потока на дорожную конструкцию. В существующих методиках проектирования и расчета дорожных одежд основное внимание уделяется интенсивности движения, составу транспортного потока и величине осевых нагрузок транспортных средств. Однако при

эксплуатации дорог, особенно в условиях городской улично-дорожной сети, существенную роль играет режим движения транспортных средств, который оказывает значительное влияние на уровень динамических нагрузок, передаваемых дорожной конструкции.

Наиболее выраженное влияние режимов движения наблюдается в зоне регулируемых перекрестков, где транспортные средства под воздействием сигналов светофорного регулирования периодически переходят из режима равномерного движения в режим торможения, остановки и последующего разгона. Данные процессы сопровождаются возникновением значительных горизонтальных и вертикальных сил в зоне контакта колеса автомобиля с дорожным покрытием, что приводит к увеличению напряженно-деформированного состояния дорожной одежды и ускоренному развитию ее дефектов.

Анализ характеристик транспортного потока на регулируемых перекрестках показывает, что значительная часть транспортных средств в потоке подвергается остановке на запрещающий сигнал светофора. После остановки происходит интенсивный разгон транспортных средств, сопровождающийся повышенными динамическими и касательными нагрузками на дорожное покрытие. При этом традиционные расчетные методы не учитывают в полной мере влияние подобных режимов движения на работу дорожной конструкции.

В связи с этим в работе предлагается ввести коэффициент режимов движения транспортного потока, позволяющий количественно учитывать влияние различных режимов движения транспортных средств на дорожную одежду. Предлагаемый коэффициент формируется на основе долевого распределения транспортных средств по основным режимам движения — равномерному движению, торможению, остановке и разгону — и позволяет более точно оценивать динамическое воздействие транспортного потока на дорожную конструкцию.

Использование предложенного коэффициента при анализе транспортно-эксплуатационных показателей автомобильных дорог позволит повысить точность оценки нагрузки на дорожные конструкции в зоне регулируемых перекрестков, а также создать предпосылки для совершенствования методов проектирования и эксплуатации дорожных одежд в условиях городской улично-дорожной сети.

ОСОБЕННОСТИ ЦИКЛИЧЕСКОГО ЗАМОРАЖИВАНИЯ ОТТАИВАНИЯ ДОРОЖНОГО АСФАЛЬТОБЕТОННОГО ПОКРЫТИЯ В АЛМАТИНСКОМ РЕГИОНЕ

Б. ТЕЛТАЕВ¹, А. МУТА², А.Т. ИСОВА³

¹Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

²Казахский национальный женский педагогический университет, Алматы,
Казахстан

³Международный инженерно-технологический университет, Алматы, Казахстан

¹bagdatbt@yahoo.com, ²mutita@mail.ru

В работе представлены результаты мониторинга температуры слоев дорожной одежды и земляного полотна на участке (км 58+895 м) автомобильной дороги «Алматы-Бишкек». На основании экспериментальных данных определены параметры циклического замораживания оттаивания (количество, продолжительность и минимальные температуры в циклах) в слоях дорожной одежды и в точках земляного полотна.

На рисунке представлен график изменения температуры воздуха (поверхности асфальтобетонного покрытия) на экспериментальном участке в период с октября 2021 по март 2022 года. На графике выделены периоды замораживания оттаивания: период I - устойчивый осенне-зимний период циклических замораживаний и оттаиваний; период II - неустойчивый весенний период циклических замораживаний и оттаиваний, включающий три подпериода. Каждый из этих подпериодов включает несколько циклов замораживания и оттаивания (ЦЗО). Периоды

различаются по продолжительности, количеству циклов и значениям минимальных температур.

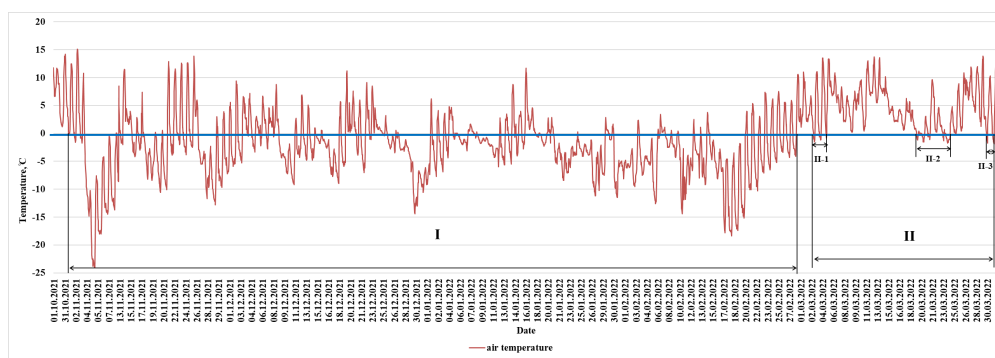


Рис. 1: График изменения температуры воздуха с выделенными периодами и циклами замораживания и оттаивания

Установлено, что: в холодный сезон 2021–2022 годов зафиксировано 70 циклов замораживания оттаивания на поверхности асфальтобетонного покрытия. Из них 78.57% имели продолжительность не более 40 часов, при этом наиболее распространены кратковременные циклы длительностью 8–16 часов (43.63%). Более 81% минимальных температур в пределах циклов находятся в диапазоне от 0 до -9°C , из которых наиболее часто фиксировались значения от 0 до -3°C (40%). Циклы с температурой ниже -12°C составили менее 9%, что свидетельствует о сравнительно редком воздействии экстремально низких температур.

ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПОДХОДОВ К МОСТОВОМУ СООРУЖЕНИЮ ПРИ ПОМОЩИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Б.Б. ТЕЛТАЕВ¹, К.А. ШАЛКАР²

¹Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

²КаЗАДИ им. Л.Б. Гончарова

No e-mail

В работе представлены результаты обследования железобетонного путепровода, расположенного на км 397+600 автомобильной дороги А-2 «Алматы–Ташкент–Термез», с применением современных информационных технологий. Инструментальные измерения выполнены с использованием беспилотного летательного аппарата (БПЛА) с лидарной системой и последующей обработкой данных в специализированном программном обеспечении для построения 3D-модели. Установлены значительные вертикальные осадки опор №1 и №2 (до 60 см и 22 см соответственно), а также нарушение работы резиновых опорных частей и деформационных швов. Техническое состояние сооружения признано неудовлетворительным.

Обеспечение транспортной безопасности требует регулярного контроля технического состояния мостовых сооружений. Традиционные методы обследования не всегда позволяют оперативно получить точные пространственные данные, особенно при наличии значительных деформаций. Внедрение беспилотных летательных аппаратов и технологий цифрового моделирования существенно повышает точность и информативность диагностики.

Объектом исследования является железобетонный путепровод, введенный в эксплуатацию в 2013 году. Сооружение расположено в составе транспортной развязки типа «Труба» над автомобильной дорогой республиканского значения А-2. Схема пролётного строения — $18 + 2 \times 21 + 18$ м, опоры свайные, пролетные строения — из предварительно напряжённых балок и плит.

Методика обследования

Инструментальная съёмка выполнена с применением БПЛА DJI Matrice 350 RTK, оснащённого лидарной системой DJI Zenmuse L2. Для обеспечения высокой точности позиционирования использовалась базовая станция DJI D-RTK 2. Координатная привязка осуществлялась в системе WGS 84 / UTM Zone 43N.

Обработка данных выполнена методом фотограмметрии в программном комплексе Bentley iTwin ContextCapture с построением детализированной 3D-модели сооружения. Для контроля точности измерений дополнительно применялся электронный тахеометр Leica FlexLine TS03 5" R500.

В ходе анализа определялись:

- продольные и поперечные профили покрытия;
- фактические уклоны проезжей части;
- пространственное положение опор;
- отметки низа пролётных строений;
- соответствие проектных и фактических отметок.

Результаты обследования

Проектом был предусмотрен продольный уклон 5‰ с повышением отметок от опоры №1 к опоре №5. Фактические измерения показали существенные отклонения:

- ПС1 — 27‰;
- ПС2 — 19‰;
- ПС3 — 1‰;
- ПС4 — 1‰.

Значительные продольные уклоны на ПС1 и ПС2 свидетельствуют о вертикальных осадках опор. Ориентировочная величина осадки составила:

- опора №1 — до 60 см;
- опора №2 — около 22 см.

Дополнительно выявлены:

- горизонтальное смещение (крен) опор №1 и №2;
- полное закрытие деформационных швов;
- выход резиновых опорных частей за пределы допустимых перемещений;
- расслоение и растрескивание РОЧ на опоре №1;
- общая осадка насыпи подхода №1;
- образование поперечной ступеньки перед деформационным швом высотой до 8 см;
- несоответствие габаритов безопасности нормативным требованиям в подмостовой зоне.

Продольные уклоны на ПС3 и ПС4 менее 5‰ не соответствуют нормативным требованиям и способствуют застою воды. На подходе №1 зафиксированы встречные уклоны, создающие потенциально аварийную ситуацию.

Сопоставление проектных и фактических отметок показало, что сооружение частично возведено с отклонениями от проектных параметров.

Выводы

Применение БПЛА и цифрового 3D-моделирования позволило оперативно получить достоверные геометрические характеристики сооружения и выявить критические деформации.

Основные выводы:

- Состояние опор №1 и №2 неудовлетворительное вследствие значительных вертикальных осадок и крена.
- Резиновые опорные части на опоре №1 находятся в критическом состоянии и требуют замены.
- Подход №1 имеет выраженную осадку насыпи и деформации покрытия.
- Техническое состояние путепровода в целом классифицировано как неудовлетворительное.

До проведения капитального ремонта рекомендуется организовать геодезический мониторинг сооружения с установкой стационарных марок и выполнением регулярных контрольных измерений.

Результаты исследования подтверждают высокую эффективность применения современных информационных технологий при обследовании мостовых сооружений и их целесообразность для диагностики деформационных процессов.

Ключевые слова: мостовое сооружение, техническое состояние, осадка опор, БПЛА, лидарная съёмка, 3D-моделирование, продольный уклон.

К РАСЧЕТУ МОНОЛИТНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ПЛИТЫ ДЛИНОЙ 10 м

Б.Б. ТЕЛТАЕВ¹, К.А. ШАЛКАР²

¹Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

²КазАДИ им. Л.Б. Гончарова, Алматы, Казахстан

No e-mail

Аннотация. Общие сведения о проектируемом путепроводе. Проектируемая автомобильная дорога расположена в Карасайском районе Алматинской области ПК 203+00 – ПК 210+20 на пересечении Большой Алматинской кольцевой автомобильной дороги (БАКАД). На данном участке предусмотрена транспортная развязка, переходящая в эстакаду над железной дорогой на перегоне станция Аксенгер - станция Шамалган. В этой связи подмостовой габарит на эстакаде через железную дорогу составляет более 10 м, что в свою очередь, требует устройство насыпи высотой до 16 м на участке между путепроводом автомобильной транспортной развязки и железнодорожной эстакадой.

Полная длина исследуемого искусственного сооружения по задним граням открьлков устоев составляет 226 м. Общее число полос движения по путепроводу составляет – 6 шт.

Крайняя опора путепровода по предложению Заказчика запроектирована в виде армогрунтовой конструкции, сверху опоры устроена переходная плита, которая одним концом опирается на железобетонную опору, а другим на армогрунтовую подпорную стенку.

По просьбе проектируемой организации ТОО «Каздортранс» АО «КаздорНИИ» выполнил расчет армогрунтовой конструкции, монолитной переходной плиты длиной 10 м и проводило научно-техническое сопровождение во возведению данного сооружения. В работе приведены расчеты монолитной переходной плиты.

Ключевые слова: путепровод, постоянная нагрузка, временная нагрузка, переходная плита, изгибающий момент, поперечная сила.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ

А.М. ТОКТОРБАЕВ¹, Ж.Э. ТОКТОМУРАТОВА²

^{1,2}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

ain7@list.ru

Рассматривается задача Коши для системы вырождающихся уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов с учетом пористости среды в массовых лагранжевых координатах. Доказывается существование обобщенного решения в произвольной конечной полосе времени с использованием метода регуляризации и априорных оценок. Установлены условия на начальные данные, обеспечивающие существование решения. Добавлены примеры применения теоремы к конкретным физическим сценариям, таким как моделирование химических реакций в пористых средах.

Система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов с учетом пористости среды в массовых лагранжевых координатах имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial x} \right) - cg, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r \frac{\partial}{\partial x} (\rho \theta) - \beta(x) |u|^\alpha u, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1(\theta) \rho \frac{\partial c}{\partial x} \right) - r \rho \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \delta cg.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь u, θ, ρ, c - соответственно скорость, абсолютная температура, плотность и массовая концентрация компонент – искомые функции пространственной переменной $x, x \in R = (-\infty; \infty)$ и времени $t, t \in [0, T], 0 < T < \infty; \mu, r, \lambda, \chi$ – положительные постоянные; $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) dx \leq C; \quad 0 \leq \alpha \leq 2/3$.

В момент времени значения функций предполагаются известными:

$$\rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad c|_{t=0} = c_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.\tag{2}$$

причем $(\rho^0(x), u_0, \theta_0, c_0)$ – непрерывные, $0 \leq c_0 \leq 1$ (ρ^0, θ_0) , – ограниченные, неотрицательные функции и имеют нулевые пределы на бесконечности:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho^0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} c_0(x) = 0.\tag{3}$$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1) - (3) называется совокупность функций (u, ρ, θ, c) обладающих свойствами.

$$(u_x, \theta_x, c_x, \rho, \rho_x, \rho_t) \in L_\infty(0, T; L_2(R)), \quad (u_t, \theta_t, c_t, \sqrt{\rho^0} u_{xx}, \sqrt{\rho^0} \theta_{xx}, \sqrt{\rho^0} c_{xx}) \in L_2(\Pi)$$

и удовлетворяющих уравнениям (1) почти всюду в $\Pi = R \times (0, T)$.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1(\theta) = \frac{\nu}{\sqrt{\theta}}, \nu = \text{const} > 0$ и начальные данные (2) удовлетворяют условиям: $(\rho^0, u_0, \theta_0, c_0) \in W_2^1(R), (c_0, \theta_0) \in L_1(R), (\rho_x^0)^2 < C \rho^0(x), x \in R,$

$$\frac{\beta(x)}{\rho^0} \leq C, \quad \frac{\rho_x^0}{\rho^0} \in L_2(R), \quad \int_A^B \int_x^{x+1} (\rho_\xi^0)^2 d\xi dx < C \quad \forall A, B \in R, A < B.$$

Функция $g(\rho, c, \theta,) = \rho \eta(c, \theta)$, где $\eta(c, \theta)$ предполагается непрерывной, неотрицательной в любой компактной области своих аргументов и удовлетворяющей условию Липшица по $\theta^{1/2}$.

Тогда в полосе $\Pi = R \times (0, T)$ с произвольной конечной высотой $T, 0 < T < \infty$ существует обобщенное решение задачи (1) - (3).

Для регуляризованной задачи теорема существования и единственности локального решения следует из [2, 3]. В дальнейшем индекс ε будем опускать. Наша цель заключается в нахождении равномерных по ε оценок и осуществлении предельного перехода по ε . Примем $\delta = 1$. В дальнейшем через C, N_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от ε .

Доказательство предельного перехода осуществляется так же как в пунктах [2, 4].

Теорема полностью доказана.

Ключевые слова: обобщенное решение, задача Коши, вырождающиеся уравнения, реагирующая смесь газов, метод регуляризации, априорные оценки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бай Ши - и. *Магнитная газодинамика и динамика плазмы*, М.: Мир, 1964. – 301с.
- [2] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск: Наука, 1983. – 319с.
- [3] Есекеев К.Б., Есекеева М.Ж., Искендерова Д.А. *О задаче Коши для уравнений нестационарного течения реагирующей смеси газов*, Там же. – 1997. – № 7. – С.178–180.
- [4] Смагулов Ш.С., Искендерова Д.А. *Математические вопросы модели магнитной газовой динамики*, Алматы: Гылым, 1997. – 166с.

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ С УЧЁТОМ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЯ

А.Д. ТОКУШЕВА¹, Б. АПШИКУР², М.М. АЛИМКУЛОВ³

¹Казахстанский научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта,
Астана, Казахстан

²Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева,
Усть-Каменогорск, Казахстан

³АЛТ Университет имени Мухамеджана Тынышпаева, Алматы, Казахстан

В статье представлена разработка методики проектирования конструкций земляного полотна железных дорог с учетом физико-механических свойств грунтов основания. Рассмотрены методы определения физических и механических характеристик грунтов, включая природную влажность, пределы пластичности, плотность, гранулометрический состав, модуль

деформации, угол внутреннего трения и удельное сцепление. Проведён анализ корреляции между полученными лабораторными показателями и выбором конструктивных решений земляного полотна. Выполнены расчёты устойчивости откосов выемок для различных инженерно-геологических элементов с применением деформационно-взвешенного подхода, что позволило обосновать возможность применения единой крутизны откосов и оптимизировать объёмы земляных работ. Установлено, что учет детальных физико-механических характеристик грунтов способствует повышению надёжности проектных решений, сокращению стоимости строительства и обеспечению устойчивости земляного полотна.

Определение физических характеристик грунта - природной влажности грунта лабораторными методами при определении пределов пластичности, раскатывания, высушивания, плотности грунта методом режущего кольца, гранулометрического состава ситовым методом, определение механических характеристик - модуля деформации грунта в естественном и в водонасыщенном состоянии методом компрессионного сжатия, определение прочностных характеристик (угла внутреннего трения и удельного сцепления) грунта методом одноплоскостного среза [1-3]. Корреляция между физико-химическими показателями и выбором конструкции земляного полотна полученных данные свидетельствует о том, что интерпретация результатов испытаний помогает точнее определить пригодность грунтов по категориям и рациональнее подойти к выбору конструкции земляного полотна [4]. В работе были проведены множественные анализы грунта, оценены их пригодности в использовании грунтов оснований и насыпях земляного полотна. Таким образом, результаты исследования подтвердили, что лабораторные испытания способствует не только ускорению процессов, но и повышению качества принимаемых проектных решений при строительстве земляного полотна.

В данной работе при проектировании земляного полотна, были запроектированы откосы по требованиям к проектированию земляного полотна, а также на основании устойчивости грунта согласно приведенным расчетам. Для грунтов разных ИГЭ, например ИГЭ-5 и ИГЭ-8 на выемках применены откосы 1:1,2 и 1:1,15. Для скальных грунтов 1:1,15.

Применение деформационно-взвешенного подхода к оценке прочностных характеристик грунтового массива позволило учесть совместную работу суглинка и песка в зоне потенциального сдвига. В результате обоснована возможность принятия единой крутизны откоса 1:1,5 вместо дифференцированного решения, что позволило сократить ширину выемки без снижения устойчивости откоса [5-7].

В работе был произведен расчет устойчивости грунта. Он приведен в третьей части данной работы. Оценка несущей способности грунта была выполнена с учетом устойчивости Грунты были, как и устойчивы на прочностные характеристики, так и требовалось дополнительные мероприятия. Также, при детальном изучении физико-механических характеристик грунта и выборе решения для конструкции земляного полотна на выемках был применен новый метод с параметрами откосов. При расчете на деформирование грунта и элементов конструктивного решения были применены откосы для двух и более ИГЭ, с одной и той же крутизной. Данный метод позволил существенно сэкономить стоимость земляных работ, а также сократить объем вынимаемого грунта.

Метод применен для пород одной категории, таких как глинистые грунты и разными показателями текучести или группы скальных и полускальных пород. Устойчивость откоса определяется в основном благодаря сцеплению грунта. Откосы в глинистых грунтах применяли крутые, при новом методе расчета откосы возможно сделать немного положе, при условии, что расчет откосов должен быть просчитан верно [8]. В процессе выполнения работы отдельные этапы расчетов уточнялись и корректировались по результатам анализа инженерно-геологических условий участка и полученных в ходе исследования расчетов, это позволило повысить обоснованность принятых проектных решений.

Ключевые слова: земляное полотно, железная дорога, физико-механические свойства грунтов, устойчивость откосов, модуль деформации, угол внутреннего трения, удельное сцепление, инженерно-геологические элементы, проектирование, оптимизация земляных работ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] СП РК 1.02-102-2014. Инженерно-геологические изыскания для строительства
- [2] СП РК 5.01-102-2013. Основания зданий и сооружений
- [3] ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация
- [4] СП РК 2.04-01-2017. Строительная климатология
- [5] ГОСТ 5180-2015. Грунты. Методы лабораторного определения физических характеристик, М.: Стандартинформ, (2019), 3–9.
- [6] [Электронный ресурс] – Режим доступа.
URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijst.2023.05.003> (Received in revised form 20.03.2023), *Geotechnical properties of cohesive soils used in the construction of subgrade for the development of the railways in the Azov-Black Sea region*, (2023), 4–5
- [7] ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация, М.: Стандартинформ, (2020), 12–13.
- [8] ГОСТ 22733-2016. Грунты. Метод лабораторного определения максимальной плотности, М.: Стандартинформ, (2011), 5–9.

РАЗРАБОТКА КОЭФФИЦИЕНТА РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НА ДОРОЖНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В ЗОНЕ РЕГУЛИРУЕМЫХ ПЕРЕКРЕСТКОВ

А.Д. ТОКУШЕВА¹, М.М. АЛИМКУЛОВ², Б. АПШИКУР³

¹Казахстанский научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта,
Астана, Казахстан

²АЛТ Университет имени Мухамеджана Тынышпаева, Алматы, Казахстан

³Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева,
Усть-Каменогорск, Казахстан

Аннотация. В статье представлен анализ современных методов проектирования железных дорог и конструкций земляного полотна с учетом физико-механических характеристик грунтов. Рассмотрены результаты лабораторных исследований грунтов, служащих основанием железнодорожного полотна, выполненные в соответствии с действующими нормативными документами. Определены основные физические показатели грунтов, включая природную влажность, пределы текучести и раскатывания, плотность, число пластичности и показатель текучести. На основании проведенных испытаний выполнена оценка пригодности грунтов для строительства земляного полотна, а также определены значения оптимальной влажности и максимальной плотности при стандартном уплотнении. Установлено, что исследуемые грунты требуют дополнительного уплотнения до нормативных значений. Полученные результаты могут быть использованы при выборе конструктивных решений и мероприятий по укреплению основания железнодорожного пути.

При изучении физико-механических свойств грунта является критически важной частью проектирования земляного полотна для железных дорог. Физико-механические свойства грунта включают в себя такие параметры, как плотность, влажность, прочность, удельное сопротивление сдвигу и другие. Эти характеристики необходимы для расчёта несущей способности грунта, определения устойчивости насыпей и выемок, а также для выбора методов укрепления грунтового основания.

В работе представлены результаты исследования грунтов служащих основанием железнодорожного полотна. На участке изысканий было выполнено рекогносцировочное обследование с отбором проб грунта нарушенной структуры для определения их физико-механических свойств. Физико-механические свойства приведены. Выбор конструкции земляного полотна: на основе изученных свойств грунта будет выбран тип земляного полотна, методы его укрепления и дренажа. Это может включать в себя использование геотекстиля, георешеток, легких заполнителей.

Результаты. Физические свойства грунта на природную влажность W_e , влажность на границе текучести W_L , влажность на границе раскатывания W_p и плотность ρ определены согласно ГОСТ [1, с.3-9] методами высушивания до постоянной массы, балансированным конусом, раскатывания и методом режущего кольца [2, с.4-5].

На основе полученных физических свойств грунта рассчитаны по ГОСТ [3, с.10, с.12-13] – значение плотности сухого грунта ρ_d , числа пластичности I_p , показателя текучести IL , коэффициента пористости e и коэффициента водонасыщения S_r .

В скважинах 1,4,5 и 6 был выделен глинистый грунт с показателем текучести <0 и числом пластичности 7,1-7,6 соответственно определен тип грунта суглинок твердый с дресвой. А также, значения супеси твердой с показателем текучести <0 и числом пластичности от 4,1 до 4,7.

Для оценки пригодности строительных свойств грунтов земляного полотна выполнены испытания на стандартное уплотнение грунта [4, с.5-9], в результате чего получены значения максимальной плотности и оптимальной влажности грунта.

По данным значениям для суглинка твердого значения плотности в естественном залегании равны $1,79 \text{ г/см}^3$, значение природной влажности 7,6. По полученным значениям плотности грунта в естественном залегании и значениям стандартного уплотнения можно утверждать, что грунты на своем протяжении требуют уплотнения до максимальной плотности.

Ключевые слова: железная дорога, земляное полотно, физико-механические свойства грунта, плотность грунта, влажность грунта, число пластичности, показатель текучести, стандартное уплотнение, несущая способность, укрепление основания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ГОСТ 5180-2015. Грунты. Методы лабораторного определения физических характеристик, М.: Стандартинформ, (2019), 3–9.

[2] [Электронный ресурс] – Режим доступа.
URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijst.2023.05.003> (Received in revised form 20.03.2023), *Geotechnical properties of cohesive soils used in the construction of subgrade for the development of the railways in the Azov-Black Sea region*, (2023), 4–5

[3] ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация, М.: Стандартинформ, (2020), 12–13.

[4] ГОСТ 22733-2016. Грунты. Метод лабораторного определения максимальной плотности, М.: Стандартинформ, (2011), 5–9.

ИНТЕГРИРОВАННОЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АВТОНОМНОЙ НАВИГАЦИИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С НЕЗАВИСИМЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ЧЕТЫРЬМЯ КОЛЁСАМИ

А.К. ТУЛЕШОВ¹, Ж. АЙТУГАНОВА²

¹Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

³Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Zhamila_a77@mail.ru

Данное исследование направлено на решение задач «последней мили» (last-mile delivery) с использованием мобильных роботов и посвящено сравнительному анализу навигационных характеристик режимов движения Ackermann и параллельного режима.

Для оптимизации эффективности навигации в различных условиях среды, включая бордюры, уклоны и резкие изменения направления, предлагается мобильный робот с независимым управлением четырьмя колёсами (4WIS), способный переключаться между режимами управления Ackermann и параллельным режимом.

Предложенное решение включает комплексное кинематическое моделирование для обоих режимов движения и интегрировано в алгоритм автономного управления.

Быстрый рост электронной коммерции создал серьёзные проблемы для городских логистических систем, особенно в сфере доставки «последней мили». Доставка последней мили составляет более 40% от общих логистических затрат и считается наименее эффективным звеном цепочки поставок. Несмотря на наличие различных автономных решений, большинство существующих систем используют шестиколёсную конфигурацию, что приводит к ограничениям по скорости и усложняет управление. По сравнению с воздушными дронами наземные мобильные роботы являются более эффективным решением благодаря большей грузоподъёмности.

В данном исследовании предлагается мобильный робот с независимым управлением четырьмя колёсами (4WIS), способный работать в нескольких режимах движения:

- режим Ackermann,
- параллельный режим управления,
- режим вращения (spinning).

Ключевой вклад работы — сравнительный анализ производительности режимов Ackermann и параллельного управления в диапазоне скоростей 2–5 км/ч.

Для автономной навигации использовались:

- высокоточные карты (HD maps),
- метод сопоставления Normal Distribution Transform (NDT),
- алгоритмы планирования и выполнения траектории.

Также исследованы методы обнаружения человека на основе LiDAR с применением фильтра Калмана.

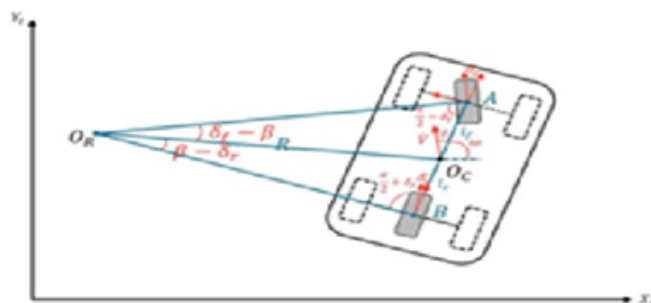


Рис. 1: Модель боковой кинематики движения в инерциальной системе координат

Режим Аккермана основан на традиционной автомобильной геометрии рулевого управления. В этом режиме внутренние и внешние колёса поворачиваются на разные углы, обеспечивая плавное прохождение поворота без проскальзывания.

Ключевые слова: доставка последней мили, независимое управление четырьмя колёсами, автономный мобильный робот, LiDAR, фильтр Калмана.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T40, 70E60, 93C85

ЛИТЕРАТУРА

- [1] N. Akai et al., Robust localization using 3D NDT scan matching with experimentally determined uncertainty, In *IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, 2017.
- [2] I. Bakach, A. Campbell, J. Ehmke, A two-tier urban delivery network with robot-based deliveries, *Networks*, 78(4), 2021.
- [3] N. Boysen, S. Fedtke, S. Schwerdfeger, Last-mile delivery concepts: a survey, *OR Spectrum*, 43(1), 2021.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ КОЛЕСАМИ

А.К. ТУЛЕШОВ¹, А. СЕЙДАХМЕТ², М.Ж. КУАТОВА³, Д.Б. КЕРИМКУЛОВ⁴

^{1,2,3,4}Институт механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова, Алматы,
Казахстан

³Международный инженерно-технологический университет, Алматы, Казахстан
dgpimmash@mail.ru

В работе разработан метод исследования динамики колесного мобильного робота на основе принципа наименьшего принуждения Гаусса. Данный подход к исследованию неголономных систем обладает рядом преимуществ, в частности, определение ускорений сводится к решению алгебраической задачи, а также упрощается разработка функций управления.

В отличие от метода Лагранжа, где возникает смешанная система алгебраических и дифференциальных уравнений, рассматриваемый подход позволяет работать только с системой дифференциальных уравнений.

Математическая модель.

Обобщённые уравнения динамики двухколёсного мобильного робота на основе принципа наименьшего принуждения Гаусса относительно псевдоскоростей V, Ω и псевдопараметров μ_{fd1}, μ_{fd2} записываются как:

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{1}{M} [2m_k(f_3 + f_4) - Bb_1(\mu_{f1} - \mu_{d1} + \mu_{f2} - \mu_{d2})] &= 0, \\ \dot{\Omega} + \frac{1}{J} [Bb_2(\mu_{f2} - \mu_{d2} - \mu_{f1} + \mu_{d1}) - 2m_k l(f_4 - f_3)] &= 0, \\ \tau_{fd1} + \mu_{d1} &= \frac{1}{B} [a_1 U_1 - i_s(b_1 V + b_2 \Omega)], \\ \tau_{fd2} + \mu_{d2} &= \frac{1}{B} [a_2 U_2 - i_s(b_1 V - b_2 \Omega)]. \end{aligned} \quad (1)$$

где:

$$M = (m_1 + 2Bb_1^2 + 4m_k), \quad J = (A + 2Bb_2^2 + 2m_k l^2).$$

— Движение мобильного робота задаётся траекторией центра платформы:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (2)$$

с учётом неголономной связи:

$$\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

где φ — угол ориентации платформы.

— Вектор псевдоскоростей:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Связь между декартовыми скоростями и псевдоскоростями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Управление движением.

Управление движением мобильного робота осуществляется с помощью параметров U_1 и U_2 .

В этом случае программное движение задаётся в виде траектории центра платформы:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (6)$$

на основании системы уравнений и неголономной связи:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\pi}, \quad (7)$$

где вектор псевдоскоростей $\boldsymbol{\pi} = [V, \Omega]^T$ включает:

$$V = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi, \quad \Omega = \dot{\varphi}.$$

Матрица преобразования имеет вид:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{l}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Например, при движении робота по окружности радиуса R_d функции управления имеют вид

$$U_1 = \frac{1}{a_1} i_s \Omega_0 (b_2 + b_1 R_d), \quad U_2 = \frac{1}{a_2} i_s \Omega_0 (b_2 - b_1 R_d). \quad (9)$$

Полученные результаты подтверждают эффективность предложенного подхода к моделированию динамики мобильного робота на основе принципа наименьшего принуждения Гаусса. Разработанная математическая модель и алгоритмы управления были реализованы и экспериментально апробированы на мобильном транспортном роботе МРТКЗ, применяемом на предприятии ТОО «СарыАркаАвтопром».

Испытания проводились в условиях промышленного производства при решении задач транспортировки и позиционирования крупногабаритных деталей. Результаты показали устойчивость движения, корректное следование заданной траектории и адекватную работу системы управления в различных режимах.

Полученные результаты используются при разработке и внедрении мобильных робототехнических комплексов и позволяют упростить алгоритмы управления при сохранении требуемой точности движения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке научного проекта BR20280990.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. K. Tuleshov, A. Ozhiken. Modeling the Dynamics of a Heavy-Duty Mobile Robot Based on Gauss's Principle of Least Constraint, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(136) (2025), 51–60.
- [2] BR20280990. Разработка роботов и программного обеспечения для гибкой роботизации автопрома Казахстана (2024–2026).
- [3] A. Seidakhmet, A. Tuleshov, N. Jamalov. Research of kinematics and dynamics of lever lifting mechanism, *Applied Sciences* (2023).
- [4] A. Jomartov, A. Tuleshov. Design of a cable-driven parallel robot, *SN Applied Sciences* (2023).
- [5] A. Jomartov et al. Experimental determination of trajectory of motion, *International Journal of Mechanical Engineering Education* (2025).

СПОСОБЫ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО СОСТАВА ОБРАЗЦА НА РЕЗУЛЬТАТЫ РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНОГО МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО ВЫСОКОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

А.К. ТУЛЕШОВ¹, А.Н. ЛЕЗИН², Н.К. ДОСМУХАМБЕТОВ³, А. АМАНДЫК⁴,
М.Ж. КУАТОВА⁵, Н.М. ТОКЕНОВ⁶

^{1,2,5,6}Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы,

Казахстан

^{2,3,6}ТОО «АспапГЕО»

⁴НЦ Государственной научно-технической экспертизы

⁵МИТУ

В последние годы в мировой практике для элементного анализа материалов, в первую очередь в производственных и полевых условиях, широкое распространение получил рентгенофлуоресцентный энергодисперсионный метод (РФЭМ) анализа, который обладает целым рядом важных достоинств: неразрушающий, экспрессный, многоэлементный, с не плохой чувствительностью, экономически эффективный, хорошо поддается автоматизации, минимальные требования к расходным материалам при эксплуатации, экологически чистый. Приборы, созданные на его основе малогабаритны, надежны, могут эксплуатироваться в жестких производственных и климатических условиях, просты в эксплуатации, легко встраиваются в информационные системы.

На основе комплексного подхода к решению аналитических задач, стоящих перед базовыми отраслями Казахстана, проведены исследования по расширению функциональной возможности РФЭМ анализа с использованием инновационных технологий, позволившие создать новые модификации конкурентоспособных отечественных рентгенофлуоресцентных энергодисперсионных (EDXRF), превосходящие зарубежные аналоги. В современных приборах за основу рентгенооптической схемы принята традиционная схема проведения РФЭМ анализа: "источник первичного излучения - проба - детектор"[1, 2]. В работе впервые представлена модифицированная рентгенооптическая схема измерений, предусматривающая использование эффектов поляризации, промежуточных мишеней и фильтров, оптимизированная с точки зрения геометрических условий измерения. Это позволило значительно повысить светосилу, обеспечить проведение высокочувствительного многоэлементного анализа в широком энергетическом диапазоне с частичными преимуществами от проведения измерения в X-Y-Z геометрии.

В работе представлены новые эффективные способы учета влияния вещественного состава образца на результаты анализа при проведении многоэлементного высокочувствительного рентгенофлуоресцентного анализа (РФА).

На основании экспериментальных результатов измерений интенсивности характеристической линии тонкого моноизлучателя для конкретных геометрических условий, получено уравнение интенсивности аналитической линии определяемого элемента (J_{inp}) для насыщенного слоя, учитывающее изменение геометрической эффективности регистрации детектора при вариациях вещественного состава и плотности анализируемого образца:

$$J_{inp} = G_i K_i \frac{C_i}{\mu_{inp}} (1 + h_{ij} C_j + h_i c),$$

$$G_i = \frac{\mu_{inp} \rho}{\mu_{inp} \rho + g},$$
(1)

где: ρ – плотность образца.

При определении элементов с энергиями характеристических линий в интервале энергий 1-4 кэВ в воздушной атмосфере основная погрешность в нахождении их интенсивностей обусловлена поглощением воздухом.

В работе выведено уравнение, определяющее интенсивность характеристических линий легких элементов ($12 \leq Z \leq 18$) при проведении измерений в воздушной атмосфере с полным

учетом изменения поглощающих свойств воздуха от температуры, влажности и давления, которое имеет вид:

$$J_i = J_{i_0} e^{-(\mu_{i\text{вд}} \rho_{\text{вд}} + \mu_{i\text{вп}} \rho_{\text{вп}}) d_{\text{вд}}} \quad (2)$$

где:

$$\rho_{\text{вд}} = \frac{133.32 P - P_v}{287.05 (273.15 + t_c)};$$

$$\rho_{\text{вп}} = \frac{2.1669 \cdot 10^{-6} P_v}{273.15 + t_c};$$

$$P_v = RH \cdot 610.78 \cdot 10^{\frac{7.5 t_c}{237.3 + t_c}}.$$

J_{i_0} — интенсивность излучения без учета поглощения воздухом;

P — атмосферное давление, мм. рт. ст.;

P_v — давление водяного пара, Па;

RH — относительная влажность воздуха, (отн. ед.);

t_c — температура;

$\rho_{\text{вп}}$ — плотность водяного пара;

$\rho_{\text{вд}}$ — плотность воздуха;

$d_{\text{вд}}$ — расстояние от пробы до детектора;

$\mu_{i\text{вд}}$ — массовый коэффициент поглощения излучения воздухом;

$\mu_{i\text{вп}}$ — массовый коэффициент поглощения излучения водяным паром.

Проведены оценки требований, которые должны предъявляться к точности позиционирования анализируемого образца и датчикам контроля свойств воздуха в современных приборах: точность позиционирования образца ± 15 мкм.; точность определения давления $\pm 0,02\%$ отн.; точность определения температуры $\pm 0,1\%$ отн.; точность определения влажности $\pm 0,15\%$ отн.

Разработанный в работе способ нахождения истинных интенсивностей характеристических линий элементов образца позволил проводить многоэлементный анализ с нижней границей определяемых содержаний на уровне 10-4 %.

Впервые в работе представлен новый пакет инновационного программного обеспечения (основа программа "SbsWin") отечественной разработки. Сложнейший математический аппарат и самая современная электроника, заложенные в разработанных отечественных EDXRF приборах, позволили довести мониторинговые возможности одновременного определения содержания более 40 элементов и снять практически все претензии горняков и геологов к достоверности, точности и представительности проводимых измерений [2-5]. Разработка прикладных программ численного расчета проводилась на базе аналитической среды Maple, Matlab и ее модулей.

Многолетний научный и экспериментальный задел казахстанских ученых в области РФ-ЭМ анализа, а также проведенные исследования по разработке РС, способов обработки результатов измерений, отечественного аналитического ПО создали ядро инновационного наукоемкого производства широкой линейки современных отечественных EDXRF приборов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лезин А.Н. Формирование спектра вторичного излучения и использование эффектов поляризации для улучшения метрологических характеристик рентгенофлуоресцентного энергодисперсионного анализа, *Автореферат диссертации на соискание уч. степени канд. техн. наук*, (1987), Алма-Ата, 25 с.
- [2] B.T.Zhumagulov, A.K.Tuleshov, Yu.M.Drakunov. Computer Modeling and Control System for X-ray Radiometrical Well-Logging Unit, (2010), London, - P.900-906.
- [3] Досмухамедов Н.К., Лезин А.Н. Разработка отечественных приборов аналитического контроля для предприятий горно-металлургического комплекса Казахстана, *Горный журнал Казахстана* (2011), № 10, С. 28-35.

[4] Dosmukhamedov N.K., Lezin A.N., Tuleshov A.K., Tokenov N.M. Multifunctional robotic device and software complex for monitoring ore quality, *Proceedings of the scholarly abstracts European Academic Science and Research November* (2021).

[5] Dosmukhamedov N.K., Lezin A.N., Tuleshov A.K., Tokenov N.M. The concept of building a robotic system for monitoring the quality of ores in a natural occurrence, *Eurasian Mining* (2023), № 39 (1), С. 69-73.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АРХИТЕКТУРНЫЕ ПОДХОДЫ К ОБРАБОТКЕ ВИЗУАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ГЛУБОКОМ ОБУЧЕНИИ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

А.Т. ТУРСЫНОВА¹, С.М. ИБРАЕВ²

Институт механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова, Алматы,
Казахстан

¹Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

²Институт механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан

azhar.tursynova1@gmail.com

Одной из центральных проблем современного искусственного интеллекта является обучение автономных систем взаимодействию со средой на основе сырых сенсорных данных (пикселей). В отличие от классического компьютерного зрения, где задача сводится к распознаванию образов, в Deep RL визуальный энкодер должен трансформировать высокоразмерный «хаос» из миллионов пикселей в компактное латентное представление, критичное для принятия решений. Основная сложность заключается в крайне низкой эффективности выборки (sample efficiency): обучение на пикселях требует в 10–50 раз больше данных, чем на векторизованных состояниях, из-за разреженности сигнала награды.

Архитектура визуального энкодера и специфика RL Для обработки изображений традиционно применяются сверточные нейронные сети (CNN), обеспечивающие инвариантность к сдвигу. Однако архитектуры для RL имеют существенные отличия от моделей для классификации (например, ResNet). Обычно используется всего 3–4 сверточных слоя с крупными ядрами в начале для обеспечения быстрого действия в реальном времени. Вместо слоя Global Average Pooling, типичного для классификации, в RL применяется *Flatten*. Это критически важно, так как смещение объекта даже на несколько пикселей может полностью изменить оптимальную стратегию. Выходом энкодера является вектор (latent representation), с которым работают головы Актора (Policy Head) и Критика (Value Head).

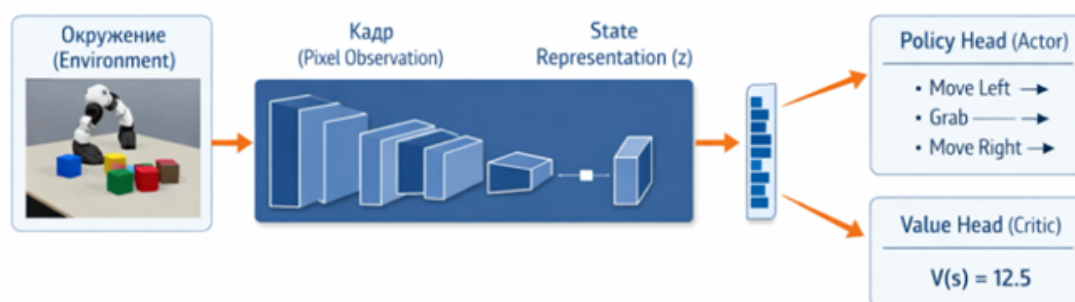


Рис. 1: Архитектурный конвейер визуального агента – от сенсорного восприятия к стратегическому действию

Данная схема иллюстрирует полный цикл обработки информации в системе глубокого обучения с подкреплением (Deep RL) при работе с визуальными данными. Процесс разделен на три ключевых этапа:

- **Окружение (Environment)** генерирует сырые кадры. Для обеспечения марковского свойства и понимания динамики объектов используется механизм стекирования кадров (обычно 4 последовательных снимка), что позволяет агенту «видеть» скорость и направление движения.
- **Визуальный энкодер** на базе сверточной нейронной сети (CNN) выполняет роль «глаз» агента. Он трансформирует высокоразмерный хаос пикселей в компактный латентный вектор z (latent representation). Этот вектор является «эссенцией» состояния, отсекая визуальный шум и сохраняя только важные для задачи объекты.
- **Сжатое представление** поступает на вход двум функциональным блокам – «головам»: Актор (Policy Head) выбирает оптимальное действие (например, движение или захват объекта). Критик (Value Head) оценивает ценность текущего состояния, предсказывая будущую награду.

Эта архитектура реализует принцип End-to-End обучения, позволяя системе одновременно учиться и «видеть», и «действовать».

Математика подготовки данных: Соблюдение Марковского свойства Одиночный кадр является лишь «фотографией» и не содержит информации о динамике (скорости, направлении движения объектов). Для превращения последовательности наблюдений в марковское состояние используется метод стекирования кадров (Frame Stacking). Состояние представляется как:

$$\Phi(s_t) = \{x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}\} \quad (1)$$

Это позволяет сети воспринимать «шлейф» движения, что необходимо для понимания физики среды. Размерность входного тензора при этом принимает вид (Batch, $C \cdot \text{Stack}$, H , W).

Стратегии повышения эффективности обучения Чтобы избежать долгого обучения «с нуля», применяются следующие подходы:

- Использование моделей, обученных на больших видео-датасетах (например, Ego4D – вид от первого лица), что дает агенту «готовые глаза».
- Обучение признакам через контрастивные методы (CURL) или автоэнкодеры (VAE). При этом отмечается, что чистая реконструкция (VAE) может быть вредна, так как сеть может тратить ресурсы на запоминание неважных фоновых деталей (например, колышущейся травы).
- Метод Random Crop признан наиболее эффективным инструментом, заставляющим CNN искать инвариантные паттерны, а не привязываться к конкретным координатам пикселей.

Развитие методов обработки визуальных данных в Deep RL движется в сторону мультимодальности (модели Vision-Language-Action) и перехода к архитектурам Vision Transformers (ViT).

Финансирование: Работа выполнена в рамках программно-целевого финансирования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (номер гранта: BR24992947).

Ключевые слова: глубокое обучение с подкреплением, компьютерное зрение, марковское свойство, стекирование кадров, сверточные нейронные сети.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mnih V., Kavukcuoglu K., Silver D. Human-level control through deep reinforcement learning, *Nature*, **518**:7540 (2015), 529–533.
- [2] Laskin M., Srinivas A., Abbeel P. CURL: Contrastive Unsupervised Representations for Reinforcement Learning, *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning (ICML)*, (2020), 5639–5650.
- [3] Yarats D., Kostrikov I., Fergus R. Mastering Visual Continuous Control: Data Augmentation for Sample Efficient RL, *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, (2021), 1–25.
- [4] Brohan A., Brown N., Carbajal J. RT-2: Vision-Language-Action Models Transfer Web Knowledge to Robotic Control, *Conference on Robot Learning (CoRL)*, (2023), 1–20.
- [5] Sutton R.S., Barto A.G. *Reinforcement Learning: An Introduction*, MIT Press, Cambridge (2018).

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ И СВЯЗЯМИ

З.Г. УАЛИЕВ

Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан
z.ualiyev@mail.ru

В исследовании рассматриваются динамические модели механических систем с упругими звеньями и связями. Представлена методология определения упругодиссипативных характеристик, основанная на исследовании зависимости крутящего момента от угла закручивания. Представленная методика учета диссипативных сил в динамических моделях может повысить точность прогноза поведения машины в рабочих режимах, с учетом реальных условий эксплуатации. На примере двухмассовой системы с упругой связью продемонстрированы основные принципы построения упругих моделей и вычисления приведенных жесткостей и коэффициентов сопротивления. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации конструкции передаточных механизмов и повышения надежности машинных агрегатов.

В современном машиностроении проектирование механизмов требует отхода от классических методов анализа, основанных на допущении об абсолютной жесткости звеньев. В традиционной теории механизмов и машин большинство элементов рассматриваются как твердые тела, деформациями которых в процессе движения можно пренебречь [1]. Переход к таким «жестким» моделям значительно упрощает математическое описание системы, однако не позволяет полностью оценить точность механизмов и динамические нагрузки, возникающие в звеньях и их сочленениях.

С ростом рабочих скоростей машинных агрегатов, требования к определению точности деформации звеньев и связанных с ними упругих перемещений приобретают первостепенное значение [2]. Они становятся источником значительных динамических нагрузок и могут существенно искажать заданные законы движения исполнительных органов. В связи с этим возникает необходимость перехода к исследованию динамических моделей механизмов с упругими звеньями.

Одной из центральных проблем динамического анализа является неоднозначность выбора упругой модели [3]. В зависимости от того, какие звенья механизмов считаются упругими, а какие жесткими, одна и та же механическая система может описываться различными динамическими моделями. Полный учет упругости всех деталей и зазоров в кинематических парах делает математическую модель чрезмерно сложной и труднореализуемой на практике. Рациональный подход заключается в выделении наиболее податливых звеньев, упругость которых наиболее существенно может сказаться на результатах динамического анализа.

Важным аспектом при построении таких моделей является не только определение жесткостных характеристик, но и учет диссипативных сил [4]. Силы сопротивления, возникающие

из-за внутреннего трения в материале и конструкционного демпфирования, возникающие в местах соединения отдельных деталей конструкции, приводят к рассеиванию энергии и оказывают существенное влияние на амплитуду колебаний звеньев [5].

В данной работе, при рассмотрении вопросов построения и анализа динамических моделей механических систем с упругими звеньями, особое внимание уделяется математическому описанию систем с использованием уравнений Лагранжа второго рода, а также методам определения упругих перемещений в механизмах с учетом их инерционных и диссипативных свойств.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23490285).

Ключевые слова: динамическая модель, упругие перемещения, передаточный механизм, диссипативные силы, жесткостные характеристики.

2020 Mathematics Subject Classification: 70E55, 70J25, 74H45

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артоболевский И.И. *Теория механизмов и машин*, М.: Наука, (1975).
- [2] Левитский Н.И. *Теория механизмов и машин*, М.: Наука, (1979).
- [3] Коловский М.З. *Динамика машин*, Л. Машиностроение, (1989).
- [4] Вейц В.А. *Нелинейные задачи динамики и прочности машин*, Л.: ЛГУ, (1983).
- [5] Джолдасбеков У.А., Уалиев Г., Молдабеков М.М., Тулешов А.К. *Моделирование механических систем*, Учебное пособие в двух частях, Алматы: КазГУ. (1992).

АНИМАЦИОННОЕ 3D МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЕРЦИИ ДВИЖЕНИЯ РОБОТ-МАНИПУЛЯТОРОВ

М.У. УТЕНОВ¹, Е.С. ТЕМИРБЕКОВ², Б.А. КАРАСАЕВ³

^{2,3}ИММаш им.У.А.Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

^{1,2}КазНУ им.аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Доклад посвящен актуальной научной проблеме – учету распределённых инерционных нагрузок, возникающих при движении в звеньях робот-манипуляторов под действием их массы.

На данный момент, как показал обзор научных работ по этой проблеме, учет инерционных нагрузок при движении робот-манипулятора происходит традиционным методом. А именно – приложением, в каждом расчетном положении робот-манипулятора, главных векторов сил и главных моментов сил инерции к центрам соответствующих звеньев. Как известно, эти инерционные нагрузки лучше учитывать распределёнными, это позволяет создать значительно более точные модели роботов-манипуляторов. В этом докладе показывается, как эта проблема решалась для робот-манипуляторов распределением инерции по всей длине звеньев, за счет оперирования не силами и моментами, как при принято в расчетах рычажных механизмов, а использованием интенсивностей сил и моментов сил инерции.

Обзор научных работ по этому направлению также показал, что сейчас расчеты на жесткость и прочность робот-манипуляторов традиционно ведутся в два этапа. На первом этапе – отдельно для каждого расчетного положения робот-манипулятора сначала решается задача его кинематики – то есть определяются положения, угловые скорости и ускорения необходимых точек звеньев и самих звеньев – это обычно делается в Matlab или Python. На втором этапе к его расчетной кинематической модели прикладываются внешние нагрузки, веса звеньев, силы и моменты инерции и затем проводится расчет на жесткость и прочность с использованием программ Inventor, SolidWorks, Adams, Ansys и им подобных программ. Это достаточно громоздкий подход. Здесь же, используя программы редактора Maple с пакетом трехмерных

примитивов из пакета `plottools`, решены одновременно эти две задачи. Если говорить более точно, решены задачи: 1. кинематика и 2. прямой ход рекуррентного метода Ньютона-Эйлера.

Проделана работа по разработке алгоритма, в основе которого кинематические соотношения Денавита-Хартенберга и соотношения прямого хода рекуррентного метода Ньютона-Эйлера. На его основе создан программный код для робот-манипулятора RRRRT (то есть для его модели с четырьмя вращательными и одной поступательной кинематическими парами), в котором с использованием пакета `plottools` созданы трехмерные примитивы – это стойки, шарниры, звенья и схват робот-манипулятора. Затем все это собрано в `main`-программу редактора Maple. С добавлением опций `display`, `rotate` создана визуализированная интерактивная модель этого робот-манипулятора. С организацией цикла по варьированию с определенными шагами обобщенных координат робот-манипулятора создана анимационная модель. Полученные в ходе реализации программного кода инерционные нагрузки – это различные анимационные эпюры интенсивности инерционных усилий и моментов, расположенные прямо на звеньях этого робот-манипулятора в его полном цикле движения по заданным законам изменения обобщенных координат.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (№BR31715767)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ В БИТУМНЫХ КОМПОЗИТАХ ПРИ ПОСЛОЙНОЙ 3D-ПЕЧАТИ

А.Т. ХАБИЕВ¹, С.Б. ЮЛУСОВ², М.О. КАНАПИЯ³

^{1,2,3}Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан
alibek1324@inbox.ru

В работе рассматривается фундаментальная математическая модель процессов структурообразования в модифицированных битумных композитах при роботизированной послойной 3D-печати. Актуальность исследования обусловлена необходимостью теоретического описания тепломассопереноса, реологических переходов и формирования межслойной адгезии в условиях нестационарного термодинамического режима.

Предлагается связанная нелинейная математическая модель, включающая уравнение нестационарной теплопроводности с температурно-зависимыми коэффициентами, реологическое соотношение вязкоупругого типа (обобщенная модель Максвелла), кинетическое уравнение фазовой релаксации структуры и краевые условия контактного теплообмена между слоями.

Особое внимание уделяется моделированию переходной межслойной зоны как области с градиентным распределением механических и структурных параметров. Формируется вариационная постановка задачи и строится конечно-элементная аппроксимация с учетом нелинейности материала.

Проведен анализ устойчивости численной схемы и доказана сходимость решения при ограничениях на шаг по времени. Получены зависимости прочности межслойного контакта от скорости подачи материала, температуры экструзии и скорости охлаждения.

Разработанная модель позволяет прогнозировать механические характеристики готовых изделий, определять оптимальные технологические режимы и минимизировать дефекты аддитивного формования. Результаты способствуют развитию математической теории аддитивного производства вязкоупругих композиционных материалов.

Рассматривается область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, соответствующая формируемому слою материала. Нестационарное температурное поле описывается уравнением теплопроводности:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) + Q(x, t), \quad (1)$$

где ρ — плотность, $c(T)$ — теплоемкость, $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности, $Q(x, t)$ — внутренний источник тепла.

При этом реологическое поведение композита моделируется обобщенной вязкоупругой моделью Максвелла:

$$\sigma + \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E(T) \left(\varepsilon + \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad (2)$$

где σ — тензор напряжений, ε — тензор деформаций, $E(T)$ — температурно-зависимый модуль упругости, τ_i — времена релаксации.

Формирование межслойной адгезии описывается кинетическим уравнением структурной эволюции:

$$\frac{d\phi}{dt} = k(T)(1 - \phi) - \gamma\phi, \quad (3)$$

где $\phi \in [0, 1]$ — параметр структурной связанности слоя.

Краевые условия задаются в виде:

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{env}) \text{ на } \partial\Omega. \quad (4)$$

Переход к вариационной постановке позволяет записать задачу в виде:

$$a(u, v) = L(v), \quad (5)$$

после чего строится конечно-элементная аппроксимация:

$$M\dot{T} + K(T)T = F. \quad (6)$$

Показано, что при условии липшицевой непрерывности коэффициентов система обладает единственным слабым решением, а численная схема устойчива при выполнении условия:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_{\max}(M^{-1}K)}. \quad (7)$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (№BR31715767).

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные дифференциальные уравнения, тепломассоперенос, вязкоупругость, конечно-элементный метод, аддитивные технологии, межслойная адгезия.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ 3D-ПЕЧАТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.Т. ХАБИЕВ¹, С.Б. ЮЛУСОВ², М.О. КАНАПИЯ³

^{1,2,3}Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
Алматы, Казахстан
alibek1324@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается математическая постановка задачи оптимального управления процессом 3D-печати модифицированных битумных композитов. Процесс характеризуется многопараметричностью и нелинейной зависимостью выходных характеристик от технологических режимов. Для постановки задачи был введен функционал качества, включающий прочностные характеристики изделия, адгезионную устойчивость, геометрическую точность и

энергоэффективность процесса. Задача сведена к многокритериальной оптимизации с ограничениями. Для ее решения применяются методы градиентной оптимизации, алгоритмы Парето-оптимальности, регрессионные модели машинного обучения, нейросетевые аппроксиматоры нелинейных зависимостей и адаптивные алгоритмы управления в реальном времени.

Построена предиктивная модель на основе обучающей выборки экспериментальных данных. Проведена валидация модели и оценка точности прогноза. Показано, что использование интеллектуальных алгоритмов позволяет снизить вариабельность прочностных характеристик до 15–20% и повысить воспроизводимость технологического процесса.

Предложенный математический аппарат расширяет применение методов оптимального управления и вычислительной математики в задачах аддитивного производства и интеллектуальных промышленных систем.

Процесс 3D-печати рассматривается как задача оптимального управления динамической системой:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t)$ — вектор состояния (температура, вязкость, адгезия), $u(t)$ — управляющие параметры (температура экструзии, скорость подачи, охлаждение), θ — параметры материала.

Функционал качества формулируется как:

$$J(u) = \int_0^T (\alpha_1 \|\sigma(x(t))\|^2 + \alpha_2 \|\nabla T(t)\|^2 + \alpha_3 E_{cons}(t)) dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Задача решается с учетом ограничений:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}. \quad (3)$$

Необходимые условия оптимальности выводятся из принципа Понтрягина:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (4)$$

где гамильтониан:

$$H = \lambda^T f(x, u, \theta) + L(x, u). \quad (5)$$

Для аппроксимации нелинейных зависимостей была использована регрессионная модель:

$$\hat{y} = F_{\beta}(X), \quad (6)$$

где F_{β} — ансамблевый алгоритм градиентного бустинга либо нейросетевая модель:

$$\hat{y} = W_2 \sigma(W_1 x + b_1) + b_2. \quad (7)$$

Многокритериальная оптимизация была проведена в пространстве критериев:

$$\min(f_1(u), f_2(u), f_3(u)), \quad (8)$$

с поиском множества Парето:

$$P = \{u^* : \nexists u \text{ такое, что } f_i(u) \leq f_i(u^*)\}. \quad (9)$$

При этом показано, что адаптивная корректировка управляющего сигнала

$$u_{k+1} = u_k - \eta \nabla J(u_k) \quad (10)$$

обеспечивает сходимость при выполнении условия выпуклости функционала в окрестности оптимума.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (№BR31715767).

Ключевые слова: оптимальное управление, многокритериальная оптимизация, машинное обучение, нейронные сети, численные методы, аддитивные технологии, интеллектуальные системы.

АНОМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Б.Х. ХУЖАЁРОВ¹, Ж.Р. ТУЙГУНОВ²

¹Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики
Узбекистан

²Самаркандский государственный университет архитектуры и строительства им.
М.Улугбека, Республики Узбекистан

¹b.khuzhayorov@mail.ru, ²javlonbektuygunov312@gmail.com

Изучение процессов фильтрации жидкости в неоднородных пористых средах, состоящих из частей с различными физико-механическими свойствами, является актуальной задачей для нефтегазовой промышленности и подземной гидрологии [1]. В данной работе рассматривается задача об аномальной фильтрации жидкости в неоднородной одномерной пористой среде, состоящей из трех частей, с различными фильтрационно-емкостными свойствами.

Уравнение фильтрации жидкости в одномерном случае, выведенное на основе аномального закона фильтрации [2], имеет вид

Можно использовать автоматическую нумерацию формул:

$$\mu\beta^\alpha \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right) \right), \quad 0 < x < L_1, \quad L_1 = \text{const}, \quad (1)$$

где μ -динамический коэффициент вязкости, β^* - коэффициент упругоэластичности среды, t -время, p -давление, $k(x)$ -фрактальная кусочно-неоднородная проницаемость, $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ -порядок производной.

Среда состоит из трех зон одинаковой длины, но в каждой из них проницаемость $k_f(x)$ различна.

Начальное условие принимаем в виде:

$$p(0, x) = p_0 = \text{const} \quad (2)$$

Граничные условия следующие:

$$p(t, 0) = p_c(t) = p_c(1 - \exp(-\omega \cdot t)), \quad p(t, L_1) = 0, \quad \omega = \text{const}, \quad \omega > 0, \quad p_c = \text{const}. \quad (3)$$

В точках разрыва проницаемости $x = \frac{L_1}{3}, \frac{2L_1}{3}$ давление и скорость фильтрации остаются непрерывными. Соответственно, принимаются следующие условия

$$p(t, x)|_{x=(\frac{L_1}{3})-0} = p(t, x)|_{x=(\frac{L_1}{3})+0}, \quad (4)$$

$$p(t, x)|_{x=(\frac{2L_1}{3})-0} = p(t, x)|_{x=(\frac{2L_1}{3})+0}, \quad (5)$$

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{L_1}{3})-0} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{L_1}{3})+0}, \quad (6)$$

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{2L_1}{3})-0} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=(\frac{2L_1}{3})+0}. \quad (7)$$

Для решения задачи (1) – (7) использован метод конечных разностей. Отметим, что для простых условий задача анализирована в [3].

Некоторые результаты для давления и скорости фильтрации для двух значений α и нелинейных зависимостях $k_f(x)$ в зонах приведены на рис.1-2.

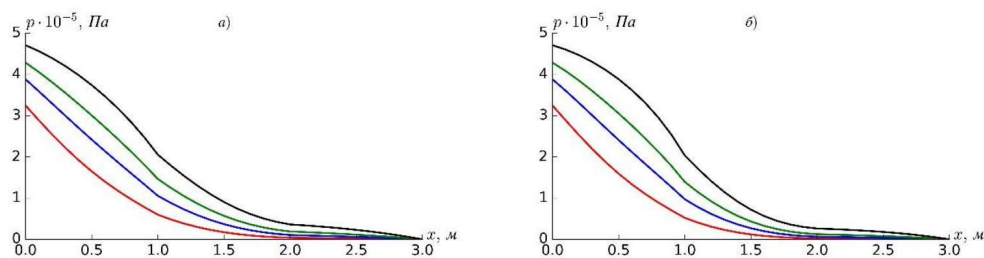


Рис. 1: Профили давления при $\alpha = 0, 1(a)$, $0, 15(b)$, $t = 350$ (—), 500 (—), 650 (—), 950 (—) с.

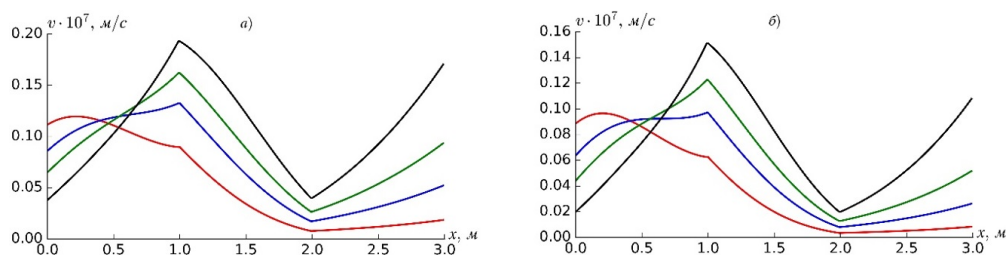


Рис. 2: Профили скорости фильтрации при $\alpha = 0, 1(a)$, $0, 15(b)$, $t = 350$ (—), 500 (—), 650 (—), 950 (—) с.

Разрывы проницаемости на границах зон $x = \frac{L_1}{3}$, $\frac{2L_1}{3}$ приводят к разрыву 1-го рода градиента давления, но непрерывность для давления и скорости фильтрации сохраняется. Соответственно на границах зон наблюдаются изломы на графиках профилей давления и скорости фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dullien F. A. L. *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure.*, -San Diego: Academic Press, 1992. – 574 p.
- [2] Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory , *Geothermics*, 1999. Т. 28. №1. Рр. 113-130
- [3] Хужаёров Б.Х., Туйгунов Ж.Р. Задача аномальной фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной пористой среде , in: Журнал «Проблемы механики». Ташкент: Фан. 2025. №4. С. 60–70.

1,2 1,3

A New Eigenvector-Based Method for the Matrix Algebraic Riccati Equation

F.A. ALIEV¹, N.S. HAJIYEVA²

¹*Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan*

²*Institute of Information Technologies of the Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

³*Institute of Data Science and Artificial Intelligence, Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

¹f.aliev@yahoo.com, ²n.hajiyeva@gmail.com

This study introduces a novel analytical expression for the solution of matrix algebraic Riccati equations (MARE) [1-3]. The proposed methodology relies on the spectral analysis of the corresponding Hamiltonian matrix, with particular emphasis on the properties of its eigenvectors. In comparison with traditional solution techniques, the developed formula makes it possible to address

a class of optimization problems for which existing approaches, including those attributed to D. Vaughan [4] and H. Kwakernaak [5], are either inapplicable or unsuccessful. The construction of the formula is carried out in a coherent and structured way, underlining both its mathematical justification and its practical computability.

A number of representative examples are presented to illustrate the performance of the method. For standard configurations, the resulting solutions agree with those previously established in the literature, thereby confirming the correctness and consistency of the approach. In contrast, for more involved cases where the methods of D. Vaughan and H. Kwakernaak fail to produce feasible solutions, the new formulation yields accurate and reliable results.

Overall, the proposed analytical framework broadens the scope of existing techniques for solving matrix algebraic Riccati equations and serves as an effective alternative for handling complex optimization problems encountered in control theory and related areas of applied mathematics.

Consider the linear time-invariant system [6-8]:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

where $x(t)$ – n -dimensional phase vector, $u(t)$ – m -dimensional control action vector, $x(0)$ – n -dimensional known vector, F , G , respectively, $n \times n$, $n \times m$ dimensions known constant matrices. It is required to find the regulation law

$$u(t) = Kx(t), \quad (3)$$

such that the closed-loop system (1)+(2) is asymptotically stable and the following quadratic functional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x'(t)Rx(t) + u'(t)Cu(t))dt, \quad (4)$$

reaches minimum value, such a problem is called optimal stabilization, where $C = C' > 0$, $R = R' \geq 0$, respectively, $m \times m$, $n \times n$, dimensions known matrices. The prime sign (') denotes the transpose operation. Note that, (F, G) is stabilizable pair,

$$K = -C^{-1}G'S,$$

S is the solution of the following MARE:

$$SF + F'S - SGC^{-1}G'S + R = 0. \quad (5)$$

Adopting the notation

$$H = \begin{bmatrix} F & -GC^{-1}G' \\ R & F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

for solving the algebraic matrix Riccati equation (AMRE) (5) [9–12], a new formula is derived

$$S_N = (V_{11}V_{21}^{-1}H_{22} - H_{12})^{-1}(H_{11} - V_{11}V_{21}^{-1}H_{21}), \quad (6)$$

The matrix Λ containing the eigenvalues of the Hamiltonian matrix H lie on the right half plane, the matrix

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

corresponding eigenvectors and

$$(-H)^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}.$$

References

- [1] F.A. Aliev, V.B. Larin, Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Gordon and Breach Sci, Amsterdam, (1998).
- [2] V.B. Larin, F.A. Aliev, On the solution of algebraic Riccati equations, Mathematical physics, Naukova Dumka, Kyiv, (1975).
- [3] F.A. Aliev, Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems, Elm, Baku, 1989.
- [4] D.R. Vaughan, A negative exponential solution for the matrix Riccati equation, IEEE Transactions on Automatic Control, (1969), 72–73.
- [5] H. Kwakernaak, R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, New York, London, 1972.
- [6] F.A. Aliev, V.B. Larin, N.I. Velieva, Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, Outskirts Press, USA, 2022.
- [7] A.J. Laub, Schur method for solving algebraic Riccati equations, IEEE Transactions on Automatic Control, 24(6), (1973), 913–921.
<https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102186>.
- [8] A.E. Bryson, Y.C. Ho, Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, 1972.
- [9] F.A. Aliev, B.A. Bordyug, V.B. Larin, Comments on “A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers”, *Systems & Control Letters*, 14(5), (1990).
- [10] F.A. Aliev, V.B. Larin, Comments on “On Computing the Stabilizing Solution of a Class of Discrete-time Periodic Riccati Equations” by V. Dragan, S. Aberkane, I.G. Ivanov, *Appl. Comput. Math.*, 13(2), (2013), 266–267.
- [11] F.A. Aliev, V.B. Larin, Comments on “A structured doubling algorithm for discrete-time algebraic Riccati equations with singular control weighting matrices” by Chun-Yueh Chiang, Hung-Yuan Fan and Wen Wei Lin, *Applied and Computational Mathematics*, 10(2), (2011), 356–360.
- [12] F.A. Aliev, V.B. Larin, Comments on “Computing the Positive Stabilizing Solution to Algebraic Riccati Equations with an Indefinite Quadratic Term Via a Recursive Method”, *Appl. Comput. Math.*, 8(2), (2009), 268–269.

On the Dynamics of Mean-Field Coupled Interval Maps with Singularities

Sh.Y. ALTYNBEKOV¹, M. RUZIBOEV²

¹South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

²National Pedagogical University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

¹shadiar@mail.ru, ²m.ruziboev@npuuz.uz

In this work, we consider a globally coupled system of uniformly expanding one-dimensional maps and show that when the coupling strength is sufficiently small there exists an invariant physical measure.

Let $C_1 := \left\{ h \in L^1[0, 1] : h \geq 0, \int_0^1 h(x) dx = 1 \right\}$. Then for all $\varepsilon \in [0, \delta)$, $\delta > 0$, and $h \in C_1$, consider a family $T_{\varepsilon, h} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ of maps, with respect to Lebesgue measure m on $[0, 1]$.

Let $c \in (0, 1)$, $\beta \in (-1, -\frac{3}{4})$, we assume that $T_{\varepsilon, h}$ satisfies the following assumptions (adapted from [1]):

(A1) $T_{\varepsilon, h}|_{[0, c]}$ and $T_{\varepsilon, h}|_{(c, 1]}$ are one to one.

(A2) $T_{\varepsilon, h}(0) = 0$, $T_{\varepsilon, h}(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c^\pm} T_{\varepsilon, h}(x) = a_\varepsilon \in [0, 1]$.

(A3) $T_{\varepsilon, h}|_{[0, 1] \setminus \{c\}} \in C^3$.

(A4) $\sup_{\varepsilon \in [0, \delta)} \inf_{x \in [0, 1] \setminus \{c\}} |T'_{\varepsilon, h}(x)| \geq \theta > 1$, for all $h \in C^1$.

(A5) T_0 is independent of h and is topologically mixing on $[0, a_0]$.

(A6) $\forall \varepsilon \in [0, \delta), \forall h \in C^1, \lim_{x \rightarrow c^\pm} T'_{\varepsilon, h}(x) = \pm\infty$ and $\lim_{x \rightarrow c^\pm} \frac{|T'_{\varepsilon, h}(x)|}{|x-c|^\beta} = C_{\varepsilon, 1}$.

(A7) $\forall \varepsilon \in [0, \delta), \forall h \in C^1, \lim_{x \rightarrow c^\pm} \frac{|T''_{\varepsilon, h}(x)|}{|x-c|^{\beta-1}} = C_{\varepsilon, 2}, \lim_{x \rightarrow c^\pm} \frac{|T'''_{\varepsilon, h}(x)|}{|x-c|^{\beta-2}} = C_{\varepsilon, 3}$.

(A8) The power-law divergence of the derivatives of $T_{\varepsilon, h}$ is uniform in ε for all h :

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \delta), i \in \{0, 1, 2\}, x \in [0, 1]} \left| \frac{T_{\varepsilon, h}^{(i+1)}(x)}{(x-c)^{\beta-i}} \right| < \infty,$$

Furthermore,

$$\inf_{\varepsilon \in [0, \delta), x \in [0, 1]} \left| \frac{T'_{\varepsilon, h}(x)}{(x-c)^\beta} \right| > 0, \text{ for all } h.$$

The transfer operator associated with $T_{\varepsilon, h}, L_{T_{\varepsilon, h}}$, is such that for $f \in L^1, g \in L^\infty$.

$$L_{T_{\varepsilon, h}} f \in L^1, \quad g \in L^\infty, \quad \text{for } f \in L^1, g \in L^\infty.$$

$$\int_0^1 L_{T_{\varepsilon, h}} f \cdot g \, dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T_{\varepsilon, h} \, dm.$$

Then we have L_ε , defined as $L_\varepsilon(h) := L_{T_{\varepsilon, h}} h$.

(A9) $\exists C > 0$, for $g \in W^{1,1}, h_1, h_2 \in C^1$ such that $\|(L_{T_{\varepsilon, h_1}} - L_{T_{\varepsilon, h_2}})g\|_2 \leq \hat{C}_\varepsilon \|h_1 - h_2\|_2 \|g\|_{W^{1,1}}$.

(A10) $\exists C > 0$, for $g \in W^{2,1}, h_1, h_2 \in W^{1,1} \cap C^1$ such that $\|(L_{T_{\varepsilon, h_1}} - L_{T_{\varepsilon, h_2}})g\|_{W^{1,1}} \leq \hat{C}_\varepsilon \|h_1 - h_2\|_{W^{1,1}} \|g\|_{W^{2,1}}$.

1.1. Strategy. Our goal is to find fixed points of L_ε in some Banach space B . For ε small enough, we want to show that there exists a unique fixed point in B , h_ε , such that for all $h \in B$, $n \in \mathbb{N}, \exists \delta \in (0, 1), C_h > 0$ so that $\|L_\varepsilon^n(h) - h_\varepsilon\|_B \leq C_h \delta^n$.

In order to do this, we use the following technique. We find $\bar{B} \subset B$, a non-empty, convex, compact space. First, we show that $\bar{B}$ is invariant, i.e. $L_\varepsilon(\bar{B}) \subset \bar{B}$ and $L_\varepsilon : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ is continuous. Then we prove that L_ε is a contraction in B : for any $h_1, h_2 \in B$, $\exists C > 0, \gamma \in (0, 1)$ such that $\|L_\varepsilon^n h_1 - L_\varepsilon^n h_2\|_B \leq C \gamma^n \|h_1 - h_2\|_B$.

References

- [1] Bahsoun W., Galatolo S. Linear response due to singularities, *Nonlinearity*, **37** (2024), 075010.
- [2] Bahsoun W., Korepanov A. Statistical aspects of mean field coupled intermittent maps, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2023), DOI: 10.1017/etds.2023.53.
- [3] Bahsoun W., Liverani C., Sélley F.M. Globally coupled Anosov diffeomorphisms: statistical properties, *Communications in Mathematical Physics*, **400** (2023), 1791–1822.
- [4] Boyarsky A., Góra P. *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Birkhäuser, Boston (1997).
- [5] Keller G. Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **69**:3 (1985), 461–478.
- [6] Liverani C. *Invariant measures and their properties: A functional analytic point of view*, Lecture Notes, Rome (2002).
- [7] Sarig O. *Introduction to the transfer operator method*, Lecture Notes, Hausdorff Research Institute for Mathematics (2020).

To the qualitative properties solutions of double nonlinear cross diffusion coupled system

M. ARIPOV¹, M. KUDRATILLAeva²

^{1,2}*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

No e-mail

Consider the following Cauchy problem in $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in \mathbb{R}^N\}$ to the cross diffusion coupled system with time-dependent convective transfer

$$L_1(u, v) = -\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \left(v^{m_1-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u \right) + \operatorname{div}(c(t)u) + u^{\beta_1} = 0, \quad (1)$$

$$L_2(u, v) = -\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div} \left(u^{m_2-1} |\nabla v^k|^{p-2} \nabla v \right) + \operatorname{div}(c(t)v) + v^{\beta_2} = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3)$$

where $\beta_1, \beta_2, p, m_i, i = 1, 2$ are given numbers, characterizing nonlinear medium and power of source, $0 \leq u_0(x), v_0(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ are given functions. The function $c(t)$ is the spread of convective transfer. The equation (1) is a base for modeling of the many physical, biological, chemical, economical processes (see [1–3] and citations therein). For computational goal very important to investigate the qualitative properties of solutions such as global solvability, a condition of arising blow up solution, properties of finite speed of perturbation, a space localization, estimate, asymptotic of solution, to find an exact solution (if it possible) depending on value of numerical parameters of considered problem.

In particular, the following Fujita type global solvability of the problem (1) in the critical case proved.

Theorem. Let

$$\beta_1 \beta_2 - 1 > 0, \quad m_i + k(p-2) = 1, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\beta_i + 1}{\beta_1 \beta_2 - 1} = \frac{N}{p}, \quad i = 1, 2,$$

$$u(0, x) \leq u_-(0, x), \quad v(0, x) \leq v_-(0, x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Then for the solution of the problem (1) the estimate

$$u(t, x) \leq (T+t)^{-N/p} \exp \left(-k^{2-p} \left(\frac{\xi}{p} \right)^p \right),$$

$$\xi = \frac{|\eta|}{(T+t)^{1/p}}, \quad \eta = \int_0^t c(y) dy - x,$$

$$v(t, x) \leq (T+t)^{-N/p} \exp \left(-k^{2-p} \left(\frac{\xi}{p} \right)^p \right).$$

hold.

Numerical solution of the considered problem also discussed. The numerical solution based on the Newton, Picard linearization methods. The problem choosing an initial approximation for iteration processes is solved.

References

- [1] Aripov M., Sadullaeva Sh.A., *Computer modeling of nonlinear diffusion processes*, Tashkent: University Press, 2020, 687 pp.
- [2] Escobedo M., Herrero M.A., Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system, *J. Differential Equations*, 89(1) (1991), 176–202.
- [3] Fujita H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^\beta$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 13 (1966), 109–124.

Heat pump assisted solar dryer for dry fruit production in the Turkestan region of Kazakhstan

A. AZIMBAYEV¹, S. ZHILKIBAYEVA², Ye. RYMKUL³, Ye. BELYAYEV⁴,
M. MOHANRAJ⁵, M. ARICI⁶, O. ABDULLAH⁷

^{1,3,4} *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

² *Auezov University, Shymkent, Kazakhstan*

⁵ *Hindusthan College, Coimbatore, India*

⁶ *Kocaeli University, Kocaeli, Turkey*

⁷ *University of Baghdad, Baghdad, Iraq*

⁴ yerzhan.belyaev@kaznu.edu.kz, yerzhan.belyayev@gmail.com

The southern regions of Kazakhstan, particularly Turkestan, have significant potential for fruit production, including apricots, grapes, apples, and peaches. However, post-harvest losses remain high due to insufficient drying and preservation technologies. Traditional open-air drying methods depend strongly on weather conditions and often lead to contamination and quality degradation. This study proposes the use of a heat pump assisted solar dryer (HPASD) as an energy-efficient technology for fruit dehydration in continental climates. The system integrates a solar air collector with a heat pump cycle to maintain stable drying temperatures regardless of solar radiation variability. A mathematical model based on energy and mass balance equations is used to evaluate the system's performance. Simulation results show that the hybrid system significantly improves drying efficiency compared with conventional solar dryers and reduces drying time for agricultural products. The proposed technology is suitable for developing sustainable dry fruit production in the Turkestan region of Kazakhstan.

System Concept and Schematic.

The heat pump assisted solar dryer consists of two interacting subsystems: the solar air heating circuit and the heat pump refrigeration cycle. The solar collector preheats the air using solar radiation, while the heat pump ensures constant drying temperatures during periods of low solar intensity. Figure 1 illustrates the schematic diagram of the HPASD system. In the drying chamber, heated air flows through trays containing sliced fruits. Moisture evaporates from the product and is removed from the airflow. The evaporator condenses the moisture while absorbing heat, and the compressor circulates the refrigerant in the heat pump cycle.

Mathematical Modeling. The mathematical model of the HPASD is formulated using energy and mass balance relations for the main components of the system, including the solar air collector, drying chamber, and heat pump units such as the compressor, condenser, expansion device, and evaporator [1]. The model describes the heat transfer between the solar collector and the circulating air, the moisture evaporation from the agricultural product during the drying process, and the thermodynamic behavior of the refrigerant within the heat pump cycle. It simultaneously evaluates the variations of air temperature, humidity ratio, refrigerant thermodynamic properties, and the energy consumption of the system to assess the overall drying performance and energy efficiency. For modeling purposes, several simplifying assumptions are introduced: the system is considered to operate under steady-state conditions; the thermophysical properties of air and refrigerant are assumed constant; heat losses through the dryer walls are neglected; the airflow inside

the drying chamber is uniform; and the moisture distribution within the product is assumed to be homogeneous. Under these assumptions, the model enables the prediction of key performance parameters such as the drying rate, coefficient of performance (COP), and specific moisture extraction rate (SMER) of the HPASD system.

Results and Discussion. The simulation results demonstrate that the HPASD provides significantly improved drying performance compared with conventional solar dryers under continental climate conditions. The hybrid system maintains a stable drying chamber temperature of about 50–56 °C, which ensures effective moisture removal from the product. The moisture content of banana slices was reduced from approximately 74% (wet basis) to about 19% within 21 hours, whereas a conventional solar dryer required about 35 hours to achieve a similar final moisture level.

The analysis also showed that the HPASD system achieved an average specific moisture extraction rate of about 0.6 kg/kWh and an average COP of approximately 2.7, indicating higher energy efficiency and faster drying compared with traditional solar drying methods [2]. These results confirm that the hybrid heat pump–solar drying technology is suitable for agricultural product dehydration in continental climates such as those of Kazakhstan.

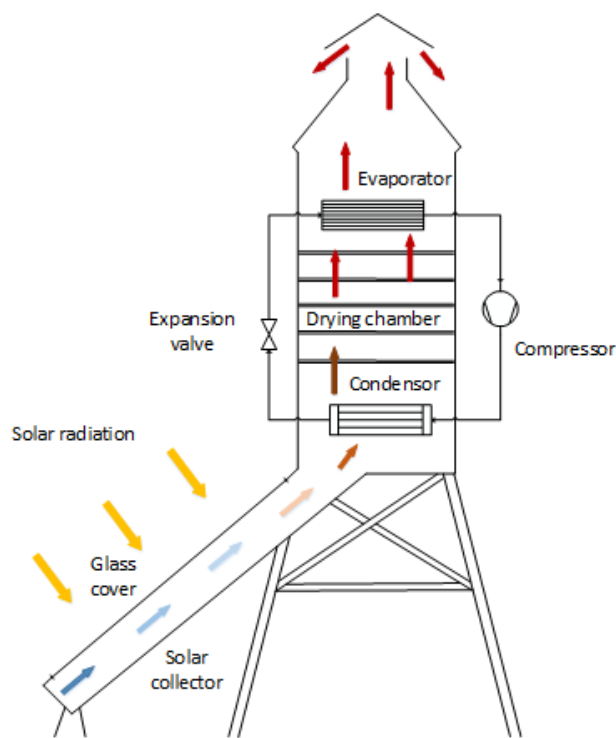


Figure 1: Heat pump assisted solar dryer system.

Conclusion. The results reveal that the heat pump assisted solar dryer provides stable drying conditions and higher energy efficiency compared with conventional solar dryers. The hybrid system is capable of maintaining the required drying temperature of 50–56 °C and significantly reducing drying time from by about 40% (35 h to 21 h), even under continental climate conditions. Such technology is particularly relevant for the Turkestan region of Kazakhstan, where large quantities of fruits such as apricots, grapes, and apples are produced. The implementation of HPASD systems can improve the quality of dried fruits, reduce post-harvest losses, and support the development of sustainable dry fruit production in southern Kazakhstan.

Keywords: heat pump, solar dryer, fruit drying, energy efficiency, Kazakhstan, continental climate, coefficient of performance.

References

- [1] Kuan M., Shakir Ye., Mohanraj M., Belyayev Ye., Jayaraj S., Kaltayev A. Numerical simulation of a heat pump assisted solar dryer for continental climates, *Renewable Energy*, **143** (2019), 214–225.
- [2] Rashid F.L., Hammoodi K.A., Al Maimuri N.M.L., Abdalraheem M.K., Ashour A.M., Bouabidi A., Kadhim S.A., Aryanfar Y., Chibani A. Recent advancements in hybrid solar dryer, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **171** (2026), 110042.

Numerical simulation of the thermal and filtration regime of a tailings dam of the Kumtor mine with an artificial ice inclusion in the foundation in 3d mode

M. J. JAMANBAEV¹, T. T. ABDYRAKOV²

¹KSTU Razzakov Univeristy, Bishkek, Kyrgyz Republic

²Kumtor Mine, Bishkek, Kyrgyz Republic

¹jamanbaevm@mail.ru, ²tilek.abdyrakov@yahoo.com

Numerical modeling of the thermal–filtration regime in a three-dimensional domain is performed with the simulation of an ice inclusion beneath the foundation of a tailings dam of the KUMTOR mine located at an elevation of 3670 m under permafrost conditions. Due to the operation of the KUMTOR mining enterprise, tailings are continuously accumulated in the storage facility in the form of slurry. As the tailings storage is filled, the dam is progressively raised downstream. The dam height has reached 49 m with slope inclinations of 1:3.

The ice body is not an actually existing element of the structure or natural environment. It was introduced for research purposes to analyze the influence of local permafrost inclusions on the thermal regime and filtration processes. The dam body is equipped with monitoring instruments, including inclinometers (INC), piezometers (PZ), and thermistors (TH). Numerical simulations were performed using the COMSOL Multiphysics 6.2 software package over a period of 400 days. Comparison of the simulated temperature results with field observations demonstrated good agreement [1].

Problem formulation. The geometric dimensions and spatial configuration of the computational domain closely correspond to the real dimensions of the existing tailings storage facility of the KUMTOR mine [1]. Within the framework of numerical modeling, a three-dimensional section of the dam was considered, reflecting the actual structure and operating conditions of the facility. The selected 3D fragment represents a local section adjacent to the lateral interface between the dam body and the natural ground mass (mountain slope), which allows accounting for spatial effects and boundary conditions characteristic of the real structure [4].

To study the influence of local permafrost inclusions on the thermal regime and filtration processes, a separate domain representing an ice mass was introduced at the dam foundation. The dimensions of this ice domain were 30 m in width, 27 m in length, and 4–5 m in height. This approach makes it possible to qualitatively evaluate the sensitivity of the computational model to the presence of zones with significantly different thermophysical and filtration properties.

Ambient temperature data were obtained from a meteorological station Kumtor and approximated as follows:

$$T_e = 25.57 * \sin\left(\frac{2 * \pi * t}{365}\right) - 5.94 \quad (1)$$

The computational domain was divided into five subdomains (Fig. 1). The finite element mesh consisted of 96,976 elements. The simulation time interval was 400 days with a time step of one day. The thermal–filtration process was modeled using heat transfer and fluid flow equations

with appropriate initial and boundary conditions. Real physical and mechanical properties of the foundation soils and dam body were used in the simulations [2].

Results of numerical modeling showed that over time the position of the 0 °C isotherm changes, indicating the development of heat transfer processes in the dam body and foundation under the influence of temperature variations and thermophysical properties of materials. The movement of the 0 °C isotherm has a direct effect on the filtration and strength characteristics of soils, since permeability and mechanical properties change during phase transition.

Changes in filtration characteristics over time are caused by the evolution of the temperature field and the associated variation in soil permeability [5]. During the initial simulation period, at negative temperatures, the filtration velocity values are on the order of 10^{-13} m/s, which corresponds to frozen soil conditions. As the temperature increases and thawing occurs, permeability increases, resulting in an increase in filtration velocity up to values on the order of 10^{-7} m/s. The direction of the filtration flow remains practically unchanged, which is explained by constant boundary conditions and the geometry of the computational domain.

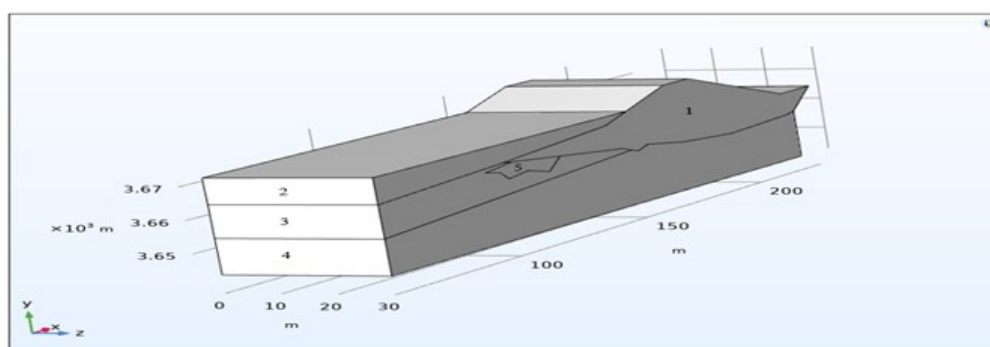


Figure 1: Computational domain. 1 — dam body and downstream shell; 2 — tailings; 3 — loamy layer in the foundation; 4 — foundation soil; 5 — theoretical ice mass.

The results of numerical modeling demonstrate a strong relationship between the thermal state of soils, filtration processes, and dam stability. An increase in temperature leads to the transition of soils from a frozen to a thawed state, which is accompanied by an increase in permeability and, consequently, a rise in filtration velocity and pore pressure. The increase in filtration pressure exerts an additional influence on the stress–strain state of the dam, which is reflected in a reduction of the factor of safety in certain zones.

Thus, the filtration processes in the computational model exhibit a quasi-steady behavior; however, their intensity strongly depends on the thermal state of the soils.

References

- [1] Kumtor Gold Company CJSC *Annual Environmental Report for 2022-2023-2024*, www.kumtor.kg, Bishkek, Kyrgyzstan (2025).
- [2] Abdygaziev K.K., Chukin B.A., Isakov E.R. *Assessment of the stability of the tailings dam at the Kumtor gold mining plant based on monitoring data and numerical modeling of rheological processes*. Bulletin of the Kyrgyz Republic Scientific Society, Bishkek, Kyrgyzstan (2022).
- [3] Trapeznikov A.G., Becker A.T., Isaeva E.S., Tsimbelman N.Ya., Chernova T.I. Numerical modeling of the temperature regime of the frozen soil dam of the Anadyr hydroelectric complex. Bulletin of the Engineering School of Far Eastern Federal University, Russian Federation, (2022).
- [4] Panov S.I., Buryakov O.A., Pryamitsky A.V., Bychkov E.V. Analysis of the influence of boundary and initial conditions on the results of calculations of the temperature state of earth dams in the north. Izvestiya of the B.E. Vedenev All-Russian Research Institute of Hydraulic Engineering, Russian Federation (2012).
- [5] Nazarova L.A., Nazarov L.A., Dzhamanbaev M.D., Chanybaev M.K. *Modeling of heat and mass transfer processes in the vicinity of hydraulic structures in the cryolithozone*. Mountain Information and Analytical Bulletin (2015).

Magnetoelastic Vibrations of a Current-Carrying Plate in a Transverse Nonstationary Magnetic Field

R. INDIAMINOV¹, U. ZARPULLAYEV², T. JUMABOYEV³, Sh. UROLOV⁴

¹*Samarkand Branch Tashkent University of Information Technologies, Samarkand, Uzbekistan*

r_indiaminov@mail.ru

The paper explores the magnetoelastic vibrations of a thin plate that is carrying a current in a transverse nonstationary magnetic field. An integrated deformable solid mechanics and electrodynamics of conducting medium problem is addressed whereby Lorentz forces due to the interaction between electric current and magnetic field are factored. The Kirchhoff-Love hypotheses regarding thin plates and the electromagnetic field equations are used to build a mathematical model. A set of differential equations which is a description of transverse vibrations of the plate under the influence of electromagnetic forces is gained. The effect of the parameters of the magnetic fields and the density of the current on the dynamic behavior of a system is studied. It is demonstrated that the magnetic induction has a strong influence on the amplitude of vibration and natural frequencies that should be considered in the design of electromechanical and magnetoelastic devices.

The interaction between electromagnetic and mechanical fields in conducting elastic elements is needed to develop modern engineering systems, such as power engineering installations, electromechanical converters, magnetically controlled structures, and micro- and nanoelectromechanical systems. In these systems, the presence of a magnetic field in the flow of an electric current results in the generation of volumetric electrodynamic forces which have the potential to deform and vibrate structures. This is referred to as magnetoelastic interaction. Plates with thin current-carrying are of special interest since they are extensively used as sensitive elements of sensors, current-carrying components, membranes, and structural elements. Time-varying Lorentz forces are generated under the influence of a nonstationary magnetic field, and may cause forced vibrations, alter natural frequencies, and influence structural stability. These effects have to be analysed to achieve reliability and durability of devices that work under high loading conditions of the electromagnetic field. This work is focused on the creation of mathematical model and exploration of magnetoelastic vibrations of a thin plate with current on it under the influence of a nonstationary transverse magnetic field.

Problem Statement. Take a thin rectangular plate, of any thickness, which carries an electric current. An external magnetic field is applied to the plate but perpendicular to the surface of the plate. The electric current and the magnetic field interact causing the emergence of a volumetric Lorentz force. When the electric current is made to flow along the xxx-axis, transverse load is created, and the plate is bent. The classical Kirchhoff-Love thin plate theory is used to describe the deformation. The effect of the electrodynamic forces on the deformation and vibration behavior of the current carrying plate is explored within the context of the coupled magnetoelastic problem.

Conclusion. Here, a mathematical model of magnetoelastic vibrations of a current carrying plate in a transverse non stationary magnetic field has been formulated. It has been derived that the plate motion is described by a differential equation which includes Lorentz electromagnetic forces. The magnetic field has been examined to determine its effect on the dynamic behavior of the system. As has been determined, the amplitude of vibrations and natural frequencies can be significantly altered by a nonstationary magnetic field. The deformation amplitudes increase significantly in the near resonance conditions. The received results may be used in design of electromechanical and magnetically controlled structures, and in the construction of mathematical models of magnetoelastic systems.

Keywords: magnetoelasticity, plate with current, nonstationary magnetic field, Lorentz force, vibrations, mathematical modelling.

Visualization of Fluid Flow Velocity and Pressure Using OpenFOAM or ANSYS Fluent

T.R. KADYROVA¹, Ch.N. MAMAZHUNUSOVA²

^{1,2}*B. Sydykov Kyrgyz-Uzbek International University, Osh, Kyrgyzstan*

kadyrova@mail.ru

This research considers the issues of visualizing fluid flow velocity and pressure fields in modern computational fluid dynamics (CFD) software packages, OpenFOAM and ANSYS Fluent. The purpose of the study is to evaluate the accuracy and efficiency of modeling hydrodynamic processes in complex channels using the capabilities of two different software tools.

The Navier-Stokes equations for an incompressible viscous fluid are used as the primary mathematical framework in modeling fluid motion:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Here ρ is density, p is pressure, and μ is dynamic viscosity.

While OpenFOAM, as an open-source platform, allows for deep code modification, ANSYS Fluent is distinguished by its user-friendly interface and powerful meshing algorithms. As a result of numerical simulations, the pressure drop and sharp changes in the velocity gradient in the narrowed parts of the channel were successfully visualized in both software environments. The obtained contours make it possible to accurately determine the zones of turbulence formation.

Acknowledgments: We express our gratitude to the staff of the Department of Digital Technologies and Informatics for their useful discussions.

Keywords: OpenFOAM, ANSYS Fluent, visualization, fluid dynamics, velocity field, pressure.

References

- [1] Ivanov A.A., Smirnov V.V. *Modern methods of computational fluid dynamics in ANSYS Fluent (in Russian)*. Bauman MSTU Press, Moscow (2024).
- [2] Snegirev A.Yu. *Modeling of turbulent flows in OpenFOAM: new approaches (in Russian)*. Polytech-Press, St. Petersburg (2025).
- [3] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theoretical Physics. Vol. VI. Fluid Mechanics (in Russian)*. Nauka, Moscow (1986).
- [4] Moukalled F., Mangani L. *Advanced OpenFOAM: From Theory to Practice*. Springer, Berlin (2024).

Cauchy problem for a high-order ordinary differential equation with the generalized Bessel operator

Sh.T. KARIMOV¹, A.N. BOYNAZAROV²

^{1,2}*Fergana State University, Fergana, Uzbekistan*

¹shaxkarimov@gmail.com, ²ahror010185@gmail.com

In the domain $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ we consider the equation

$$(B_{\alpha, \lambda}^m y)(x) = f(x, y(x)), \quad x > 0, \quad (1)$$

with the Cauchy conditions

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2m - 1. \quad (2)$$

Here

$$B_{\alpha,\lambda} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{d}{dx} + \lambda^2$$

is the generalized Bessel operator, $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, and $f(x, y(x)) \in C[0, b]$, $b > 0$.

Assuming first that $f(x, y(x)) = F(x)$ is known, we use the generalized Erdélyi–Kober transmutation operator [1,2]

$$J_\lambda(\gamma, \alpha)\varphi(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\gamma)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) t^{2\gamma+1} \varphi(t) dt,$$

where $\bar{J}_\nu$ is the Bessel–Clifford function.

We seek the solution of (1)–(2) in the form

$$y(x) = J_\lambda\left(-\frac{1}{2}, \alpha\right)z(x), \quad (3)$$

with an unknown function $z(x) \in C^{2m}[0, \infty)$. Substituting (3) into (1) leads to the simple equation

$$z^{(2m)}(x) = F_0(x), \quad x > 0, \quad z^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

where $F_0(x) = J_\lambda^{-1}(-1/2, \alpha)F(x)$. Its solution is

$$z(x) = \frac{1}{(2m-1)!} \int_0^x (x-t)^{2m-1} F_0(t) dt.$$

Returning to the original variable and using properties of the transmutation operator [3,4], we obtain the nonlinear integral equation equivalent to problem (1)–(2):

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(2m)} \int_0^x K_m(x, s) f(s, y(s)) ds, \quad (4)$$

with the kernel

$$K_m(x, s) = \left(\frac{s}{x}\right)^{2\alpha} \left(\frac{x^2 - s^2}{2x}\right)^{2m-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda^2(x^2 - s^2)^2}{16}\right)^p}{\left(\frac{m+1}{2}\right)_p p!} \times {}_2F_1\left(m + \alpha - \frac{1}{2} + p, m + p; 2m + 2p; \frac{x^2 - s^2}{x^2}\right).$$

To prove existence and uniqueness of a solution to (4) we apply the contraction mapping principle in the complete metric space $C[0, b]$.

Theorem 1. Assume that the function $f(x, y)$ satisfies the Lipschitz condition

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad L > 0,$$

for all $x \in [0, b]$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Then equation (4) has a unique solution $y \in C[0, b]$. Consequently, the Cauchy problem (1)–(2) admits a unique solution.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31714735).

Keywords: generalized Bessel operator, Cauchy problem, transmutation operator, Erdélyi–Kober operator, contraction mapping principle.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A12, 34A34, 47E05

References

[1] Sitnik S.M., Shishkina E.L. *The method of transmutation operators for differential equations with Bessel operators*. Moscow: Fizmatlit, 2018, 224 p.

[2] Urinov A.K., Sitnik S.M., Karimov Sh.T. *Operatory preobrazovaniya na osnove razlichnykh form drobnogo integrodifferentsirovaniya: (prilozheniya k singulyarnym differentsial'nym uravneniyam)* [Transmutation operators based on various forms of fractional integro-differentiation: (applications to singular differential equations)]. Lap Lambert Publishing Group, 2025, 333 p.

[3] Sitnik S., Karimov Sh., Boynazarov A. Solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with an integer power of the Bessel operator using transmutation operators. *Journal of Mathematical Sciences*, (2025). DOI: 10.1007/s10958-025-07990-z

[3] Karimov Sh.T., Boynazarov A.N. The Cauchy problem for a high-order ordinary differential equation involving the Bessel operator and lower-order terms. *Acta NUUz*, 2/2.1 (2025), 64–72.

Bessel operatori qatnashgan Kasr tartibli balka tebranish tenglamasi uchun boshlangich-chegaraviy masala

Sh.T. KARIMOV¹, R.A. MAMAJONOVA²

^{1,2}Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

¹shaxkarimov@gmail.com, ²mamajonovaroibiyakhon@gmail.com

Many problems related to the vibrations of rods, beams, and plates play a significant role in structural mechanics, as well as in the theory of stability of rotating shafts and ship vibration theory, and they lead to higher-order differential equations. Therefore, in recent years, increasing attention has been devoted to the study of linear and nonlinear initial–boundary value problems for the beam vibration equation [1–4].

Since most dynamic phenomena evolve continuously in time, it has become a natural necessity to extend the concept of integer-order derivatives to fractional-order derivatives. This generalization of the classical integer-order derivative makes it possible to account for the memory and nonlocal properties of the processes being modeled.

In this work, an initial–boundary value problem for a fractional-order beam vibration equation involving the square of the Bessel operator is investigated.

In this work, within the domain $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty\}$ the problem of finding a solution $u(x, t) \in M$ satisfying the fractional differential equation involving the square of the Bessel operator

$${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u(x, t) = 0 \quad (1)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$u_x(0, t) = 0, u_{xxx}(0, t) = 0 \quad (3)$$

is investigated. Where ${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t)$ denotes the Gerasimov–Caputo fractional derivative defined by:

$${}^C D_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} u_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ and $\varphi(x)$ is a given sufficiently smooth function.

The class M consists of functions that are continuously differentiable once with respect to t and twice with respect to x on $\overline{\Omega^+}$ and and twice continuously differentiable with respect to t and four times continuously differentiable with respect to x on Ω^+ , $\Gamma(\cdot)$ denotes Euler's Gamma function.

To solve the above problem, we employ transformation operators. Therefore, we first introduce the concept of a transformation operator in the general setting. Let A and B be given operators. A nonzero operator T is called a transformation operator if it satisfies the property

$$TA = BT.$$

Theorem [5]. Let $\alpha > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $f \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$, and suppose that the function $x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^k f(x)$ is integrable at the origin and satisfies $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^k f(x) = 0$. Then the following relation holds:

$$[B_{\eta+\beta}^x + \lambda^{2\gamma}]^k J_\lambda(\eta, \beta) f(x) = J_\lambda(\eta, \beta) [B_\eta^x]^k f(x).$$

In particular, for $\lambda = 0$, we have

$$[B_{\eta+\beta}^x]^k I_{\eta, \beta} f(x) = I_{\eta, \beta} [B_\eta^x]^k f(x).$$

where

$$B_\eta^x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x} \frac{d}{dx} = x^{-2\eta-1} \frac{d}{dx} \left(x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} \right)$$

is the Bessel operator,

$$J_\lambda(\eta, \beta) = \frac{2x^{-2(\beta+\eta)}}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\beta-1} t^{2\eta+1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{x^2 - t^2}) f(t) dt$$

is the generalized Erdélyi–Kober fractional integral, and $\bar{J}_\nu(z)$ denotes the Bessel–Clifford function.

According to this theorem, the Erdélyi–Kober fractional integral operator can be regarded as a transformation operator. This fact is useful for solving problem (1)–(3). Assume that a solution to problem (1)–(3) exists. We seek it in the form

$$u(x, t) = I_{-\frac{1}{2}, \beta}^x V(x, t), \quad (4)$$

where $I_{-\frac{1}{2}, \beta}^x$ is the Erdélyi–Kober operator and $V(x, t)$ is an unknown function.

Applying the theorem with $m = 2$, $\lambda = 0$, and $\eta = -\frac{1}{2}$, and substituting (4) into problem (1)–(3), we obtain the following problem for $V(x, t)$:

$${}^C D_{0t}^\alpha V(x, t) + \frac{\partial^4 V(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad (5)$$

with the initial conditions

$$V(x, 0) = \varphi_0(x), \quad V_t(x, 0) = 0, \quad (6)$$

and the boundary conditions

$$V_x(0, t) = 0, \quad V_{xxx}(0, t) = 0, \quad (7)$$

where

$$\varphi_0(x) = \left(I_{-\frac{1}{2}, \beta}^x \right)^{-1} \varphi(x).$$

In [28], the initial value problem for equation (5) was studied. Our construction is based precisely on the solution of that problem.

Keywords: Bessel operatori, kasr tartibli umumlashgan Erdeyli-Kober integral operatori va Gerasimov-Kaputo operatori.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11

References

- [1] Wang, Y.R., Fang, Z.W. Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends, *Appl. Mech. Tech. Phys.*, **1**:2 (2015), 337–346
- [2] Li, S., Reynders, E., Maes, K., De Roeck, G., Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions, *Sound Vib*, **4**:332 (2013), 795–806
- [3] Kasimov, Sh.G., Madrakhimov, U.S., Initial-boundary value problem for the beam vibration equation in the multidimensional case, *Differ. Equations*, **10**:55 (2019), 1336–1348.
- [4] Sabitov, K.B., Akimov, A.A., Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equations*, **56**:5 (2020), 621–634.
- [5] Karimov, Sh. T., Urinov, A. K. *Erd'elyi-Kober operators and their applications to partial differential equations. Fergana Publishing, Fegana (2021)*
- [6] Karimov Sh.T., Mamajonova R.A. The Cauchy problem for a beam vibration equation involving the Caputo time-fractional operator, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, **8**:4 (2025), 154–160

Lagrangian Consistency and Stabilization of Velocity Constraints in Nonholonomic Systems

I.E. KASPIROVICH

RUDN University, Moscow, Russia

kaspirovich_ie@pfur.ru

The paper deals with inverse problems of dynamics for nonholonomic mechanical systems with velocity-linear constraints and addresses the problem of their stabilization. The approach combines Baumgarte-type stabilization [1] with variational consistency provided by the generalized Helmholtz conditions [2, 3].

The constraints are written in kinematic form as a prescribed velocity field

$$\dot{q} = v(q, t),$$

which defines the constraint manifold in the tangent bundle of the configuration space. Deviations from the constraint manifold are described by the vector

$$h = \dot{q} - v(q, t).$$

The stabilization problem is formulated by prescribing a first-order differential equation for the deviation vector,

$$\dot{h} = F(h, q, t),$$

with the requirements $F(0, q, t) \equiv 0$ and asymptotic Lyapunov stability of the equilibrium $h = 0$. A linear stabilization law of the form

$$F(h, q, t) = K(q, t)h$$

is considered, in the spirit of classical stabilization approaches [1].

Differentiating the kinematic constraints and incorporating the stabilization law yields a system of second-order ordinary differential equations, which can be interpreted as an inverse dynamical problem [4]. The central question is whether this system admits a representation in the form of Lagrange equations with a Rayleigh dissipation function. To answer this question, the generalized Helmholtz conditions are applied [2, 3].

It is shown that, under natural geometric assumptions on the configuration-space metric $m_{ab}(q)$, namely symmetry

$$m_{ab} = m_{ba},$$

and potentiality

$$\frac{\partial m_{ab}}{\partial q^c} = \frac{\partial m_{ac}}{\partial q^b},$$

the generalized Helmholtz conditions simplify significantly. For stabilization laws linear in h , all higher-order compatibility conditions are satisfied identically, while the remaining condition reduces to a cyclic identity involving only the metric tensor and the first derivatives of the matrix K .

Several explicit families of admissible stabilization matrices are constructed. In particular, matrices admitting a gradient-skew decomposition

$$K = -\Lambda + S, \quad \Lambda = \Lambda^T \succ 0, \quad S = -S^T,$$

ensure exponential asymptotic stability of the constraint manifold. For the quadratic Lyapunov function

$$V(h) = \frac{1}{2}h^T h$$

one obtains

$$\dot{V} = -h^T \Lambda h \leq -\lambda_{\min}(\Lambda) \|h\|^2,$$

which guarantees exponential decay of constraint violations, in agreement with classical Lyapunov theory.

The proposed framework provides a unified synthesis of constraint stabilization, inverse dynamics, and variational consistency. It clearly separates geometric properties of the mechanical system from stabilization and control degrees of freedom and embeds Baumgarte-type stabilization into the Lagrangian formalism with dissipation [5].

Funding: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 25-21-00153).

Keywords: inverse problem of dynamics; nonholonomic systems; velocity-linear constraints; constraint stabilization; generalized Helmholtz conditions; Lyapunov stability; Lagrangian consistency; Baumgarte stabilization.

2020 Mathematics Subject Classification: 70H45, 34D20

References

- [1] Baumgarte J. *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **1**:1 (1972), 1–16.
- [2] Crampin M., Mestdag T., Sarlet W. On the generalized Helmholtz conditions for Lagrangian systems with dissipative forces, *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **90**:6 (2010), 502–508.
- [3] Kilau G., Meisser P. Generalization of Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian, *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **86**:9 (2006), 722–735.
- [4] Galiullin A.S. *Methods for Solving Inverse Problems of Dynamics*, Nauka, Moscow (1986).
- [5] Kaspriovich I.E., Mukharlyamov R.G. On methods for constructing dynamic equations with constraint stabilization, *Mechanics of Solids*, **54**:3 (2019), 303–313.

On the convexity of symmetric Banach spaces

S.T. KUDAIBERGENOV¹, S. KHAN²

Astana IT University, Astana 010000, Kazakhstan.

²*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana 010008, Kazakhstan.*

¹serik4648@gmail.com, ²Khan29102000@gmail.com

We use symmetric norm inequalities of Banach space X -valued martingales to characterize the q -uniform convexity of X .

Definition 1. Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space with $\dim X \geq 2$. The function $\delta_X(\cdot) : (0, 2] \rightarrow [0, 1]$ defined by

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{2} \|x + y\|, \quad \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \varepsilon \right\}$$

is called the *modulus of convexity* of X .

Let $2 \leq q < \infty$ and a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ admits a new norm $\|\cdot\|_1$ which is equivalent to the norms $\|\cdot\|$. Then X is called *q-convexifiable* if the inequality $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^q$ holds for some constant c under the new norm.

Theorem 2 (Pisier). *A Banach space X is q-convexifiable if and only if there exist constant $c = c_q > 0$ such that*

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_q \leq c \|f\|_q,$$

where $\|f\|_p = \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p$ for $1 \leq p \leq \infty$.

The Köthe dual of a symmetric Banach function space E on $(0, \alpha)$ is the symmetric Banach function space $E^\times$ given by

$$E^\times = \left\{ g \in L_0(0, \alpha) : \|g\| = \sup_{\|f\|_E \leq 1} \int_0^\alpha |f(t)g(t)| dt < \infty \right\};$$

Let E be a symmetric Banach function space on $(0, \infty)$. Then E has order continuous norm if and only if it is separable, which is also equivalent to the statement $E^* = E^\times$ (see [[2], Chapter 1, Corollary 4.3 and 5.6]).

Let X be a normed space with dual X^* . We define the space $E(X)$ of X -Bochner integrable functions as the space of strongly measurable functions $f : (0, \infty) \rightarrow X$ such that the composition $\|f(\cdot)\|$ is a function in E .

If E is a separable reflexive symmetric space and X is a RNP space, then

$$(E(X))^* = E^\times(X^*) \quad (1)$$

(see [3]). Let

$$H_E(X) = \{f = (f_n)_{n \geq 1} : (f_n)_{n \geq 1} \text{ is } E\text{-bounded } X\text{-valued martingale}\}$$

with norm $\|x\|_E = \sup_{n \geq 1} \|x_n\|_E < \infty$. Similarly, we define $H_{E^\times}(X^*)$.

Lemma 3. *Let $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ be a fixed increasing sequence of σ -subalgebras of $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ be generated by $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ and X be a Banach space. Let E be a separable symmetric space and consider $f \in E(X)$. Then $(\mathcal{E}_n(f))_{n \geq 1}$ is a martingale such that $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow f$ in $E(X)$ when $n \rightarrow \infty$.*

Lemma 4. *Let X be a Banach space and E be a separable symmetric space. Then*

$$E(X)^* = H_{E^\times}(X^*)$$

Theorem 5. *Let X be a reflexive Banach space, and let E be a separable reflexive symmetric space. Then every E -bounded X -value martingale $(x_n)_{n \geq 1}$ converges.*

Theorem 6. *Let X be a Banach space. Then the following are equivalent:*

1. X is q-convexifiable

2. For any separable reflexive symmetric space E with $1 < p_X \leq q_X < \infty$, there is constant $c_E > 0$ such that

$$\forall f = (f_n)_{n \geq 1} \in H_E(X) : \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_E \leq c_E \|f\|_E$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26197711).

Keywords: modulus of convexity, q -uniformly convex Banach space, vector valued martingale, symmetric space.

2020 Mathematics Subject Classification: 46B20, 52A07, 60G44

References

- [1] Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces, *Israel J.Math.*, **20** (1975), 326–350.
- [2] Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of operators.*, Academic Press Inc., Boston, MA, (1988).
- [3] Florencio M., Paúl P.J., Sáez C. Duals of vector-valued Köthe function spaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **1**:112 (1992), 165–174.

Study of the functional equation of oscillations of objects with variable boundaries: exact and asymptotic solutions

V.L. LITVINOV

Samara State Technical University, Samara, Russia

vladlitvinov@rambler.ru

This paper considers the problem of oscillations of mechanical systems with moving boundaries, which is reduced to solving a functional equation relating the law of change in the length of a domain to the time dependence of the sought-for function. This problem is of significant interest to applied mathematics and mechanics, as it describes a wide range of physical processes—from longitudinal and transverse oscillations of hoisting ropes to acoustic and wave phenomena in non-stationary media [1-5]. The main difficulty lies in the lack of a general method for constructing an exact solution for an arbitrary law of boundary motion. To overcome this difficulty, the study applies an original inverse approach: instead of searching for a function for a given boundary motion, it is proposed to specify the function type with parameters and then determine the corresponding law of boundary motion for which the equation will be satisfied. This method yielded new families of exact solutions, which are systematized into several classes depending on the nature of the boundary motion—a class with a fixed left boundary, a class with identical motion of both boundaries, a class of symmetric motion, and a class of uniform motion. Each of these classes corresponds to specific physical scenarios and expands the set of known analytical solutions. However, for a number of practically important cases, such as uniformly accelerated boundary motion, the exact solution remains unknown. For such situations, this paper proposes an approximate method based on representing the desired function as a polynomial of a given degree. The polynomial coefficients are determined using the least-squares method from the condition of minimizing the residual of the functional equation in a given system of points. To assess the accuracy and reliability of the method, computational experiments were conducted on a test problem with a linear boundary motion law for which the exact solution is known. Comparison of the approximate and exact solutions showed that the method's error is insignificant over a wide range of boundary velocities, confirming its practical applicability. An increase in error is observed only in extreme conditions, when the system length approaches zero, which is due to the emergence of a singularity in the

exact solution rather than to deficiencies in the approximation. Thus, this paper demonstrates the effectiveness of a combined approach combining an inverse method for obtaining exact solutions and a numerical method based on polynomial approximation for cases where an analytical solution is unattainable. The results contribute to the development of methods for mathematical modeling of the dynamics of systems with variable geometry and provide tools for engineering calculations in mechanics and mechanical engineering.

Keywords: vibrations of mechanical systems, moving boundaries, functional equations, inverse method, exact solution.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R37, 35G30, 35Q70

References

- [1] Anisimov V. N., Litvinov V. L., Korpen I. V. On one method for obtaining an exact solution to the wave equation describing oscillations of systems with moving boundaries // Vestn. Sam. state technical uni- versity. Series: Phys.-math. sciences, 2012. No. 3 (28). Pp. 145–151.
- [2] Vesnitsky A.I. Waves in Systems with Moving Boundaries. Moscow: fizmatlit, 2001.320 p.
- [3] Erofeev V. I., Kolesov D. A. , Lisenkova E. E. Wave Generation by a Source Moving along a Deformable Guide Lying on an Elastic-Inertial Foundation // Mechanical Engineering and Engineering Education. 2014. No. 2 (39). pp. 37-40.
- [4] Litvinov V.L., Litvinova K.V. Approximate method for solving bound- ary value problems with moving boundaries by reducing to integro- differential equations // J. Comput. Math. and Math. Phys., 62:6 (2022), 977–986.
- [5] Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving bound- aries using an approximate method for constructing solutions of integro- differential equations //Proceedings of the Institute of Mechanics and Mathematics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 26, 2020, 188–199.

Comparative Assessment of SST Transition, $k\text{-}kl$, and RSM Turbulence Models for a 2D Converging–Diverging Channel Flow

M.E. MADALIEV¹, H.E. MUHAMMADYOQUBOV², N.A. NOSIROVA³,
B.M. KHOLBOEV⁴

^{1,2}*Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan*

³*Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

⁴*Kimyo International University, Tashkent, Uzbekistan*

¹bakhodir.kholboev@gmail.com, ²Madaliev.me2019@mail.ru,

³xusanboy.muhammadyoqubov@mail.ru, ⁴nosirova.namunabonu@mail.ru

This study presents a numerical investigation of turbulent flow in a channel with a convex insert generating an adverse pressure gradient. Three turbulence models — SST Transition, $k\text{-}kl$, and RSM — were evaluated in ANSYS Fluent under identical conditions with 5% inlet turbulence intensity and validated against DNS and experimental data. The $k\text{-}kl$ model most accurately predicted separation and reattachment regions. RSM provided satisfactory agreement, whereas SST Transition underestimated transient effects. The results indicate that the $k\text{-}kl$ model is well suited for engineering simulations involving complex geometries and adverse pressure gradients.

Modern aerodynamic, hydrodynamic, and heat/mass transfer problems require accurate flow simulations under real engineering conditions, often including geometric irregularities and adverse pressure gradients (APG), where pressure rises along the flow direction. APG can destabilize the boundary layer, induce laminar–turbulent transition, and cause flow separation, affecting systems such as aircraft wings, turbomachinery, ventilation, heat exchangers, and biomedical devices. Conventional two-equation turbulence models ($k\text{-}\epsilon$, $k\text{-}\omega$, SST) have limitations under APG due to

isotropy assumptions and weak transition prediction. More advanced models capable of capturing anisotropy, transition, instabilities, and 3D effects are required. ANSYS Fluent provides several options: basic RANS models ($k-\epsilon$, $k-\omega$, SST), transition-sensitive models (SST Transition, $k-\text{kl}-\omega$), and the Reynolds Stress Model (RSM) for complex anisotropic flows. Model selection requires balancing accuracy and computational cost, with validation against DNS, LES, and experiments. This study investigates turbulent flow over a convex bump (WALLTURB case), comparing SST Transition, $k-\text{kl}-\omega$, and RSM with experimental and LES/DNS data to evaluate their ability to predict friction, pressure distribution, and turbulence structure in APG regions [1-3].

This study simulates turbulent flow in a channel with a convex bump on the lower wall, a standard test case for validating turbulence models under APG conditions. Based on the WALLTURB project and NASA LES setup, the geometry features a flat channel with a symmetric bump that creates zones of favorable and unfavorable pressure gradients. Flow is along the x -axis; y and z represent the vertical and spanwise directions. The channel length is $25h$, height $2h$, bump height $0.35h$, with Reynolds number $Re = 20580$ (based on h). Inlet turbulence intensity is 5%.

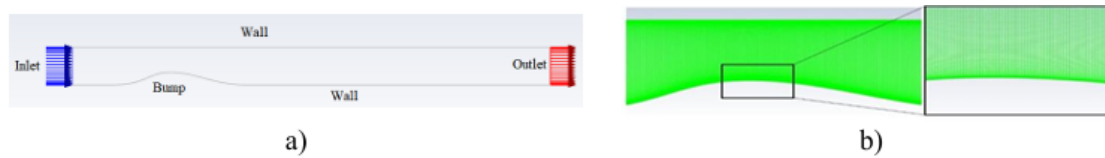


Figure 1: Geometry of the channel with a convex insert and the computational grid.

The conservation equation (the continuity equation), which describes the law of mass conservation within the computational domain:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

The equation of conservation of momentum, which describes the change in the velocity of a fluid under the influence of external and internal forces:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (2)$$

where u_i - components of the average velocity field, p - average pressure, ν - kinematic viscosity, τ_{ij} - stress tensor components, ρ - density.

Figure 2 shows the coefficient of friction of the lower wall surface. The coefficient of surface friction C_f is defined as the ratio of the friction force acting on the profile surface to the dynamic pressure of the free flow.

$$C_f = \frac{F}{0.5\rho U_0^2 S} \quad (3)$$

where F is the friction force acting on the profile surface, S is the surface area oriented along the flow.

This paper presents a numerical simulation of turbulent flow in a channel with a convex insert causing an adverse pressure gradient (APG), using three turbulence models: SST Transition, $k-\text{kl}$, and RSM. Results were compared to DNS data and experiments based on friction and pressure coefficients, velocity fields, and turbulent kinetic energy. The $k-\text{kl}$ model showed the best agreement with DNS, accurately predicting the separation zone and turbulent energy structure. The RSM model gave reasonable but smoothed results, with slight deviations in separation length and turbulence intensity. The SST Transition model had the lowest accuracy, especially in capturing separation and reattachment. Overall, the $k-\text{kl}$ model proved most effective for flows with transition and local separation, offering a good balance between accuracy and computational cost for complex engineering applications.

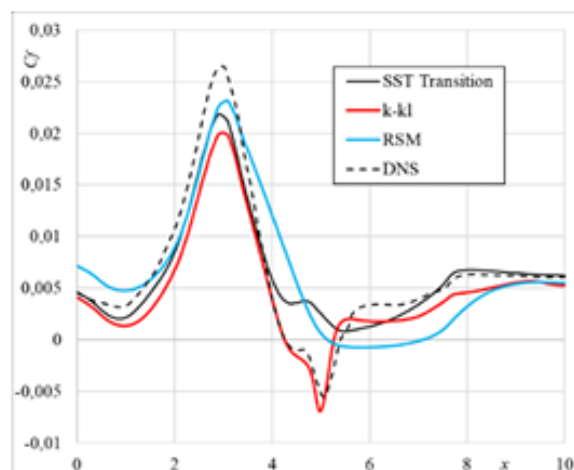


Figure 2: Wall surface friction coefficient C_f .

Keywords: Navier–Stokes equations, SST model, k–kl– ω , Reynolds stress model, ANSYS.

References

- [1] Rumsey C.L., Ying S.X. Prediction of high lift: review of present CFD capability. *Progress in Aerospace Sciences* 2002; 38(2): 145–180.
- [2] Rudnik R., Frhr. v. Geyr H. The European high lift project EUROLIFT II–objectives, approach, and structure. Report No.: AIAA-2007-4296, 2007.
- [3] Slotnick J.P., Hannon J.A., Chaffin M. Overview of the first AIAA CFD high lift prediction workshop. Report No.: AIAA-2011-0862, 2011.

Secular perturbations of a test body in the restricted three-body problem with variable masses

M. Zh. MINGLIBAYEV¹, B. R. ASSAN²

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

¹minglibayev@gmail.com, ²assanbalmur@gmail.com

This work investigates the motion of a test body in the Newtonian gravitational field of two primary (point) bodies with variable masses within the framework of the restricted three-body problem in a relative coordinate system. It is assumed that the masses of the bodies vary isotropically with time, and no reactive forces arise [1], [2]. The restricted character of the problem is defined by the fact that the test body does not influence the motion of the two primary bodies [3], [4]. In this work, for the first time, the canonical equations of secular perturbations of the problem are obtained in analogues of the Delaunay variables and analogues of the first Poincaré system.

The canonical equations of perturbed motion of the third body in analogues of Delaunay variables [5] in the relative coordinate system take the form

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= \frac{\partial W}{\partial l_3}, & \dot{G}_3 &= \frac{\partial W}{\partial g_3}, & \dot{H}_3 &= \frac{\partial W}{\partial h_3}, \\ i_3 &= \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{\mu_{30}^2}{L_3^3} - \frac{\partial W}{\partial L_3}, & \dot{g}_3 &= -\frac{\partial W}{\partial G_3}, & \dot{h}_3 &= -\frac{\partial W}{\partial H_3}, \end{aligned} \quad (1)$$

where $m = m_1(t) + m_2(t)$, $\mu_{30} = fm_0 = f(m_{10} + m_{20}) = \text{const}$.

The expansions of the perturbing function W can, in principle, be obtained to any required accuracy in terms of small parameters—analogues of eccentricity and inclination. In the present

work, the expansions of the perturbing function are explicitly calculated up to and including the second order in the small parameters.

In the absence of resonance, by averaging over the mean longitudes, the canonical equations of secular perturbations of the studied problem are obtained

$$\begin{aligned}\dot{G}_3 &= \frac{\partial W_{sec}}{\partial g_3}, & \dot{g}_3 &= -\frac{\partial W_{sec}}{\partial G_3}, & \dot{H}_3 &= \frac{\partial W_{sec}}{\partial h_3}, & \dot{h}_3 &= -\frac{\partial W_{sec}}{\partial H_3}, \\ \dot{L}_3 &= 0, & \dot{l}_3 &= \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{\mu_{30}^2}{L_3^3} - \frac{\partial W_{sec}}{\partial L_3}.\end{aligned}$$

As a result, the problem is reduced to a dynamical system with two degrees of freedom

$$\dot{G}_3 = \frac{\partial W_{sec}}{\partial g_3}, \quad \dot{g}_3 = -\frac{\partial W_{sec}}{\partial G_3}, \quad \dot{H}_3 = \frac{\partial W_{sec}}{\partial h_3}, \quad \dot{h}_3 = -\frac{\partial W_{sec}}{\partial H_3}. \quad (2)$$

In the case where the expansion of the perturbing function includes terms up to and including the second order in the small parameters, the calculations show that

$$\frac{\partial W_{sec}}{\partial g_3} = \frac{\partial W_{sec}}{\partial h_3}.$$

Therefore, we obtain

$$\dot{G}_3 = \dot{H}_3, \quad G_3 - H_3 = const = G_3(t_0) - H_3(t_0). \quad (3)$$

Taking into account that relation (3) holds, we pass from the analogues of Delaunay variables to the analogues of the first Poincaré system of variables [5]

$$\begin{aligned}\Lambda_3 &= L_3, & P_3 &= L_3 - G_3, & Q_3 &= G_3 - H_3, \\ \lambda_3 &= l_3 + g_3 + h_3, & p_3 &= -g_3 - h_3, & q_3 &= -h_3.\end{aligned} \quad (4)$$

The canonical equations of secular perturbations in analogues of the first Poincaré system take the form

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_3 &= 0, & \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial W_{sec}}{\partial \Lambda_3}, \\ \dot{P}_3 &= \frac{\partial W_{sec}}{\partial p_3}, & \dot{p}_3 &= -\frac{\partial W_{sec}}{\partial P_3}, \\ \dot{Q}_3 &= 0, & \dot{q}_3 &= -\frac{\partial W_{sec}}{\partial q_3}.\end{aligned} \quad (5)$$

An analysis of the system of canonical differential equations (9) shows that, in the considered formulation and in analogues of the first Poincaré variables, the calculation of secular perturbations of the motion of a test body within the framework of the restricted three-body problem with variable masses is reduced to a dynamical system with only one degree of freedom

$$\dot{P}_3 = \frac{\partial W_{sec}}{\partial p_3}, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial W_{sec}}{\partial P_3}. \quad (6)$$

In the considered formulation of the restricted three-body problem with variable masses, the analytical relation $Q_3 = G_3 - H_3 = const$, in fact represents a new integral of motion in the problem under consideration, which is highly useful for both the qualitative and numerical analysis of the system. It should be noted that this integral, expressed in analogs of the Keplerian variables [5], takes the following form

$$\sqrt{a_3(1 - e_3^2)}(1 - \cos i_3) = const.$$

The obtained non-autonomous canonical differential equations of the considered problem have a complicated form, the Laplace coefficients are expressed in terms of complete elliptic integrals of

the first and second kinds. Therefore, further investigation is carried out using numerical methods. All analytical computations in this work were performed using the Wolfram Mathematica system [6].

Keywords: restricted three-body problem, variable masses, secular perturbations, analogues of Delaunay variables, analogues of first Poincaré system variables.

2020 Mathematics Subject Classification: 70F15, 37N05, 70F07

References

- [1] Minglibayev M., Assan B. The problem of translational-rotational motion of a non-stationary axisymmetric small body in the gravitational field of two spherical bodies with variable mass, *International Journal of Mathematics and Physics*, **15**:2 (2024), 119—126.
- [2] Minglibayev M., Assan B. Exact solutions of equations of the two-primary-body problem in the restricted three-body problem with variable masses, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **128**:4 (2025), 134—147.
- [3] Szebehely V. *Theory of Orbits*, Academic Press, New York (1967).
- [4] Markeev A. P. *Tochki libracii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike [Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics]*, Nauka, Moscow (1978) (in Russian).
- [5] Minglibayev M. Zh. *Dinamika gravitiruyushchikh tel s peremennymi massami i razmerami [Dynamics of Gravitating Bodies with Variable Mass and Dimensions]*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken (2012) (in Russian).
- [6] Wolfram S. *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*, Wolfram Media, Incorporated (2015).

Modeling of Heat Transfer and Sedimentation Processes during Ultrasonic Casting of Thermoplastic Beryllium Oxide Slurry

Zh. YESBOL¹, D. TURALINA²

^{1,2}*Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Qazaqstan*

e-mail: jalynesbol@gmail.com

Beryllium oxide (BeO) ceramics obtained using ultrasonic treatment are characterized by intense agglomeration and exhibit lower sedimentation rates and agglomeration temperatures compared to ceramics produced without ultrasound. During ultrasonic processing, the agglomeration activity of the ceramic depends on the uniform distribution of the material and the dense packing of the powder particles. Changes in the rheological properties of the thermoplastic slurry occur as a result of ultrasonic activation. The modifications arising during activation are closely related to the phenomena of the dispersed phase and mass transfer processes, and the application of ultrasound significantly enhances the properties of the castings. The increase in density and strength of the castings is explained by the effective reduction of sedimentation under the influence of ultrasound; that is, sedimentation compensation occurs through the filling of mold cavities by the liquid slurry and its additional compaction under applied pressure. In the ultrasonic casting of thermoplastic beryllium oxide slurry, it is recommended to use compositions with a binder content ranging from 10.0% to 11.7%, as such formulations mix effectively with beryllium powder, form a high-strength slurry, and enable the production of a ceramic material resistant to high temperatures.

Keywords: high-viscosity oil, hot pumping, pipeline shutdown, safe shutdown time.

References

- [1] Shakhov S., Bitsoev G. *Application of Ultrasound in the Manufacture of High Thermal Conductivity Ceramic Articles*, EKTU, Ust-Kamenogorsk (1999). [in Russian]

- [2] Kiiko V., Makurin Yu., Ivanovsky A. *Beryllium Oxide Ceramics: production, physico-chemical properties, application*, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg (2006). [in Russian]
- [3] Shakhov S. Controlling the deformation behavior of thermoplastic slips with ultrasound, *Glass and Ceramics*, **64** (2007), 354–356. <https://doi.org/10.1007/s10717-007-0088-2>
- [4] Shakhov S. Use of ultrasound in order to intensify molding of high-temperature thermocouple sheaths, *Refractories and Industrial Ceramics*, **49** (2008), 261–263. <https://doi.org/10.1007/s11148-008-9074-7>
- [5] Shakhov S., Gagarin A. Rheological characteristics of thermoplastic disperse systems treated with ultrasound, *Glass and Ceramics*, **65** (2008), 122–124. <https://doi.org/10.1007/s10717-008-9030-5>
- [6] Akishin G., Turnaev S., Vaispapis V., et al. Composition of beryllium oxide ceramics, *Refractories and Industrial Ceramics*, **51** (2011), 377–381. <https://doi.org/10.1007/s11148-011-9329-6>
- [7] Akishin G., Turnaev S., Vaispapis V., et al. Thermal conductivity of beryllium oxide ceramic, *Refractories and Industrial Ceramics*, **50** (2009), 465–468. <https://doi.org/10.1007/s11148-010-9239-z>
- [8] German R., Bose A. *Injection molding of metals and ceramics*, Princeton, New Jersey (1997).
- [9] Bingham E.C. *Fluidity and Plasticity*, McGraw-Hill, New York (1922).
- [10] Wilkinson W.L. *Non-Newtonian fluids. Fluid Mechanics, Mixing and Heat Transfer*, Pergamon Press, London (1960).
- [11] Klimov D.M., Petrov A.G., Georgievsky D.V. *Viscoplastic Flows: Dynamic Chaos, Stability and Mixing*, Nauka, Moscow (2005). [in Russian]
- [12] Chhabra R., Richardson J. *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*, Butterworth-Heinemann, Oxford (2011).
- [13] Dvinskikh Yu., Popilskii R., Kostin L., Kulagin V. Thermophysical properties of thermoplastic casting slips of some high-refractory oxides, *Ogneupory*, **12** (1979), 37–41. [in Russian]
- [14] Zhabbasbayev U., Ramazanova G., Kenzhaliyev B., et al. Experimental and calculated data of the beryllium oxide slip solidification, *Applied Thermal Engineering*, **96** (2016), 593–599. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.11.114>
- [15] Voller V., Prakash C. A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **30** (1987), 1709–1719. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90317-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90317-6)
- [16] Voller V., Swaminathan C., Thomas B. Fixed grid techniques for phase change problems: a review, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **30** (1990), 875–898. <https://doi.org/10.1002/nme.1620300419>

Green's tensor of Biot's transport equations at supersonic loads

G.K. ZAKIRYANOVA

U. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

gulmzak@mail.ru

The study of wave processes in physical fields and mediums using mathematical modeling methods leads to the solution of differential equations and boundary value problems for them. A special class of problems are transport problems, in which the shape of the load does not change over time. Note, the velocity of moving load significantly influences the type of differential equations that parametrically depend on the ratio of the load movement velocity to the propagation velocities

of dilatation and shear waves in the medium. The latter, in turn, influences the formulation of model boundary value problems and the methods for solving them.

Here two-component Biot's model, consisting of solid and fluid components, is considered. This model of a real rock mass allows one to study the dynamics of soils taking into account their porosity and water saturation and more fully describes wave processes in them than the elastic model. For such medium, dynamic processes have been studied in works [1-2] and others. The consideration of transport problems for such medium is attracting increasing attention from researchers, for example, [3-5]. The equations of motion of the homogeneous isotropic two-component Biot's model in the case of zero fluid viscosity are described by a system of second-order hyperbolic equations:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji}^s + \mu u_{i,jj}^s + Qu_{j,ji}^f + G_i^s = \rho_{11}\ddot{u}_i^s + \rho_{12}\ddot{u}_i^f \quad (1)$$

$$Qu_{j,ji}^s + Ru_{j,ji}^f + G_i^f = \rho_{12}\ddot{u}_i^s + \rho_{22}\ddot{u}_i^f$$

Here $u_i^s(x, t)$ are the components of the displacement vector of the elastic skeleton at the point $x \in R^3$ at the moment of time $t \in [0, \infty)$, u_i^f are the components of the displacement vector of the fluid, G_i^s, G_i^f are the body forces acting on the solid and fluid components, respectively. The Biot's constants λ, μ, Q, R have the dimension of stresses, the physical and mechanical constants $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ have the dimension of density. Everywhere over the same indices in the product, summation from 1 to 3 is performed (tensor convolution), $u_{i,j} = \partial_j u_i = \partial u_i / \partial x_j$, $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2$. The relationship between stresses and strains has the form of a generalized Hooke's law:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j}^s + u_{i,j}^f) + (\lambda u_{k,k}^s + Qu_{k,k}^f)\delta_{ij}, \sigma = -mp = (Qu_{k,k}^s + Ru_{k,k}^f)$$

Biot's model is characterized by three sound velocities c_1, c_2, c_3 . Two of them describe the propagation velocity of longitudinal (dilation) waves of the 1st and 2nd kind, and the third one c_3 describes the transverse (shear) wave. For real porous media, there are the inequality: $c_2 < c_3 < c_1$. When the connection between the elastic skeleton and the fluid is broken: $Q \rightarrow 0, \rho_{12} \rightarrow 0$ takes place $c_3 \rightarrow \sqrt{\mu/\rho_{11}}, c_1 \rightarrow c_s, c_2 \rightarrow c_f$, where $c_s \rightarrow \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_{11}}$ is the velocity of dilatation waves in a skeleton, $c_f \rightarrow \sqrt{R/\rho_{22}}$ is the velocity of dilatation waves in the fluid.

To write equations (1) under the action of transport loads, a class of solutions of the equation is considered under the assumption that the load moves at a constant velocity v along the axis x_3 in the opposite direction and in the moving coordinate system does not depend on a time, i.e., $G_i = G_i(x_1, x_2, x_3 + vt)$. The type of transport equations system depends significantly on the velocity of the load v . When $v < \min c_1, c_2, c_3$ the load is called subsonic, the type of transport equations system is elliptic. When $v > \max c_1, c_2, c_3$ the loads are supersonic, we have the strictly hyperbolic system.

To construct solutions, a generalized Fourier transform with respect to spatial coordinates was used. Here Green's tensor U_{ij} of Biot's transport equations for the case of supersonic transport loads are constructed. Conditions for jumps on the fronts of shock waves are obtained.

For solving transport boundary value problems in porous and watersaturated media bounded by cylindrical surfaces (tunnels, pipelines, etc.), the Green's tensor of the Biot's transport equations is necessary for constructing the kernels of the resolving singular boundary integral equations of the corresponding transport boundary value problems, similar to transport boundary value problems for elastic media. The transport solutions of the equations of the dynamics of a two-component Biot's model constructed here make it possible to study the stress-strain state of porous water-saturated media under the action of various transport loads and should find application in solving various engineering problems. These solutions allow to take into account more fully the physical and mechanical properties of the rock mass, and velocity of the moving transport load.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR31715767).

Keywords: elasticity, Biot's medium, Fourier integral transform, Green's tensor.

2020 Mathematics Subject Classification: 35E05, 74J05, 74L10

References

- [1] Biot M.A. Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, *J. Appl. Phys.*, **33** (1962), 1482–1498.
- [2] Hanyga, Andrzej Asymptotic solutions of Biot's equations, in: *Poromechanics*, CRC Press (2020), 233–238.
- [3] Pei, Y., Su, Q., Su, R., Liu, Kaiwen, Connolly, David P., Wang, Tengfei Dynamic analysis of unsaturated porous media under moving loads by the time domain FEM using moving coordinates, *Computers and Geotechnics*, **171**: 106338 (2024).
- [4] He, C., Li, H., Gong, Q., Zhou, Sh., Ren, J. Modelling of critical speed of railway tracks on a multi-layered transversely isotropic saturated ground, *Applied Mathematical Modelling*, **121**:1 (2023), 75–95.
- [5] Alexeyeva, L.A., Zakiryanova, G.K., Kurmanov, E.B. Dynamics of a two-component Biot medium under subsonic transport loads, *Bulletin of KazdornII*, **53-54** (2017), 21–30.

Determination of Oil Temperature Decrease during Pipeline Operation and Pump Shutdown

U. ZHAPBASBAYEV¹, G. RAMAZANOVA², D. BOSSINOV³, Zh. YESBOL⁴

^{1,2,3,4}*Satbayev University, Almaty, Qazaqstan*

dansho.91@mail.ru

The transportation of high-viscosity and waxy crude oils through long-distance pipelines is associated with significant thermal and hydraulic challenges, especially under conditions of hot pumping and subsequent pump shutdowns. During continuous pumping, crude oil is maintained at elevated temperatures to reduce viscosity and ensure stable flow. However, during planned or unplanned shutdowns, heat exchange with the surrounding soil leads to progressive cooling of the oil, resulting in increased viscosity, elevated restart pressures, and, in extreme cases, pipeline blockage due to wax crystallization. Accurate prediction of oil temperature evolution during both stationary and non-stationary regimes is therefore essential for determining safe shutdown durations and preventing costly operational failures.

This study investigates the stationary and transient cooling behavior of high-viscosity crude oil transported through the Severnye Buzachi–Karazhanbas pipeline located in the Mangystau Region of Kazakhstan. The pipeline has a length of 25 km and an inner diameter of 0.414 m and operates under the hot pumping method. Crude oil is heated to approximately 60 °C at the Severnye Buzachi pumping station and transported to the Karazhanbas station through a buried pipeline system. Due to the large ratio of pipeline length to diameter, the problem is formulated using a one-dimensional heat transfer approach.

The stationary temperature distribution along the pipeline during continuous pumping is calculated using the classical Shukhov formula, derived from the steady-state heat balance equation for flowing oil. For the shutdown regime, a modified Shukhov formulation is applied, accounting for transient heat transfer between the non-flowing oil, the pipeline wall, insulation layers, and the surrounding soil. The model incorporates variable heat transfer coefficients, which depend on flow regime, oil rheological properties, pipeline geometry, insulation characteristics, and soil thermal conductivity.

A key feature of the proposed methodology is the inclusion of latent heat effects associated with paraffin crystallization using the apparent heat capacity method. As oil temperature decreases within the paraffin formation interval, additional heat is released due to phase transition, which significantly affects the cooling rate. This phenomenon is accounted for by defining a temperature-dependent apparent heat capacity that combines sensible and latent heat contributions. Oil viscosity variation with temperature is described using a regression model based on experimental data, enabling accurate estimation of Reynolds and Nusselt numbers for internal heat transfer calculations.

Real-time operational data obtained from the supervisory control and data acquisition (SCADA) system are used to validate the proposed approach. The SCADA system provides continuous measurements of oil temperature, soil temperature, and flow rate at both pumping stations. The

validation dataset covers multiple years (2020–2024) and includes both continuous pumping conditions and multiple shutdown events with durations ranging from 7.5 to 18 hours. Soil thermal conductivity values were identified by calibrating the model to match measured temperature profiles and varied between 0.6 and 1.5 W/(m·°C), reflecting seasonal and moisture-dependent soil conditions.

The results demonstrate excellent agreement between calculated and measured oil temperatures in stationary mode. For continuous pumping conditions, the temperature difference at the pipeline outlet does not exceed 0.004 °C, confirming the high accuracy of the Shukhov formula when pipeline and soil parameters are properly identified. In shutdown mode, the maximum deviation between calculated and measured temperatures ranges from 0.27 to 0.44 °C across all analyzed cases. These deviations remain small regardless of shutdown duration, indicating that the modified Shukhov formulation reliably captures transient cooling behavior.

The analysis shows that soil thermal conductivity plays a dominant role in determining cooling rates during shutdown. Higher soil conductivity accelerates heat loss, reducing the allowable safe shutdown time. Based on the obtained results and historical operational data, the Severnyye Buzachi–Karazhanbas pipeline allows a safe shutdown duration of up to 72 hours under favorable thermal conditions. During colder periods, shutdowns are typically limited to 9–18 hours to avoid excessive viscosity growth. It is also recommended that oil temperature should not fall below 12 °C, as further cooling leads to a sharp increase in viscosity and energy consumption during restart.

The proposed methodology offers a simplified yet physically grounded approach for estimating oil temperature evolution and determining safe shutdown times for pipelines transporting high-viscosity crude oil.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23486543 for 2024-2026).

Keywords: high-viscosity oil, hot pumping, pipeline shutdown, safe shutdown time.

References

- [1] Ribeiro F.S., Paulo R.S.M., Sergio S.L.B. Obstruction of pipelines due to paraffin deposition during the flow of crude oils, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **40**:18 (1997), 4319–4328. [https://doi.org/10.1016/s0017-9310\(97\)00082-3](https://doi.org/10.1016/s0017-9310(97)00082-3)
- [2] Aiyejina A., et al. Wax formation in oil pipelines: a critical review, *International Journal of Multiphase Flow*, **37**:7 (2011), 671–694. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.02.007>
- [3] Tugunov P.I., Novoselov V.F., Korshok A.A. *Typical calculations for the design and operation of oil depots and oil pipelines*, Design-PoligraphService LLC, Ufa (2002). [in Russian]
- [4] Stepanov O.A., Moiseev B.V., Khopersky G.G. *Heat supply at oil pipeline pumping stations*, Nedra, Moscow (1988). [in Russian]
- [5] Novoselov V.F., Korshak A.A. *Pipeline transport of oil and gas. Pumping viscous and solidifying oils. Special pumping methods*, Publishing House of the Ufa Petroleum Institute, Ufa (1988). [in Russian]
- [6] Beisembetov I.K., Bekibayev T.T., Zhapbasbayev U.K., Makhmotov E.S., Kenzhaliev B.K. *Control of energy-saving modes of transportation of oil mixtures through main oil pipelines*, KBTU, Almaty (2016). [in Russian]
- [7] Tonkoshkurov B.A., Gostev N.M., Shutov A.A. *Methodology for thermal and hydraulic calculations of main pipelines under stationary and non-stationary modes of pumping Newtonian and non-Newtonian oils in various climatic conditions*, All-Union Scientific Research Institute, Ufa (1979). [in Russian]
- [8] Korshak A.A., Pshenin V.V. New criterion equations for the Nusselt number during forced convection in pipes, *Notes of the Mining Institute*, **195** (2012), 78–80. [in Russian]
- [9] Incropera F.P., DeWitt D.P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, Hoboken (1996).

**Цифрлық трансформация және жасанды интеллект
дәуірінде мектеп пен жоғары оқу орындарында
математиканы оқытудың өзекті мәселелері**

**Актуальные вопросы обучения математике в школе и
вузе в эпоху цифровой трансформации и
искусственного интеллекта**

**Current Issues in Teaching Mathematics in Schools and
Universities in the Era of Digital Transformation and
Artificial Intelligence**

Бағдарламалық комитеттің төрағасы: А.Е. Абылкасымова

Ұйымдастыру комитетінің төрағасы: Л.У. Жадраева

Конференция хатшысы: Е.А. Туяков

О ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

А.Е. АБЫЛКАСЫМОВА

КазНПУ имени Абая, Алматы, Казахстан

aabylkassymova@mail.ru

Учитель является ключевой фигурой в системе школьного образования, в том числе при внедрении в учебный процесс новейших технологий и оценке его качества. В мире постоянно происходят изменения, которые влияют на функции системы школьного образования. Они заключаются в подготовке учащихся к работе в новых условиях, при котором возрастает роль учителя как организатора и мотиватора процесса обучения. В данной статье рассматривается фигура учителя, готового к изменениям в цифровой образовательной среде и реализующего их, с учетом этого будущих педагогов необходимо готовить к работе в таких условиях. Подготовка учителей в педагогических вузах должна осуществляться с внедрением в учебный процесс не только новых цифровых технологий, но и искусственного интеллекта. В статье определяются основные изменения в современном образовании будущих школьных учителей математики, отвечающие новым целям и задачам математического образования, продиктованные как изменениями в самой математике, так и изменениями ее роли в условиях цифровой среды. При этом важнейшим в подготовке учителей математики является ее преемственность, при которой необходимо обучать будущего учителя не только требуемому программой объему содержания математического образования, но и современным формам и методам в деятельности учителя, которые он будет применять при обучении учащихся математике. Студентов – будущих учителей математики, необходимо в первую очередь обучать методике преподавания этой дисциплины. При этом ядром их образования становятся не только содержание школьного курса математики, но и обучение современным технологиям преподавания математики, при котором существенную роль играют цифровые ресурсы с использованием искусственного интеллекта. После получения определенных математических знаний и овладения теорией методики обучения студенты направляются на педагогическую работу в школы, благодаря чему они приобретают нужные педагогам умения и навыки. В условиях широкого применения при обучении в педагогических вузах цифровых технологий с включением искусственного интеллекта мы стали готовить будущих учителей, владеющих не только современными технологиями, но и умеющих реализовывать полученные знания в своей практической деятельности. При этом считаем, что при подготовке учителей математики такой подход наиболее естествен и необходим для его дальнейшей работы. Сегодня, когда имеется множество источников информации, через которые может идти как формальное, так и неформальное образование, роль учителя как организатора и мотиватора процесса обучения не уменьшается, а возрастает. В последние годы казахстанская система педагогического образования находится на пути поиска и внедрения новых современных форм совершенствования подготовки специалистов, в том числе будущих учителей математики. Современные учителя должны не только владеть основами наук, но и быть способными грамотно применять полученные знания на базе новых образовательных технологий, направленных на дальнейшее формирование цифровой среды в педагогических организациях образования. При этом подготовка учителей математики к будущей практической деятельности заключается не только в углубленном изучении и освоении предмета, но и в умении выработать у обучающихся навыки самостоятельного анализа задач с условием творческого подхода к их решению. В этой связи возникает вопрос – как учителю соответствовать этой роли и как подготовить его к этой роли? Этот вопрос необходимо решать в контексте тех кардинальных изменений, которые повсеместно идут в современном мире. Очевидно, что изменения в основном связаны с цифровыми технологиями, во многом порождены ими и опираются на них. Нами показано, что математическое образование может и должно быть важным элементом в обучении и воспитании гражданина XXI века, где ключевую и ведущую роль по-прежнему играет учитель. При этом важнейшей задачей ма-

тематического образования должно стать умение учеников решать задачи разной сложности, как стандартными, так и нестандартными способами. Таким образом, в современных условиях в системе математического образования важно вести подготовку будущих учителей, готовых к получению новых знаний, основанных на применении цифровых технологий с включением искусственного интеллекта. Воспитание таких учителей математики является одной из важнейших задач современного образования в педагогических вузах страны. Именно такие учителя математики в дальнейшем смогут вести обучение математике в школах в соответствии с требованиями, предъявляемыми к современным учителям.

Ключевые слова: математическое образование, учитель, обучение математике, цифровая среда, искусственный интеллект.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abylkassymova A.E. On Mathematical-Methodical Training Of Future Mathematics Teacher In The Conditions Of Content Updating Of School Education, Modern Journal of Language Teaching Methods (MJLTM), 8:3 (2008), 411–414.
- [2] Абылкасымова А.Е. О специальной методической подготовке будущего учителя математики, in: Актуальные проблемы преподавания математики в школе и университете в свете идей Л.С. Выготского, МПГУ, Москва (2016), 17–19.
- [3] Abylkassymova A.E. Training of mathematics teachers at the Kazakh National Pedagogical University in the context of updating the content of school education, in: Current problems in teaching mathematics and computer science at school and university, Politop, Kaluga (2018), 8–13.
- [4] Абылкасымова А.Е., Семенов А.Л. О проблеме преемственности обучения математике в школе и в педагогическом вузе, CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование, 2:34 (2024), 31–41.
- [5] Abylkassymova A. On mathematical-methodical training of future teacher in the conditions of content updating of school education, in: Proceedings of VI congress of the Turkic world mathematical society, Astana (2017), 363.
- [6] Abylkassymova Alma E. System modernization of general secondary education in the Republic of Kazakhstan, Revista Tempos E Espaços Em Educação, 13:32 (2020), 1–17.
- [7] Абылкасымова А.Е., Ахмед-Заки Д.Ж., Жұмабай Н. О развитии SMART технологии в цифровой образовательной среде Казахстана, Вестник КазНУ. Серия «Педагогические науки», 3:80 (2024), 4–22.
- [8] Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е., Рудченко Т.А. Методы искусственного интеллекта в управлении персонализированным общим образованием, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 517 (2024), 3–8.
- [9] Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е. Подготовка будущего учителя математики – ключ к изменениям, Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование, 22:2 (2024), 9–28.

МЕКТЕП МАТЕМАТИКА КУРСЫН ОҚЫТУДА ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІ ҚОЛДАНУДЫҢ МҮМКІНДІКТЕРІ МЕН ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШІЛІКТЕРІ

А.Е. ӘБІЛҚАСЫМОВА¹, З.А. ЖҰМАҒҰЛОВА²

¹Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

²Ы. Алтынсарин атындағы ҰБА, Астана, Қазақстан

¹aabylkassymova@mail.ru, ²abdrahmanovna@mail.ru

Қазақстан Республикасында мектепке дейінгі, орта, техникалық және кәсіптік білім беруді дамытудың 2023–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасында: білім алушылардың сыни ойлауын, ақпараттық және компьютерлік сауаттылығын қалыптастыру мақсатында білім беру

мазмұнына жасанды интеллект элементтерін интеграциялауды көздейтін өзгерістер енгізілген. Ал «Жасанды интеллектті дамытудың 2024–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын» іске асыру жөніндегі іс-қимыл жоспарында негізгі шаралардың бірі ретінде орта білім беру бағдарламасына «Жасанды интеллект негіздері» модулін енгізу көзделген. Нәтижесінде білім беру жүйесі цифрлық ресурстар мен құралдардың жедел дамуы жағдайында жаңа сипатқа ие болуда. Цифрлық білім беру ресурстарының кеңінен енгізілуі оқу процесінің құрылымына, мазмұны мен әдістемесіне, оның ішінде, мектеп математикасын оқыту процесіне елеулі өзгерістер әкелуде. Математика қазіргі өркениеттің маңызды элементіне айналууда: барлық цифрлық технологиялар математикалық әдістер мен нәтижелерге негізделген. Білім беру жүйесінде жасанды интеллектті қолдану бірнеше өзара байланысты кезеңдерді қамтиды. Алдымен білім беру деректері жиналып, құрылымданады (оқу мақсаттары, тапсырмалардың орындалу реті, білім алушының жұмыс уақыты, материалды меңгеру деңгейі және бақылау нәтижелері). Осы деректер негізінде білім алушының цифрлық профилі және оның жеке білім беру траекториясы қалыптастырылады. Келесі кезеңде жинақталған деректер машиналық оқыту әдістерін қолдану арқылы талданады. Бұл оқу нәтижелеріндегі заңдылықтарды, материалды меңгеру ерекшеліктерін және білім беру үдерісінің табыстылығына әсер ететін факторларды анықтауға мүмкіндік береді; білім алушының білім беру траекториясын уақытында түзетуге мүмкіндік береді. Осыған байланысты қазіргі таңда білім беру жүйесі цифрлық ресурстар мен құралдардың жедел дамуы жағдайында жаңа сипатқа ие болуда. Цифрлық білім беру ресурстарының кеңінен енгізілуі оқу процесінің құрылымына, мазмұнына және әдістемесіне елеулі өзгерістер әкелуде. Осы тұрғыдан алғанда цифрлық ресурстар, оның ішінде жасанды интеллект (ЖИ), білім беру саласында оқытудың тиімділігін арттыруға бағытталған инновациялық құралдардың бірі ретінде қарастырылуда. Қазіргі уақытта педагогтер математика пәнін оқытуда ЖИ мүмкіндіктерін белсенді түрде пайдалана бастады. ЖИ пән бойынша оқу тапсырмаларын құрастыруға, білім алушылардың біліміндегі олқылықтарды анықтауға, оқу жетістіктерін талдауға және жеке оқу траекторияларын құруға мүмкіндік береді. Педагогтер арасында жүргізілген «Мектептің математика курсын оқыту барысында жасанды интеллектті қолдану» тақырыбындағы сауалнама нәтижелері ЖИ-дің математика сабағында біртіндеп (57 Мектептегі математика курсын оқыту барысында ЖИ-дің оқу тапсырмаларын әзірлеуде кеңінен қолданылатыны байқалды. Бұл ретте ЖИ көмегімен тапсырма дайындауда промпт құрастырудың маңызы ерекше. Промпт – жасанды интеллект жүйесіне берілетін нақты әрі құрылымды нұсқау немесе сұраныс мәтіні. Оның мазмұны, нақтылығы және логикалық жүйелілігі алынатын нәтижеге тікелей әсер етеді. Дұрыс тұжырымдалған промпт есептің математикалық дұрыстығын қамтамасыз етіп қана қоймай, шешу алгоритмінің бірізділігін, тапсырманың оқу мақсаттарына сәйкестігін және педагогикалық құндылығын айқындайды. Промпт құрастыру барысында есептің күрделілік деңгейін, білім алушылардың жас ерекшеліктерін, пәндік терминологияның дәлдігін және бағалау критерийлерін ескеру маңызды. Нақты параметрлер мен шектеулер көрсетілген жағдайда ЖИ мазмұнды, әдістемелік тұрғыдан негізделген және сараланған тапсырмалар ұсына алады. Сондықтан промптпен сауатты жұмыс істеу ЖИ-ді тиімді қолданудың негізгі шарттарының бірі болып табылады. ЖИ-ді стандартты емес, шығармашылық және практикалық мазмұндағы есептер құрастыруға, формативті және жиынтық бағалау тапсырмаларын әзірлеуге, сондай-ақ тапсырмаларды білім алушылардың жас ерекшелігі мен дайындық деңгейіне қарай бейімдеуге тиімді пайдалануға болады. Ең бастысы, оқу материалдарын дайындау, оқу нәтижелерін талдау және сараланған жұмысты ұйымдастыру барысында ЖИ-ді пайдаланған жағдайда педагогтің білім беру процесінде жетекші рөлі сақталуы тиіс. Сонымен қатар, ЖИ-ді сауатты әрі этикалық тұрғыдан жауапкершілікпен қолдану мектептегі математика курсын тиімді ұйымдастырудың маңызды тетігі бола алады.

ӘДЕБИЕТ

[1] “Қазақстан Республикасында мектепке дейінгі, орта, техникалық және кәсіптік білім беруді дамытудың 2023 – 2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын бекіту туралы” Қазақстан Республикасы Үкіметінің 2023 жылғы 28 наурыздағы № 249 қаулысы, Астана (2023).

[2] “Жасанды интеллектті дамытудың 2024 – 2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын бекіту туралы” Қазақстан Республикасы Үкіметінің 2024 жылғы 24 шілдедегі № 592 қаулысы, Астана (2024).

[3] Semenov A.L., Abylkassymova A.E., Polikarpov S.A. Foundations of Mathematical Education in the Digital Age, *Doklady Mathematics*, **107**:1 (2023), 1-9.

[4] Semenov A.L., Abylkassymova A.E., Rudchenko T.A. AI Methods in Control of Personalized General Education, *Doklady Mathematics*, **109**:3 (2024), 191-196.

[5] Әбілқасымова А.Е., Ахмед-Заки Д.Ж., Жұмабай Н. О развитии SMART технологии в цифровой образовательной среде Казахстана, *Вестник КазНУ. Серия «Педагогические науки»*, **3**:80 (2024), 4-22.

[6] 5–11-сыныптарда «Математика», «Алгебра», «Геометрия» және «Алгебра және анализ бастамалары» оқу пәндерін оқуда және оқытуда жасанды интеллектіні қолдану бойынша әдістемелік ұсынымдар, Ы. Алтынсарин атындағы ҰБА, Астана (2025), 1-80.

STEM БІЛІМ БЕРУ НЕГІЗІНДЕ ОҚУШЫЛАРДЫҢ МАТЕМАТИКАДАН ФУНКЦИОНАЛДЫҚ САУАТТЫЛЫҒЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ

А.Е. ӘБІЛҚАСЫМОВА¹, С.М. ЕСХОЖАЕВА², Н. ЖҰМАБАЙ³

^{1,2,3} Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹aabylkassymova@mail.ru, ²syeskhozhaeva@gmail.com, ³nurman-0906@mail.ru

Қазіргі білім беру жүйесінің басты мақсаты – оқушыға тек пәндік білім беру емес, сол білімді нақты өмірлік жағдайларда қолдана алатын, деректерді талдап, дәлелді шешім қабылдайтын тұлғаны қалыптастыру. Осы бағытта STEM білім беру әлемдік білім беру кеңістігінде басым бағыттардың біріне айналды [1, 2].

STEM білім беру оқшауланған пәндер жиынтығы емес, оқушыны нақты мәселені шешуге жетелейтін жобалық-әрекеттік жүйе: оқушы мәселені анықтайды, дерек жинайды, математикалық модель құрады, технологиялық құралмен өңдейді, шешімнің тиімділігін салыстырады және нәтижесін дәлелмен ұсынады [3, 4]. Осы тұрғыдан алғанда, математика тек есеп шығару пәні емес, ол шешім қабылдаудың құралы, дәлел мен пайымдаулардың негізі ретінде қызмет етеді.

PISA-2022 нәтижелері бойынша Қазақстан оқушыларының математикадан орташа балы 425-ті құрап, ЭЫДҰ елдерінің орташа көрсеткішінен (472 балл) 47 баллға төмендеген. Бұл айырмашылық тек тақырыптарды білмеумен түсіндірілмейді, сонымен қатар оқушылардың контекстті математикалық сипаттау, алынған мәндерді түсіндіру және дәлелмен бағалау дағдылары жеткіліксіз дамығанын байқалтты [5, 6].

Зерттеудің мақсаты практикалық мазмұнды есептермен қатар контекстік есептерді математика сабағына кіріктірудің әдістемелік негіздерін айқындау және олардың оқушылардың функционалдық сауаттылығын дамытудағы тиімділігін бағалау.

Зерттеу материалы ретінде А.Е. Әбілқасымова, З.Ә. Жұмағұлова, Е.А. Тұяқов (2024) еңбегіндегі үш контекстік есеп іріктелді [7, 8, 9]:

- 1) конус бетін қаңылтырмен қаптау (геометриялық оңтайландыру);
- 2) автокөлік сатылымын статистикалық талдау;
- 3) бактериялар популяциясының экспоненциалды модельдеу.

Әр есеп PISA құзыреттілік процестері (тұжырымдау, қолдану, түсіндіру, бағалау), STEM компоненттері және когнитивтік деңгейлер бойынша мазмұндық-когнитивтік талдауға алынды.

Талдау нәтижесінде мынадай қорытындылар алынды:

1. Қарастырып отырған есептер PISA-ның функционалдық сауаттылыққа қоятын негізгі талабын – тұжырымдау, қолдану, түсіндіру, бағалау тізбегін толықтай қамтиды, ал бірінші

және екінші есептер PISA 3-4 деңгейіне, бактерия санына қатысты үшінші есеп PISA 5 деңгейіне сәйкес келеді.

2. Әр есеп STEM пәндерінің кемінде екі-үш компонентін мазмұндық деңгейде біріктіреді: конус есебі инженерлік жоспарлау мен кеңістіктік геометрияны; автокөлік есебі экономика мен деректер талдауын; бактерия есебі микробиологиялық модельдеу мен сыни ойлауды дамытады.

3. Оқушылардың негізгі қиындықтары есептеуге емес, контексті талдау, оның математикалық мазмұнын айқындау және нәтижені дәлелмен бағалауға байланысты екені анықталды.

Бұл PISA-2022-де оқушыларының ЭЫДҰ елдерінің орташа деңгейінен айтарлықтай төмендеу болуының себебін айқындайды.

4. Контекстік есептерді оқу бағдарламасына жүйелі кіріктіруде туындайтын кедергілер оқушы, мұғалім деңгейіне жіктеліп, оларды жоюдың әдістемелік тәсіл ұсынылды.

Қорытынды. STEM білім берудің құрылымдық-мазмұндық сипаты математикадан функционалдық сауаттылықтың когнитивтік кезеңдерімен сәйкес келеді. Практикалық мазмұнды есептерді математика сабақтарына жүйелі түрде кіріктіру оқушылардың дерекпен жұмыс, математикалық модельдеу және шешімдерді дәлелді түрде бағалау дағдыларын қалыптастырады. Бұл үдеріс математикалық білімді шынайы өмірлік жағдаяттарды түсіндіру құралына айналдырып қана қоймай, PISA халықаралық бағалау шеңберінің когнитивтік талаптарына сәйкес жоғары нәтижелерге қол жеткізуге жағдай жасайды. Әдістемелік нұсқау ретінде контекстік есептер жиынтығын сынып деңгейлері бойынша бейімдеу, когнитивтік кезеңдер бойынша қадамдық нұсқаулық және рубрикалық бағалау жүйесін енгізу ұсынылады.

Кілтті сөздер: STEM білім беру, математика, функционалдық сауаттылық, PISA, практикалық мазмұнды және контекстік есептер.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97M10, 97C30

ӘДЕБИЕТ

[1] Hilton M. *Exploring the intersection of science education and 21st century skills: A workshop summary*, National Academies Press, Washington (2010).

[2] Bybee R. W. *The case for STEM education: Challenges and opportunities*, NSTA press, Arlington County, Virginia (2013).

[3] Jolly A. *STEM by design: Strategies and activities for grades 4-8*, Routledge, New York (2016).

[4] Zhumabay, N., Varis, S., Abylkassymova, A., Balta, N., Bakytказы, T., Bowen, G. M. Mapping the Kazakhstani STEM Education Landscape: A Review of National Research, *European Journal of STEM Education*, 1:9 (2024), 01-13.

[5] Pisa, OECD Results (Volume I): The state of learning and equity in education, URL <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>, 1:5 (2023), 44-46.

[6] Stacey K., The real world and the mathematical world, in: *Assessing mathematical literacy: The PISA experience*, Springer, City (2014), 57-84.

[7] Semenov, A. L., Abylkassymova, A. E., Polikarpov, S. A. The title of the article in the book, in: *Doklady Mathematics*, Moscow: Pleiades Publishing, Moscow (2023), S1-S9.

[8] Abylkassymova A.E., Zhumagulova Z.A., Tuyakov Y.A. *Developing functional literacy of school students through tasks with practical content*, Study guide - Almaty: Mektep, Almaty (2024).

[9] Abylkassymova, A. E., Shishov, S. E., Kalney, V. A., Ryakhimova, E. G. Influence of High-Tech Society on the Development of Modern Educational System, *Journal of Higher Education Theory, Practice*, 5:22 (2022), 201-206.

ҚАЗАҚСТАНДАҒЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУДІҢ ДАМУ ТЕНДЕНЦИЯЛАРЫ (1917 ЖЫЛҒА ДЕЙІН)

А.Е. ӘБІЛҚАСЫМОВА¹, Б.М. КОСАНОВ², Б.Я. ХАЛИМБЕТОВ³

^{1,2,3}Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

¹aabylkassymova@mail.ru, ²bagdatmakulbek@gmail.com,

³bektemirkhalimbetov23@gmail.com

Кіріспе Қазақстандағы математикалық білім беру тарихы күрделі әрі көпқырлы даму-ды бастан кешірді. Қазан төңкерісіне дейін қазақ даласындағы білім беру жүйесі негізінен мұсылмандық мектептер мен Ресей империясының ықпалымен ашылған орыс-қазақ және орыс-бұратана мектептері арқылы қалыптасты. Әр мектеп түрінің өзіндік оқыту мазмұны мен әдістері болды [1]. XIX ғасырдың ортасынан бастап қазақ балалары үшін жаңа үлгідегі оқу орындары ашылып, арифметика мен геометрияны жүйелі оқыту басталды. Сонымен қатар жәдит мектептері математиканы оқытуға жаңашыл әдістер енгізді [2]. Зерттеудің мақсаты – Қазан төңкерісіне дейінгі Қазақстандағы математикалық білім беру жүйесін тарихи тұрғы-да талдап, әртүрлі мектептердегі оқыту ерекшеліктерін анықтау. Зерттеу әдіснамасы Зерттеу барысында тарихи-салыстырмалы әдіс қолданылды. Негізгі дереккөздер ретінде мұрағат ма-териалдары, тарихи еңбектер, оқу бағдарламалары мен оқулықтар қарастырылды. XX ғасыр басында Қазақстанда келесі мектеп түрлері жұмыс істеді: мұсылмандық қадим мектептері; мұсылмандық жәдит мектептері; орыс-қазақ мектептері; орыс-бұратана мектептері. Мұсыл-мандық қадим мектептерінде математика жеке пән ретінде оқытылмағанымен, «Әбжәд хиса-бы» арқылы есептеу дағдылары қалыптастырылды [3]. Жәдит мектептері математиканы жеке пән ретінде енгізіп, көрнекілік пен жүйелілікке мән берді. Медреселерде арифметика мен ал-гебра элементтері оқытылды. Зерттеу нәтижелері 1. Мұсылмандық мектептердегі білім беру ерекшеліктері: Қадим мектептерінде математика жанама түрде оқытылды; «Әбжәд» жүйесі қолданылды; Жәдит мектептері математиканы жүйелі пән ретінде енгізді [2]. 2. Орыс-қазақ мектептерінің рөлі: XIX ғасырдың екінші жартысында бұл мектептерде арифметика мен гео-метрия оқытылды. Оқытуда Грубе әдісі қолданылып, сандарды терең меңгеруге бағытталды [1]. Ы. Алтынсарин оқытуды өмірмен байланыстырып, практикалық есептерге басымдық берді [6]. 3. Орыс-бұратана мектептері. Қазақ тіліндегі білім алу шектелді; Оқыту орыс тілінде жүр-гізілді; Математикаға бөлінген уақыт өзгертілді. 4. Мұғалімдер даярлау жүйесі XIX ғасырдың соңында мұғалімдер даярлау жүйесі қалыптасты. Орынбор, Омбы, Ташкент, Семей, Верный қалаларында семинариялар ашылып, математиканы оқыту әдістемесі енгізілді [1]. 5. Қазақ тіліндегі алғашқы оқулықтар 1914 жылы Міржақып Дулатұлының «Есеп құралы» жарық көріп, қазақ тіліндегі математикалық білімнің дамуына ықпал етті [3]. Дискуссия Бұл кезеңде математикалық білім беру әртүрлі бағытта дамыды. Мұсылмандық мектептер дәстүрлі білім беруді сақтаса, жәдит мектептері жаңашылдық енгізді. Орыс-қазақ мектептері білім берумен қатар отарлық саясаттың құралы болды. Грубе әдісі тиімді болғанымен, оның кемшіліктері де байқалды. Ы. Алтынсарин бұл әдісті қазақ балаларына бейімдеп, практикалық бағытты күшейтті [6]. Орыс-бұратана мектептері ана тіліндегі білім беруді шектеді, бірақ мұғалімдер даярлау мен оқулықтардың пайда болуы ұлттық білімнің дамуына әсер етті. Қорытынды Мұ-сылмандық мектептерден басталған жүйе орыс-қазақ және орыс-бұратана мектептері арқылы дамып, математикалық білім мазмұны кеңейіп, жүйеленді. Мұғалімдер даярлау жүйесінің қа-лыптасуы, оқыту әдістерінің жетілдірілуі және қазақ тіліндегі алғашқы оқулықтардың пайда болуы ұлттық математикалық білімнің дамуына негіз болды. Бұл кезең қазіргі Қазақстандағы математикалық білім беру жүйесінің тарихи іргетасын қалыптастырды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Абылкасымова А.Е., Косанов Б.М.1 N1.S1. *История становления и развитие мето-дики преподавания математики.*, Мектеп, Алматы (2020).
- [2] Әбілқасымова А.Е., Косанов Б.М.1 N1.S1. *Қазақстандағы математиканы оқыту са-бақтастығының қалыптасу тарихы.*, Мектеп, Алматы (2023).

- [3] Қосанов Б.М.1 N1.S1. *Ана тіліндегі алғашқы математика оқулықтары.*, Мерей, Алматы (2015).
- [4] Әбілқасымов А.Е.1 N1.S1. *Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі.*, Мектеп, Алматы (2014).
- [5] Әбілқасымов А.Е., Қосанов Б.М., Нурбаева Д.М., Нурмухамедова Ж.М.1 N1.S1. *Алгебра курсының алғашқы оқу құралы*, ҚазҰПУ Хабаршысы, Алматы (2024).
- [6] Сембаев Ә.І.1 N1.S1. *Қазақ совет мектебінің тарихы.*, Мектеп, Алматы (1967).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИМУЛЯТОРОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А.Е. АБЫЛКАСЫМОВА¹, С.Е. ШИШОВ², Е.А. ВЕРКО³

^{1,3}КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан

²МГУТУ им. К. Г. Разумовского, Москва, Россия

2572545@abaiuniversity.edu.kz

Современные методики преподавания математики и физики активно интегрируют в учебный процесс цифровые технологии с использованием искусственного интеллекта. Одним из перспективных направлений STEM-образования является применение виртуальных лабораторий и цифровых симуляций. Данные средства обучения позволяют моделировать физические процессы и проводить математический анализ экспериментальных данных в цифровой среде, что расширяет их масштаб и возможности при обучении. Таким образом, у учеников развиваются навыки исследовательской и проектной деятельности. Трансформация образовательного процесса и длительное использование дистанционных форм обучения в 2020–2021 учебном году в значительной степени повлияли на развитие у обучающихся навыков работы с экспериментальными данными [1]. Практические занятия по математике и лабораторные занятия по физике были существенно ограничены или полностью переведены в виртуальный формат. В результате у части обучающихся сформировались пробелы в навыках обработки результатов эксперимента, построения графиков и анализа математических зависимостей между физическими величинами. В данной ситуации использование цифровых симуляторов для повторения и закрепления знаний может стать эффективным средством формирования у учащихся навыков математического анализа экспериментальных данных.

Целью данной работы является рассмотрение возможностей применения цифровых симуляторов для развития у обучающихся навыков анализа и интерпретации результатов виртуального эксперимента.

В современных исследованиях по методике обучения математике и естественным наукам особое внимание уделяется когнитивным аспектам усвоения знаний учащимися. В условиях цифровизации образования становится актуальным вопрос о том, каким образом формируется у учащихся понимание математических закономерностей и каким образом они переходят от простого воспроизведения формул к осмысленному применению полученных знаний [2].

В контексте обучения математике и физике, использование виртуальных экспериментов позволяет перейти от вербального усвоения знаний к их осмысленному пониманию. Проведение эксперимента в цифровой среде дает учащимся возможность наблюдать изменение параметров системы, фиксировать результаты измерений и самостоятельно выявлять закономерности. Таким образом, эксперимент становится источником накопления фактов, на основе которых формируется математическое обобщение и понимание физических законов.

Использование цифровых симуляторов при изучении физических процессов способствует формированию у учащихся опыта исследовательской деятельности. Наблюдение за результатами моделирования и последующая математическая обработка данных позволяют учащимся

перейти от простого восприятия информации к аналитическому анализу зависимостей между величинами. В этом случае математические модели выступают не только инструментом вычислений, но и средством объяснения физических явлений [3].

В условиях цифровой трансформации образования возрастает роль интерактивных технологий, виртуальных лабораторий и цифровых образовательных ресурсов, которые позволяют моделировать сложные процессы и организовывать исследовательскую деятельность учащихся. Использование таких инструментов способствует развитию аналитического мышления, формированию навыков обработки данных и повышению эффективности изучения естественнонаучных дисциплин [4].

Цифровые симуляторы позволяют моделировать различные физические процессы, изменять параметры эксперимента и наблюдать результаты в режиме реального времени. Одним из таких инструментов является симулятор электрических цепей Falstad Circuit Simulator, который предоставляет возможность конструировать электрические схемы, измерять физические величины и анализировать их взаимосвязи [5].

В качестве примера рассмотрим виртуальный эксперимент по исследованию зависимости силы тока от сопротивления при постоянном напряжении. В ходе работы учащиеся собирают электрическую цепь, включающую источник напряжения, резистор и измерительные приборы. Далее осуществляется последовательное изменение сопротивления резистора и измерение силы тока в цепи. Полученные значения заносятся в таблицу экспериментальных данных. Таким образом, учащиеся формируют навыки при обучении физике: понимание структуры электрической цепи, навыки работы с приборами, выполнение физических измерений, обработка экспериментальных данных, применение закона Ома [6].

Следующим этапом является математическая обработка результатов эксперимента. На основе полученных данных учащиеся строят график зависимости силы тока от сопротивления и анализируют характер полученной функции. В ходе анализа устанавливается обратная зависимость между рассматриваемыми величинами, что подтверждает закон Ома для участка электрической цепи. Из этого следует, что при выполнении эксперимента мы связываем работу с математическими темами: работа с числовыми данными, табличное представление данных, координатная плоскость, функциональная зависимость, обратная пропорциональность [7].

Таким образом, работа с одной цифровой симуляцией позволяет интегрировать содержание нескольких разделов школьной математики. Учащиеся не только наблюдают физический процесс, но и применяют математические методы анализа данных. Это способствует развитию аналитического мышления и формированию межпредметных связей между математикой и физикой.

Из вышесказанного следует, что применение цифровых симуляторов как в школьном образовании, так и в образовательном процессе в целом, способствует формированию навыков математического анализа экспериментальных данных и развитию исследовательских компетенций у обучающихся. Интеграция цифровых технологий совместно с искусственным интеллектом и межпредметных связей между математикой и физикой позволяет повысить качество обучения, мотивацию учащихся и эффективность усвоения ими учебного материала.

Ключевые слова: математический анализ данных, искусственный интеллект, цифровые симуляции, STEM-образование.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97U70, 62P35

ЛИТЕРАТУРА

- [1] UNESCO *Education in a Post-COVID World: Nine Ideas for Public Action*, UNESCO, Paris (2020).
- [2] Abylkassymova A.E., Sedova E.A., Kalimullin A.N. Fact, Belief, Truth and Cognition in School Mathematics Education, *The European Proceedings of Social and Behavioural Sciences*, (2018), 653–660.
- [3] Semenov A.L., Abylkassymova A.E., Polikarpov S.A. Foundations of Mathematical Education in the Digital Age, *Doklady Mathematics*, **107**:Suppl.1 (2023), S1–S9.

- [4] Abylkasymova A.E., Shishov S.E., Kalney V.A., Ryakhimova E.G. Influence of High-Tech Society on the Development of Modern Educational System, *Journal of Higher Education Theory and Practice*, **22**:5 (2022), 201–206.
- [5] Falstad P. *Falstad Circuit Simulator*, Online resource, (2024).
- [6] Holmes W., Bialik M., Fadel C. *Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning*, Center for Curriculum Redesign, Boston (2019).
- [7] Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Pearson, London (2021).

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ЖӘНЕ ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР ДӘУІРІНДЕ МАТЕМАТИКА САБАҒЫНДА КРИТИКАЛЫҚ ОЙЛАУДЫ ДАМУ

А.Т. АДІБАЙ

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
aiaulyym55@gmail.com

Қазіргі білім беру жүйесінде цифрлық технологиялар мен жасанды интеллект құралдарының қарқынды дамуы оқыту үдерісіне жаңа талаптар қойып отыр. Ақпараттың қолжетімділігі оқушылардың дайын жауапты тез алуына мүмкіндік береді, алайда бұл олардың терең ойлау және ақпаратты сыни тұрғыдан талдау қабілеттерінің төмендеуіне әкелуі мүмкін. Осыған байланысты математика сабақтарында оқушылардың критикалық ойлау қабілетін дамыту өзекті мәселелердің бірі болып табылады.

Зерттеудің мақсаты – цифрлық технологиялар мен жасанды интеллект жағдайында математика сабағында оқушылардың критикалық ойлау қабілетін дамыту жолдарын анықтау.

Математика сабағында критикалық ойлауды дамытуға бағытталған тиімді әдістер ретінде проблемалық тапсырмалар, қатесі бар есептерді талдау, бірнеше тәсілмен шығарылатын есептер, логикалық талдауды қажет ететін тапсырмалар және цифрлық ресурстарды пайдалану ұсынылды. Әсіресе жасанды интеллект көмегімен алынған жауаптарды тексеру, шешу жолдарын салыстыру және қателерді анықтау сияқты тапсырмалар оқушылардың сыни ойлау қабілетін дамытуға мүмкіндік беретіні анықталды.

Зерттеудің жаңалығы математика сабағында жасанды интеллект құралдарын қолдану арқылы оқушылардың критикалық ойлау қабілетін дамытуға бағытталған тапсырмалар жүйесінің ұсынылуымен сипатталады. Сонымен қатар жасанды интеллект нәтижелерін талдау арқылы оқушылардың дайын жауапқа тәуелділігін төмендету жолдары қарастырылды.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы ұсынылған әдістер мен тапсырмаларды мектеп математика сабақтарында қолдануға болатындығымен анықталады. Бұл тәсілдер оқушылардың логикалық ойлауын дамытуға, өз пікірін дәлелдеуге және математикалық білімді саналы меңгеруге мүмкіндік береді.

Кілтті сөздер: жасанды интеллект, критикалық ойлау, цифрлық технологиялар, білім беру.

2020 Mathematics Subject Classification: 97P80, 97C70

ӘДЕБИЕТ

- [1] Haguchi, M., Wachidah, N. C., Adi, G. S., Irawijayanti, F., Fatqurhohman, F. The effect of Artificial Intelligence–Based Learning on Students’ Mathematical Thinking in Secondary Education, in: *JINEA: Journal of Innovation in Education and Learning*, Ihsan Cahaya Pustaka, Indonesia (2026), 13–26.
- [2] Tashtoush M.A., Shirawia N.H., Hussein L.A., Qasimi A.B. The Efficacy of Utilizing Artificial Intelligence Techniques in Developing Critical Thinking in Mathematics among Secondary School Students and their Attitudes Toward it, *Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics*, **6**:1 (2025), 37–50.

ИНФОРМАТИКА ПӘНІНДЕ ЦИФРЛЫҚ ҚҰЗЫРЕТТІЛІКТІҢ ОҚЫТУ САПАСЫНА ӘСЕРІ

Ә.Т. АБДРАШОВА¹, Ж.С. КЕМЕЛЬБЕКОВА²

^{1,2}Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан

¹Emon_81@mail.ru, ²zhanar.kemelbekova@auuezov.edu.kz

Қазіргі білім беру жүйесінде цифрлық құзыреттілік мұғалімнің кәсіби дамуына және оқыту сапасына тікелей әсер ететін негізгі факторлардың бірі болып табылады. Бұл мақалада мұғалімдердің цифрлық құзыреттілігі мен информатиканы оқыту сапасының байланысы қарастырылады. Цифрлық құралдар мен технологияларды тиімді пайдалану мұғалімдерге оқу процесін жақсартуға және білім алушылардың білімін арттыруға мүмкіндік береді. Зерттеу барысында мұғалімдердің цифрлық дағдыларын дамыту бойынша ұсыныстар және оларды оқу процесінде тиімді пайдалану тәсілдері қарастырылды. Сонымен қатар, цифрлық құзыреттіліктің білім алушылардың білім сапасына әсері және осы салада жүргізіліп жатқан инновациялық әдістемелік өзгерістер талданады.

Кілттік сөздер: цифрлық құзыреттілік, информатика, цифрлық құралдар, оқыту сапасы, оқу процесі

Қазіргі білім беру жүйесінде мұғалімдердің цифрлық құзыреттілігін арттыру - оқу сапасын жетілдірудің негізгі факторларының бірі болып табылады. Цифрлық құзыреттілікті дамыту информатика пәнін оқытудың тиімділігін арттыруға, білім алушылардың танымдық белсенділігін күшейтуге және олардың білім деңгейін жүйелі түрде көтеруге мүмкіндік береді. Ақпараттық-коммуникациялық технологияларды орынды әрі әдістемелік тұрғыдан дұрыс қолдану оқу үдерісінің сапасын жақсартып, білім алушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырады. Мұғалімнің цифрлық құзыреттілігі тек техникалық дағдылармен шектелмейді, сонымен қатар педагогикалық инновацияларды, заманауи оқыту әдістерін және цифрлық білім беру ресурстарын тиімді кіріктіру қабілетін қамтиды. Осы тұрғыда цифрлық құралдарды пайдалану оқыту нәтижелерін бағалау, білім сапасын мониторингтеу және кері байланыс ұйымдастыру үдерістерін жетілдіруге жағдай жасайды [1-5].

Мақаланың мақсаты мұғалімдердің цифрлық құзыреттілігін арттырудың білім беру сапасына тигізетін әсерін зерттеу, сондай-ақ, цифрлық құралдар мен технологияларды информатика пәнін оқыту процесіне тиімді енгізу жолдарын ұсыну болып табылады.

Зерттеу нәтижелері мұғалімдердің цифрлық құзыреттілігін арттырудың білім алушылардың білім сапасына ықпалы зор екенін көрсетті. Мұғалімдердің сандық дағдыларын дамыту олардың оқыту әдістемесін тиімді жаңартуға және білім алушылардың білімін бағалау процесін оңтайландыруға мүмкіндік береді. Әр түрлі цифрлық құралдарды қолдану мұғалімдерге білім алушылардың білім деңгейін нақты бағалауға, оқу материалдарын қызықты және интерактивті түрде ұсынуға жағдай жасайды [4-9].

Зерттеу барысында мұғалімдер арасында жүргізілген сауалнама мен эксперименттердің нәтижелері төмендегідей қорытындыларды көрсетті: (Кесте 1)

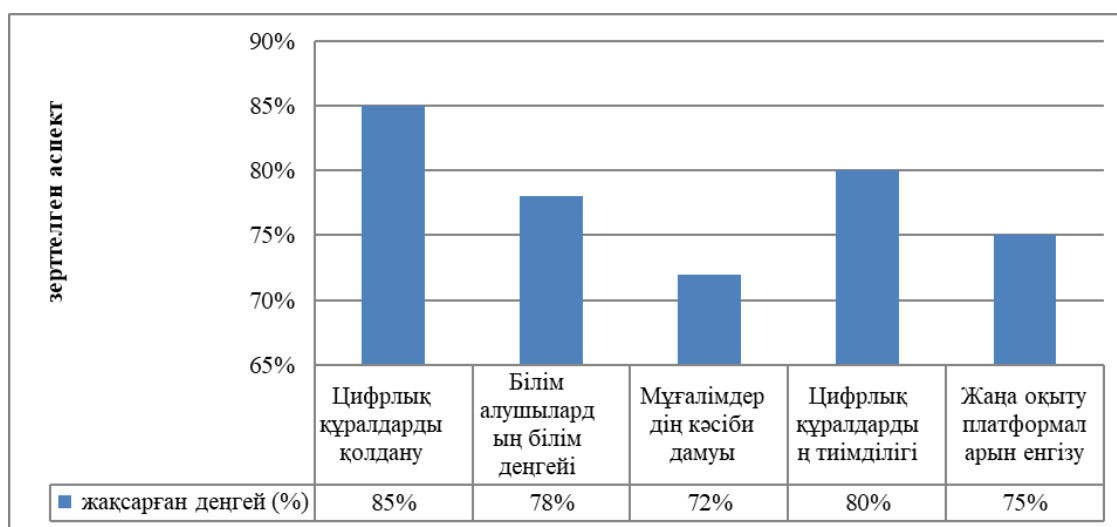
Кесте 1. Мұғалімдердің цифрлық құзыреттілігін арттыру нәтижелері

№	Зерттелген аспект	Нәтижелер	Қорытынды
1	Цифрлық құралдарды қолдану	Білім алушылардың пәнге қызығушылығы артты, өздік жұмыс жасау белсенділігі өсті	Сандық платформаларды қолдану білім алушылардың мотивациясын арттырады

2	Білім алушылардың білім деңгейі	Теориялық және практикалық дағдылар жақсарды (бағдарламалау, алгоритмдеу)	Цифрлық құралдар білім сапасын жоғарылатуға мүмкіндік береді
3	Мұғалімдердің кәсіби дамуы	Мұғалімдер жаңа құралдар мен әдіснамаларды тиімді қолдануды үйренді	Кәсіби құзіреттілік пен тәжірибе артты
4	Цифрлық құралдардың тиімділігі	Онлайн тесттер, видео дәрістер, виртуалды зертханалар оқу процесін жеңілдетті	Бағалау мен бақылауды оңтайландыруға көмектеседі
5	Жаңа оқыту платформаларын енгізу	Google Classroom, Moodle, Khan Academy тиімді қолданылды	Мұғалімдер үшін оқу материалдарын ұсыну жеңілдеді, білім алушылармен байланыс жақсарды

Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, мұғалімдердің цифрлық құзіреттілігін арттыру оқу сапасын жоғарылатуға және білім алушылардың пәнге деген қызығушылығын арттыруға мүмкіндік береді. Бұл өз кезегінде оқу процесінің тиімділігін арттыруға және білім беру сапасын жақсартуға ықпал етеді. (Сурет 1)

Сурет 1. Цифрлық құралдардың оқыту сапасына әсері



Қорытындылай келе, мұғалімдердің цифрлық құзіреттілігін арттыру қазіргі білім беру жүйесіндегі маңызды аспект болып табылады. Цифрлық құралдарды тиімді қолдану мұғалімдерге оқу процесін жоспарлау мен ұйымдастыруды оңтайландыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, білім алушылардың ақпараттық және танымдық дағдыларын дамыту үшін мұғалімдердің цифрлық құзіреттілігі маңызды рөл атқарады.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Бейсебаева Н.Қ. *Мұғалімдердің кәсіби дамуы: цифрлық технологиялар мен инновациялық әдістер*, «Жоғары мектеп» баспасы, Астана (2021).
- [2] Бакенова Б.Т., Оспанова М.К. Цифрлық құзіреттілік және оның білім берудегі рөлі, «Білім беру технологиялары мен инновациялары» журналы, 5:2 (2019), 34–41.

- [3] Дүйсембаева Ә.А. *Цифрлық білім беру құралдары: теория және практика*, Қазақ университеті, Алматы (2020).
- [4] Айтқазиева Г.М. *Информатика пәні бойынша білім алушылардың цифрлық дағдыларын дамыту: ғылыми зерттеу*, «Қазақ ғылымы» баспасы, Шымкент (2020).
- [5] Kozhevnikov V.N. The Role of Digital Literacy in Modern Education, *Journal of Educational Technology & Society*, **23**:3 (2020), 78–90.
- [6] Redecker C. *European framework for the digital competence of educators: DigCompEdu*, Publications Office of the European Union, Luxembourg (2017).
- [7] Punie Y. *Digital competence frameworks and their implementation*, Publications Office of the European Union, Luxembourg (2017).
- [8] Роберт И.В. *Теория и методика информатизации образования*, ИИО РАО, Москва (2010).
- [9] Полат Е.С. *Новые педагогические и информационные технологии в системе образования*, Академия, Москва (2009).

МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДА ОҚУШЫЛАРДЫҢ ӨЗАРА ЫҚПАЛДАСТЫҒЫН ДАМУ: ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ТӘСІЛДЕР МЕН ҒЫЛЫМИ НЕГІЗДЕРІ

Н.Н. ӘКИМОВА

¹Қазақ Ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
nursuluakimova132@gmail.com

XXI ғасырдағы білім беру реформалары оқыту үдерісін білімді трансляциялаудан білімді бірлесіп құрастыруға бағыттады. Осы өзгерістер аясында оқушылардың өзара ықпалдастығы оқу нәтижелеріне әсер ететін маңызды педагогикалық фактор ретінде қарастырылуда. Математика пәні логикалық ойлау мен дәлелдеуге негізделгендіктен, оқушылар арасындағы пікір алмасу мен бірлескен талдау оқу сапасына тікелей ықпал етеді. Дәстүрлі сабақ үлгілерінде математикалық білім көбіне алгоритмдерді меңгеруге бағытталса, қазіргі зерттеулер математикалық түсініктердің әлеуметтік өзара әрекет барысында қалыптасатынын дәлелдейді (Boaler, 2019). Сондықтан математиканы оқытуда ынтымақтастыққа негізделген оқу ортасын құру ғылыми және практикалық тұрғыдан өзекті мәселе болып табылады. Әлеуметтік-конструктивистік теориялар білімнің әлеуметтік табиғатын негіздей отырып, оқу үдерісінде коммуникацияның шешуші рөл атқаратынын көрсетеді. Инклюзивті білім беру саласындағы зерттеулер барлық білім алушылардың белсенді қатысуы ұйымдастырылған жағдайда оқу нәтижелері тұрақты болатынын дәлелдейді (Ainscow, 2020). Математикалық білім беру контекстінде Boaler (2019) бірлескен тапсырмалар оқушылардың икемді ойлауын дамытып, математикалық сенімділікті арттыратынын анықтаған. Cobb және Jackson (2021) тең қатысу қағидатына негізделген сыныптық талқылаулар академиялық теңсіздікті төмендетуге мүмкіндік беретінін атап өтеді. Ал Vassilopoulou және Triantafyllou (2022) математикалық диалог оқушылардың аргументация және рефлексия дағдыларын дамытудағы негізгі құрал екенін көрсетеді. Жалпы алғанда, зерттеулер өзара ықпалдастықтың математикалық білімді терең меңгерудің маңызды шарты екенін айқындайды. Зерттеу келесі үш теориялық ұстанымға сүйенеді: 1. Әлеуметтік-конструктивизм — білім әлеуметтік әрекет нәтижесінде қалыптасады; 2. Инклюзивті педагогика — әртүрлі оқу қажеттіліктерін ескере отырып тең қатысу мүмкіндігін қамтамасыз ету; 3. Математикалық дискурс теориясы — ұғымдарды түсіну тілдік және аргументативтік әрекет арқылы жүзеге асады. Осы негізде оқушылардың өзара ықпалдастығы когнитивтік, әлеуметтік және рефлексиялық компоненттердің интеграциясы ретінде қарастырылады. Мақала теориялық сипатта болғанымен, ұсынылған модельді эмпирикалық зерттеулерде қолдануға болады. Болашақ зерттеу келесі дизайн арқылы жүзеге асырылуы

мүмкін: зерттеу түрі: аралас әдіс (mixed-methods); қатысушылар: жалпы білім беретін мектептің 7–9 сынып оқушылары; деректер жинау: сабақ бақылауы, оқушы сұхбаттары, тапсырма нәтижелерін талдау; талдау тәсілдері: сапалық мазмұндық талдау және салыстырмалы статистикалық талдау. Бұл тәсіл өзара ықпалдастық деңгейі мен математикалық жетістіктер арасындағы байланысты анықтауға мүмкіндік береді. Өзара ықпалдастыққа негізделген оқыту оқушыларды білімді тұтынушыдан білімді бірлесіп жасаушыға айналдырады. Мұндай ортада: математикалық идеялар талқылау арқылы нақтыланады; қателік оқу ресурсы ретінде қабылданады; оқушылардың оқу жауапкершілігі артады. Инклюзивті сынып жағдайында топтық әрекет әртүрлі дайындық деңгейіндегі оқушылардың өзара қолдауына жағдай жасайды. Нәтижесінде оқу үдерісі бәсекелестіктен ынтымақтастыққа ауысады. Математиканы оқытуда оқушылардың өзара ықпалдастығын дамыту білім сапасын арттырудың стратегиялық бағыты болып табылады. Бірлескен оқу мен математикалық диалогты жүйелі енгізу оқушылардың танымдық белсенділігін күшейтіп, математикалық түсініктердің тұрақты қалыптасуына ықпал етеді. Ұсынылған тұжырымдамалық модель болашақ эмпирикалық зерттеулер үшін теориялық негіз бола алады.

Кілтті сөздер: математика дидактикасы, өзара ықпалдастық, бірлескен оқу, математикалық коммуникация, инклюзивті оқыту.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Ainscow, M. Promoting inclusion and equity in education. Routledge.(2020)
- [2] Boaler, J. Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics. Jossey-Bass.(2019)
- [3] Cobb, P., Jackson, K. Equity in mathematics education: Challenges and opportunities. Journal of Mathematics Education, 14(2), 45–60.(2021)
- [4] Vassilopoulou, M., Triantafyllou, C. Inclusion and collaborative practices in mathematics classrooms. International Journal of Inclusive Education, 26(8), 1–15.(2022)

СТЕРЕОМЕТРИЯНЫ ОҚЫТУДА ҚОЛДАНЫЛАТЫН ЦИФРЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МҮМКІНДІКТЕРІ

Ә.С АРЫСБЕКОВА¹, М.К ШУАКАЕВ²

^{1,2} Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

¹ asselarysbekova@gmail.com, ² mshuakayev@mail.ru

Кіріспе. Қазіргі білім беру жүйесінің басты мақсаты — оқушының тек білім қорын қалыптастыру ғана емес, сонымен қатар функционалды сауаттылығын, сыни ойлау қабілетін, зерттеушілік дағдыларын, кеңістікте елестету мүмкіндіктерін дамыту болып табылады [1]. Әсіресе математикалық білім беру жүйесінде, соның ішінде геометрия курсына негізгі ұғымдар мен анықтамаларды терең меңгеру маңызды рөл атқарады. Ұғымдарды толық әрі саналы түрде меңгермейінше, пән мазмұнын жүйелі игеру мүмкін емес [2]. Геометрия курсына стереометрия бөлімі ерекше орын алады. Себебі ол кеңістіктегі фигураларды, олардың өзара орналасуын, қасиеттерін, өлшемдерін зерттейді. Алайда мектеп тәжірибесі көрсеткендей, стереометрия оқушылар үшін ең күрделі бөлімдердің болып саналады [3]. Оның негізгі себебі-кеңістікте ойлау қабілетінің жеткілікті дәрежеде дамымауы және үшөлшемді объектілерді жазықтықтағы кескін ретінде қабылдай алмау. Дәстүрлі оқыту кезінде мұғалімдер тақта мен борды, плакаттарды, сызбаларды пайдаланды. Алайда бұл құралдар ақпаратты визуализациялауға белгілі бір деңгейде ғана мүмкіндік береді. Дегенмен жазықтықта салынған сурет кеңістіктегі объектінің қасиеттерін толық ашып көрсете алмайды. Соның салдарынан оқушылар фигуралардың кеңістікте орналасуын түсіну де, қима салу есептерін шешу де, теоремаларды дәлелдеу де жиі қателеседі [4]. Нәтижесінде стереометрия курсы бойынша теориялық білімнің толық қалыптаспауы білім сапасының төмендеуіне алып келеді.

Қазіргі қоғам цифрландыру кезеңінде дамып отыр. Білім беру саласы да бұл үдерістен тыс қалған жоқ. Қазақстан Республикасының білім беру жүйесі жаңартылған мазмұнға, цифрлық технологияларды оқу үдересіне енгізуге, ақпараттық – коммуникациялық технологияларды кеңінен пайдалануға бағытталған [5]. Цифрлық технологияларды стереометрия бөлімін оқытуда қолданудың басты артықшылығы — динамикалық модельдеу мүмкіндігі. Динамикалық геометриялық ортада оқушы үшөлшемді фигураны тек көрумен шектелмейді, оны айналдырады, бұрады, қима жүргізеді. Мұнда әрекеттер сәйкесінше кеңістікте ойлаудың дамуына тікелей әсер етеді [6].

Ми қызметінің жартышарлық теориясына сай, мидың сол жақ жартышар бөлігі логикалық және символдық ақпаратты өңдеуге жауап берсе, оң жақ бөлігі кеңістіктегі бейнелерді қабылдайды. Егер сабақ барысында оқушыға тек мәтіндік немесе формулалық ақпарат ғана берілсе, оның миының тек сол жақ жартышар бөлігі қарқынды жұмыс жасайды. Цифрлық 3D модельдер мен интерактивті визуализация екі жартышардың бірлескен қызметін қамтамасыз етеді [7].

Қазіргі таңда стереометрия бөлімін оқытуда интерактивті геометриялық жүйелер, электронды оқулықтар, виртуалды зертханалар, 3D модельдеу бағдарламалары кеңінен қолданылуда. Бұл бағдарламалар тек көрнекілік құралдары емес, оқушыны белсенді субъект ретінде әрекет ететін зерттеушіге айналдырады. Осыған байланысты стереометрияны оқытуда цифрлық бағдарламаны қолдану мәселесі ғылыми- педагогикалық тұрғыдан өзекті. Сондықтан заманауи цифрлық құралдардың дидактикалық мүмкіндіктерін анықтау — қазіргі математикалық білім берудің маңызды бағыттарының бірі.

Осы зерттеудің келесі бөлімінде стереометрияны оқытуда кеңінен қолданылатын цифрлық геометриялық орталардың мүмкіндіктері қарастырылады. Атап айтқанда, оқыту процесінде пайдалануға тиімді GeoGebra, Cabri 3D, TincerCad бағдарламаларының интерфейстік құрылымы мен функционалдық ерекшеліктеріне талдау жасалады. Бұл бағдарламалар үшөлшемді геометриялық объектілерді визуализациялауға, кеңістіктегі фигуралардың орналасуын динамикалық түрде көрсетуге және оқушылардың кеңістікте ойлау қабілетін дамытуға мүмкіндік береді. Әр бағдарламаның интерфейсі пайдаланушыға ыңғайлы басқару панельдер жүйесі және модельдеу ортасымен ерекшеленеді.

GeoGebra бағдарламасының интерфейсі мен ерекшеліктері.

GeoGebra – математиканы оқытуға арналған динамикалық бағдарламалардың бірі болып табылады. Бұл бағдарлама алгебра, геометрия және математикалық талдау элементтерін біріктіретін әмбебап математикалық орта болып саналады. Бағдарламаның интерфейсі қарапайым, әрі қолданушыға ыңғайлы құрылымымен ерекшеленеді. Оның негізгі интерфейсі элементтері: құралдар тақтасы, жұмыс аймағы, алгебралық терезе, енгізу жолы. Құралдар тақтасында нүкте, түзу, кесінді, көпбұрыш, жазықтық және үшөлшемді денелерді құруға арналған түрлі құралдар орналасқан. Бұл құралдар арқылы геометриялық объектілерді жылдам, әрі оңай құруға болады. Жұмыс аймағында құрылған объектінің графикалық көрінісі көрсетілсе, ал алгебралық терезеде олардың координаталары мен теңдеулері көрсетіледі. Бұл байланыс оқушыға геометриялық және алгебралық ұғымдардың өзара байланысын түсінуге мүмкіндік береді [8].

GeoGebra бағдарламасының басты ерекшеліктерінің бірі – объектілердің динамикалық түрде өзгеру мүмкіндігі. Пайдаланушы объектіні жылжыту, бұру, айналдыру және өлшемдерін өзгерту арқылы олардың қасиеттерін бақылап, геометриялық заңдылықтарды зерттей алады. Мәселен, үшбұрыштың медианаларын салу барысында олардың бір нүктеде қиылысатынын динамикалық тұрғыда көрсетуге болады. Үшбұрыштың төбелерін жылжытқанда да медианаларының қиылысу нүктесінің өзгермейтінін біліп, ауырлық центр ұғымын тәжірибе жүзінде түсінуге мүмкіндік береді. Сонымен қоса, бағдарламада үшөлшемді графика режимі бар. Бұл режимде призма, пирамида, цилиндр, конус сияқты кеңістік фигураларын құруға болады. Мұндағы визуализация мүмкіндіктері стереометрия бөлімінің тақырыптарын меңгеруде өте тиімді болып табылады.

Cabri 3D бағдарламасының интерфейсі мен ерекшеліктері.

Cabri 3D – кеңістіктегі геометрияны оқытуға арналған арнайы бағдарламалық орта. Бұл бағдарлама кеңістіктегі фигураларды модельдеуге және олардың қасиеттерін зерттеуге мүмкіндік береді [9]. Оның интерфейсі үшөлшемді модельдеуге бейімделген. Бағдарламаның негізгі элементтері ретінде құралдар панелі, үшөлшемді жұмыс аймағы және объектілерді басқару мәзірі қарастырылады. Құралдар панелінде кеңістіктегі нүктелерді, түзулерді, жазықтықтарды, көпжақтарды және түрлі геометриялық фигураларды құруға арналған құралдар орналасқан.

Cabri 3D бағдарламасының маңызды ерекшелігі – объектілерді кеңістікте еркін айналдыру және әртүрлі ракурстан қарай алу мүмкіндігі. Бұл оқушыларға кеңістіктегі фигуралардың құрылымын жақсырақ түсінуге мүмкіндік береді. Мысалы: төртбұрышты пирамида моделін құрып, оның табан жазықтығына параллель қима жүргізуге болады. Бағдарламада қима автоматты түрде бейнеленеді және бұл оның пішініне талдау жүргізушіге мүмкіндік береді. Сонымен қатар бағдарламада жазықтықтардың өзара орналасуын, түзу мен жазықтықтардың өзара қиылысуын және кеңістіктегі фигуралардың құрылымын зерттеуге арналған түрлі функциялар бар. Бұл функциялар стереометрия тақырыптарын көрнекі түрде түсіндіруге мүмкіндік береді. TincerCad бағдарламасының интерфейсі мен ерекшеліктері.

TincerCad – үшөлшемді модельдеу мен жобалауға арналған онлайн платформа. Бағдарламаны Autodesk компаниясы әзірлеген [10]. Бұл бағдарламаның интерфейсі өте қарапайым, әрі түсініктілігімен ерекшеленеді. Бағдарламаның негізгі бөліктеріне жұмыс кеңістігі, геометриялық пішіндер панелі мен объектілердің параметрлерін басқару терезесі жатады.

Пішіндер панелінде куб, цилиндр, конус және шар сияқты фигуралар орналасқан. Жұмыс кеңістігінде осы пішіндерді біріктіру арқылы жаңа модельдер құруға болады. Мысалы: цилиндр мен конусты біріктіру арқылы киіз үйдің қарапайым моделін жасауға болады. Бұл модель арқылы цилиндр мен конустың көлемдерін қосып, толық көлемді анықтауға болады.

TincerCad бағдарламасының басқа бағдарламалардан ерекшелігі – объектілерді біріктіру, кесу және өзгерту функцияларының болуы. Бұл құралдар арқылы күрделі үшөлшемді модельдер жасауға болады. Сонымен қатар, модельдерді айналдыру, масштабтау, әртүрлі бұрыштан қарау мүмкіндігі бар. Мұндай мүмкіндіктер оқушылардың кеңістікте ойлау қабілетін дамытуға көмектеседі.

Қорытынды.

Стереометрияны оқытуда заманауи цифрлық технологияларды қолдану оқушылардың кеңістікте ойлау қабілетін, зерттеушілік дағдыларын және функционалды математикалық сауаттылығын арттыруға тиімді құрал болып табылады. Зерттеу тәжірибелері көрсеткендей, дәстүрлі оқыту әдістері кеңістіктегі фигураларды толық визуализациялай алмауы, оқушылардың стереометриялық ұғымдарды түсінуі мен практикалық есепті шешу деңгейінің төмендеуіне әкеліп соқты. Цифрлық бағдарламалар – GeoGebra, Cabri 3D, TincerCad стереометрия тақырыптарын меңгеруде ерекше тиімділігін көрсетті. GeoGebra динамикалық объектілерді құру және олардың қасиеттерін зерттеу мүмкіндігі арқылы теориялық ұғымдарды тәжірибелік тұрғыдан түсінуге мүмкіндік берсе, ал Cabri 3D кеңістіктегі фигураларды еркін айналдыру және әртүрлі қималарды көрсету арқылы, оқушылардың үшөлшемді ойлау қабілетін дамытады. TincerCad бағдарламасы объектілерді біріктіру, кесу, өңдеу функциялары арқылы күрделі үшөлшемді модельдер жасауға мүмкіндік береді, сәйкесінше бұл оқушылардың зерттеушілік дағдыларын дамытады.

Сонымен, стереометрияны оқытуда цифрлық геометриялық орта мен 3D модельдеу платформаларын қолдану педагогикалық тұрғыдан тиімді, әрі оқу процесінің интербелсенділігін арттырады, оқушылардың кеңістікте ойлау қабілетін дамытады және математикалық білімнің сапасын көтеруге ықпал етеді. Бұл бағыттағы зерттеулер математикалық білім берудің маңызды аспектісі ретінде үнемі өзекті болады.

Кілтті сөздер: стереометрия, ақпараттық-коммуникациялық технологиялар, цифрлық білім беру ресурстары, үшөлшемді модельдеу, динамикалық геометрия, кеңістіктік ойлау, интерактивті оқыту, педагогикалық тиімділік, визуализация, GeoGebra, Cabri 3D, Tinkercad.

2020 Mathematics Subject Classification: 9711, 97K10, 97K50

ӘДЕБИЕТ

- [1] Қазақстан Республикасы Оқу-ағарту министрлігі. Орта білім берудің мемлекеттік жалпыға міндетті стандарты, Қазақстан Республикасы Оқу-ағарту министрлігі Publishing, Астана (2022).
- [2] Пидкасистый Павел Иванович. Педагогика, Юрайт (2018).
- [3] Чернышев Сергей Викторович. Развитие пространственного мышления школьников при обучении геометрии, Педагогическое образование и наука, (2018).
- [4] Yang Ying, Du W., Mavrikis M., Geraniou E. Spatial Skill Development Through Augmented Reality in Mathematics Education, (2025).
- [5] Қазақстан Республикасы. Білім туралы заңы, (2007).
- [6] De Oliveira Fabio Costa, Rodrigues da Silva R. The use of digital technologies in spatial geometry teaching, (2020).
- [7] Sperry Roger Wolcott. Hemisphere specialization and interhemispheric communication // Brain, (2005).
- [8] Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter. Introduction to GeoGebra. – Linz: International GeoGebra Institute, (2009).
- [9] Cabrillog. Cabri 3D User Guide, (2019).
- [10] Autodesk. Tincercad Official Guide for Educators, (2022).

ГЕНЕРАТИВНЫЙ ИИ В ОБУЧЕНИИ ПРОГРАММИРОВАНИЮ: ВОЗМОЖНОСТИ И РИСКИ С ПОЗИЦИИ ТЕОРИИ КОГНИТИВНОЙ НАГРУЗКИ

Н.К. АРКАБАЕВ¹, Г.С. АБДУГУЛОВА²

^{1,2}Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан

¹narkabaev@oshsu.kg, ²gabdugulova@oshsu.kg

Появление ChatGPT и подобных ему систем буквально перевернуло представление о том, как можно учить и учиться программированию. Сегодня почти каждый студент-программист обращается к ИИ-помощнику за подсказкой, объяснением или готовым фрагментом кода. Казалось бы, это должно упростить обучение и сделать его эффективнее. Но на практике всё оказывается сложнее. Одни исследования фиксируют рост успеваемости, другие не находят никакого эффекта, а третьи и вовсе предупреждают о рисках. Почему так происходит? Чтобы разобраться в этом противоречии, мы обратились к теории когнитивной нагрузки – концепции, которая помогает понять, что именно происходит в голове студента, когда он учится [1].

Суть теории в следующем: наша рабочая память ограничена, и при обучении важно, на что именно расходуются её ресурсы. Часть усилий неизбежно уходит на сам материал и это внутренняя нагрузка, её не обойти. Другая часть тратится впустую на плохо организованную подачу информации. Это тоже внешняя нагрузка, от неё лучше избавляться. А вот третьим типом является релевантная нагрузка, которая как раз таки и обеспечивает настоящее обучение. Суть релевантной нагрузки состоит в формировании понимания, выстраивании связей между понятиями, превращении разрозненных фактов в целостные знания. Проблема в том, что ИИ-помощники могут снимать все три типа нагрузки без разбора. К примеру, внешняя нагрузка – это когда новичок мучается с синтаксисом Python, забывая, где ставить двоеточие, а где скобки. В этом случае он отвлекается от главного — от понимания алгоритмов и логики программ. В таком случае ИИ действительно полезен [2].

По данным исследований, 87% разработчиков отмечают снижение умственного напряжения при использовании GitHub Copilot для рутинных задач [3]. Студенты меньше фрустрируются, чаще доводят задания до конца, получают мгновенную обратную связь вместо многочасового ожидания преподавателя.

Но есть и другая ситуация, например, студент сталкивается с задачей, которую вполне способен решить сам – пусть и с усилием, пусть и не с первой попытки. Вместо того чтобы

размышлять, он сразу спрашивает ChatGPT и получает готовый код. Задание сдано, оценка получена. Но научился ли он чему-то? Исследователь из Швейцарской бизнес-школы обнаружил пугающую корреляцию: чем чаще студенты пользуются ИИ, тем хуже у них развито критическое мышление ($r = -0,75$) [4]. Особенно уязвимыми являются первокурсники – им не хватает опыта, чтобы оценить, правильный ли код выдала машина. Они просто доверяют.

Интересный эксперимент провели в Техническом университете Мюнхена [5]. Сравнивали две группы: одна пользовалась ChatGPT, другая – специальной системой Iris, которая даёт подсказки, но не готовые решения. Был получен парадоксальный результат: обе группы справлялись с заданиями контрольной лучше, но на отложенном тесте, без доступа к ИИ, никакого преимущества не показали. Выходит, ИИ помогает сделать, но не помогает научиться. Это принципиальное различие, о котором стоит помнить.

В данном исследовании проведен анализ влияния генеративного искусственного интеллекта на обучение программированию через призму теории когнитивной нагрузки. Массовое внедрение таких инструментов, как ChatGPT, Claude, GitHub Copilot и других систем автоматической генерации кода, существенно изменяет образовательный ландшафт в области информатики.

На основе систематического обзора литературы 2022-2026 годов были выявлены как позитивные эффекты ИИ-ассистентов, так и потенциальные риски (когнитивная разгрузка, формирование зависимости, снижение релевантной нагрузки).

Генеративный ИИ помогает студентам, особенно новичкам, справляться с рутинными задачами программирования, такими как синтаксические и информационно-поисковые аспекты. Это эффективно снижает внешнюю когнитивную нагрузку что особенно ценно для начинающих студентов. Но здесь есть риск: если полностью полагаться на ИИ и делегировать ему всё, студенты рискуют не построить собственные схемы знаний. Эффект реверсии экспертизы предполагает, что оптимальные стратегии использования ИИ различаются для новичков и более опытных учащихся. Дизайн ИИ-системы, независимо от того, даёт ли она готовые решения или пошаговые подсказки, существенно влияет на когнитивные и мотивационные последствия.

Практическая значимость работы состоит в обосновании дифференцированного подхода к интеграции генеративного ИИ в учебный процесс. Преподавателям и разработчикам учебных программ рекомендуется следующее: чётко и явно разграничивать ситуации, в которых использование генеративного ИИ уместно, и те, где оно нежелательно или вредно; обучать студентов метакогнитивным навыкам. Они должны уметь: самостоятельно регулировать, когда и как использовать ИИ; адаптировать формы контроля знаний под новые условия. Старые методы проверки часто уже не работают эффективно. Теория когнитивной нагрузки даёт хорошую научную основу и помогает принимать обоснованные педагогические решения. Однако конкретные приёмы и практики нуждаются в проверке и доработке. Это следует делать с учётом особенностей каждого курса и локального образовательного контекста.

Финансирование: Данное исследование не получило конкретного гранта от какого-либо финансирующего агентства в государственном, коммерческом или некоммерческом секторах.

Ключевые слова: генеративный искусственный интеллект, обучение программированию, теория когнитивной нагрузки, ChatGPT, GitHub Copilot, когнитивная разгрузка, педагогический дизайн.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sweller, J., van Merriënboer, J.J.G. & Paas, F. Cognitive Architecture and Instructional Design: 20 Years Later, *Educational Psychology Review*, **31** (2019), 261–292.
- [2] Kalyuga, S. Expertise reversal effect and its implications for learner-tailored instruction, *Educational Psychology Review*, **19**:4 (2007), 509–539.
- [3] Ziegler, A., Kalliamvakou, E., Li, X. A., Rice, A., Rifkin, D., Simister, S., Sittampalam, G., & Aftandilian, E. Measuring GitHub Copilot’s impact on productivity, *Communications of the ACM*, **67**:3 (2024), 54–63.
- [4] Gerlich, M. AI Tools in Society: Impacts on Cognitive Offloading and the Future of Critical Thinking, *Societies*, **15**:1 (2025), 6.

[5] Bassner, P., Lenk-Ostendorf, B., Beinstingel, R., Wasner, T. & Krusche S. Less stress, better scores, same learning: The dissociation of performance and learning in AI-supported programming education, *Computers and Education: Artificial Intelligence*, **10** (2025), 100537.

МЕКТЕП МАТЕМАТИКА КУРСЫНАН ОЛИМПИАДАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІҢ МАЗМҰНЫ МЕН ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

А.А. АСИЛ¹, А.С. БЕККУЛ²

^{1,2}Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы қ., Қазақстан

¹abo_95.08@mail.ru, ²bekkulasylbek@gmail.com

Қазіргі математикалық білім беру жүйесінде олимпиадалар тек дарынды оқушыларды анықтау құралы емес, сонымен қатар тұлғаның интеллектуалдық әлеуетін қалыптастыратын күрделі педагогикалық процесс болып табылады. Оқушылардың олимпиадалық дайындығын сапалы ұйымдастыру үшін оқу құралдарын, озық педагогтардың іс-тәжірибесін және халықаралық жарыстардың есептер базасын жүйелі түрде саралау қажет. Осы тұрғыда жүргізілген кешенді зерттеулер олимпиадалық есептердің мазмұны мен шешу стратегияларын бірнеше іргелі бағыттар бойынша жіктеуге мүмкіндік береді.

1) олимпиадалық есептердің бірегейлігіне қарамастан, оларды математика бөлімдеріне сәйкес саралау – тиімді тәсілдердің бірі. Бұл жіктеме есептердің мазмұндық бағытын нақтылауға мүмкіндік береді: алгебра және арифметика; логика және жиындар теориясы; комбинаторика; геометрия; ықтималдық теориясы және математикалық статистика; математикалық анализ.

2) есептің мазмұнын, құрылымын және қойылатын талаптарын ескере отырып, олимпиадалық есептерді келесі топтарға бөлуге болады: бүтін сандардың бөлінгіштігі мен қалдықтары; логикалық мазмұндағы есептер; көпмүшелерді зерттеуге арналған есептер; дәлелдеу есептері (тепе-теңдіктер, тригонометриялық функциялар, теңсіздіктер); комбинаторикалық тапсырмалар; бүтін сандар жиынындағы теңдеулер мен олардың жүйелері, Диофант теңдеулері; сандық заңдылықтар, қатарлар және аналогиялар; функционалдық теңдеулер; параметрі бар теңдеулер мен теңсіздіктер; симметриялы теңдеулер және олардың жүйелері; геометриялық есептер.

3) олимпиадалық есептердің ерекшелігі олардың шешу әдістерінің әртүрлілігінде. Есептерді шешу барысында қолданылатын әдістер негізінде оларды төмендегідей топтастыруға болады:

— логикалық және эвристикалық әдістер: Дирихле принципі; инварианттар әдісі; жұптылық және қарама-қарсылық тәсілдері; бояу, кестелік және модельдеу әдістері; графтар тәсілдері; бейнелеу және визуализация әдістері.

— бағалау және төтенше мәндер қағидасы: ең аз және ең үлкен мәндерді іздеу; шеттік принцип; тиімді таңдау әдістері.

— математикалық индукция әдісі: көпмүшелерді зерттеу; формула және теоремаларды дәлелдеу; теңдіктер мен теңсіздіктерді дәлелдеу; бөлінгіштікке арналған есептер.

— рекурсия, итерация және аналогия әдістері: рекурренттік тізбектер; итерациялық тәсілдер; аналогияға негізделген шешу әдістері.

— комбинаторикалық әдістер: санау тәсілдері; комбинаторикалық геометрия элементтері.

— сандар теориясының әдістері: Евклид алгоритмі; сандарды үздіксіз бөлшектер түрінде кескіндеу; қалдықтар және модульдік теңдеулер; Ферма және Эйлер теоремаларын қолдану.

— салыстырулар теориясының әдістері: Диофант теңдеулерін шешу; бүтін сандардағы теңдеулер мен жүйелерді шешу.

— функционалдық және тригонометриялық алмастырулар.

— классикалық теңсіздіктерді қолдану әдістері: орта шамалар теңсіздіктері; Коши, Коши–Буняковский, Бернулли теңсіздіктері; реттеу (majorization) тәсілі; Чебышев, Йенсен және басқа классикалық теңсіздіктер.

— функция қасиеттеріне негізделген әдістер: монотондықты қолдану; функциялардың шектелгендігін пайдалану; модуль, дәрежелік және түбірлік функциялармен жұмыс істеу.

— векторлық әдістер: теңдеу, теңсіздік, тепе-теңдіктерді векторлар көмегімен шешу; экстремумдарды табу.

— геометриялық әдістер: гомотетия, инверсия, проективті және аффиндік түрлендірулер; центрлік симметрия; нүктелердің геометриялық орны; қосымша салулар және қосымша бұрыштар; көмекші шеңберлер; планиметрияның қосымша теоремалары; координаталар әдісі; геометриялық вектор әдісі. Ұсынылған жіктеме олимпиадалық есептердің мазмұндық ерекшеліктерін, олардың шешу тәсілдерінің көпқырлылығын және математикалық білім беру жүйесінде алатын орнын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл жүйелеу мектеп оқушыларын олимпиадалық есептерге дайындауда, әдістемелік материалдар әзірлеуде және оқу процесіне стандартты емес тапсырмаларды енгізуде маңызды теориялық және практикалық негіз бола алады. Олимпиадалық есептерді шығару бір жағынан оқушылардың жалпы мәдениетін және математикалық мәдениетін тереңдетуге, олардың логикалық, аналитикалық және шығармашылық ойлауын дамытуға мүмкіндік берсе, екінші жағынан, жаңа идеяларды іздеуге, бұрын зерттелмеген мәселелерді өз бетінше шешуге ұмтылысын күшейтеді. Мұндай есептерді шешу процесі оқушының логикалық қабілетін қалыптастырып, математикалық білімді жаңа жағдайларда қолдануға деген танымдық белсенділігін арттырады.

Кілтті сөздер: Мектеп математика курсы, математикалық олимпиада, олимпиадалық есептер, есептерді шешу әдістері.

ӘДЕБИЕТ

[1] Алтынбеков Ш.Е. Болашақ математика мұғалімдерінің зерттеушілік дағдыларын олимпиадалық есептерді шығару негізінде қалыптастыру әдістемесі: Философия докторы (PhD)

[2] Дрозина В.В. Механизм творчества решения нестандартных задач. Руководство для тех, кто хочет научиться решать нестандартные задачи: учебное, Бином, Москва (2008), 1-255.

[3] Василевский А.Б. Обучение решению задач по математике: монография, Вышэйшая школа, Минск (1988), 1-256.

ПОДГОТОВКА БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В РАМКАХ РЕАЛИЗАЦИИ 12-ЛЕТНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ В КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКЕ

А.Дж. АТТОКУРОВА¹, Д.Ч. КУЛТАЕВА²

^{1,2}Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан

¹anarkan.j@gmail.com, ²dkultaeva@oshsu.kg

В Кыргызской Республике переход на 12-летнее школьное образование был начат еще 2021 году, но из-за пандемии COVID-19 был приостановлен и возобновился в 2023 году. С 2025-2026 учебного года начался поэтапный переход на 12-летнее образование с целью модернизации программ обучения и учебного процесса в целом на соответствие международным стандартам [2].

Согласно Концепции перехода на 12-летнее школьное образование в Кыргызской Республике первая задача реформирования образования заключается в разработке новых образовательных стандартов всех уровней образования, внедрение и адаптация учебных планов и программ, основанных в том числе и на опыте успешных международных практик; разработка и внедрение национального компонента, основанного на социокультурных потребностях общества и государства [1].

В нынешних условиях остается актуальным вопрос готовности педагогических вузов к подготовке будущих учителей, реализующих 12-летнее общее образование. С этой целью нами проведено анкетирование преподавателей региональных вузов Кыргызстана. К исследованию

были привлечены 433 преподавателя вузов. Результаты анализа анкет показали, что большинство преподавателей считают, что переход на 12-летнее образование положительно влияет на успешность преподавания математики и информатики в вузе и основными проблемами отметили структуру и содержание учебных планов программ “Физико-математическое образование” (бакалавриат и магистратура), сложность учебного материала, отсутствие методического обеспечения, недостаточность базовых знаний у студентов и нехватку учебной и методической литературы. Эффективными методами в преподавании математики и информатики отмечены применение цифровых технологий, интерактивные методы, проектное обучение, симуляционные тренинги. В целом, в подготовке будущих учителей математики отметили нехватку методической, исследовательской, цифровой, предметной и коммуникативной компетентностей, что отрицательно влияют на качество 12-летнего школьного образования.

С окончательным переходом на новую систему школьного образования, сроки обучения в бакалавриате могут сократиться до 3-х лет, а магистратура до полтора года. Используя эту модель, можно решить ряд актуальных проблем, например, интеграцию дисциплин в направлении подготовки бакалавра или магистра, т.е. вузы будут готовить учителя, например, преподающего математику, физику и информатику или учителя биологии, химии и географии. И это постепенно приведет к разработке общих учебников по направлению подготовки, что решит проблему нехватки учителей на трудно доступных местах республики.

Финансирование: Данное исследование не получило конкретного гранта от какого-либо финансирующего агентства в государственном, коммерческом или некоммерческом секторах.

Ключевые слова: 12-летнее школьное образование, математика, будущий учитель математики, адаптация учебных планов и программ, анкетирование, применение цифровых технологий, интеграция дисциплин.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Концепция перехода на двенадцатилетнее школьное образование в Кыргызской Республике (В редакции постановления Кабинета Министров КР от 30 мая 2025 года № 298) <https://cbd.minjust.gov.kg/29-2/edition/20119/ru>
- [2] <https://edu.gov.kg/posts/3919/>

МЕТОДИКА РАЗВИТИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНЦИИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

М БАРАКАЕВ¹, Х.Х. УРИНОВ²

¹УзНПУ им. Низами, Ташкент, Узбекистан

²Ферганского государственного университета, Фергана, Узбекистан

¹murodmat1958@gmail.com, ²urinovxalimjon@gmail.com

«Методика развития профессиональных компетенций у будущих учителей математики» разработана методика формирования профессиональных компетенций на основе компетентностного подхода. Автором предложены пять типов компетентностных задач: обеспечивающие межпредметные связи, междисциплинарные связи, профессионально-ориентированные, задачи с практическим содержанием и задачи, обеспечивающие связь теории с практикой. Подробно описана методика формирования профессиональных компетенций у студентов через решение данных задач. Также обоснована предлагаемая методическая модель и её структурные компоненты (состав профессиональных компетенций, этапы формирования, педагогические условия, научно-методическое обеспечение, критерии и уровневые показатели). В рамках модели выделены преимущества организации учебного процесса на основе компетентностного подхода.

ТРИГОНОМЕТРИЯНЫ ҚҰЗЫРЕТТІЛІКKE БАҒЫТТАП ОҚЫТУ: ОҚУ НӘТИЖЕЛЕРІНЕ ӘСЕРІ

А.Б. БОЛАТ

Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Қызылорда, Қазақстан
aruzhanbolat03@mail.ru

Бұл жұмыста мектеп математикасының қиын тақырыптарының бірі – тригонометрия тақырыптарын сапалы оқытудың тиімді тәсілдері қарастырылады. Басты мақсатымыз – құзыреттілікке негізделген тапсырмалар арқылы оқушылардың математика пәнінен білім сапасын арттыру болып табылады. Осы тапсырмалар көмегімен оқу үдерісінде кездесетін кедергілерді жою. Зерттеу нәтижесінде оқытудың практикалық маңыздылығы мен оқушылардың танымдық белсенділігі арасындағы байланыстар теориялық тұрғыда негізделеді.

Мемлекет басшысы Қасым-Жомарт Кемелұлы Тоқаевтың «Білім келешегі: адал азамат, кәсіби маман» тақырыбындағы тамыз конференциясының пленарлық отырысында «Қазір – білім мен ғылымның заманы. Жаһандану дәуірінде озық білімді игерген, жаңа технологияны меңгерген елдің ұпайы түгел болады. Бүгін саналы ұрпақ тәрбиелей алсақ, ертең заман көшнінің басында жүреміз» [1] деп айтып өткен сөзінің маңызы зор. Білім беру саласында тек білімдер жүйесін беріп қана қоймай, оқушының құзыреттілігін қалыптастыру өте маңызды екені анықталады. Қазіргі білім беру жүйесінің басты мақсаттарының бірі – оқушылардың мектепте алған теориялық білімдерін өмірлік жағдайларда қолдана білу қабілетін қалыптастыру. Бұл бағыт математиканың тригонометрия бөлімдерін оқыту барысында өте маңызды болып табылады. Көптеген жағдайларда оқу үдерісінде оқушылар тригонометриялық формулаларды жаттап алады, бірақ оның өмірлік жағдайлардағы қолданысын түсінбейді. Осындай қарама-қайшылықтарды шешу үшін құзыреттілікке негізделген оқыту тәсілдерін оқыту үдерісіне енгізу маңызды. Бұл математикалық білім берудің деңгейін көтеру үшін және оқушылардың функционалдық сауаттылығын арттыра отырып, жаңа әдістемелік құралдарды жүйелеу қажеттілігінен туындайды [2]. Тригонометрияны оқыту үдерісінде құзыреттілікке бағытталған тапсырмалар жүйесін қолданудың тиімділігін теориялық тұрғыда дәлелдеу және оқу нәтижелеріне әсерін айқындауға басымдылық беріп отырмыз.

Себебі, құзыреттілікке бағытталған оқыту тәсілі – оқушының дайын білімді қабылдап қана қоймай, оны өмірлік жағдайда қолдана білу қабілетін қалыптастыруға бағытталған тәсіл [3]. Зерттеу жұмысы барысында тригонометрия тақырыптарын осы тәсіл негізінде оқытудың келесідей маңызды аспектілері анықталды:

1. Математикалық модельдеу және өмірмен байланыстылығы. Оқушы тригонометриялық функцияларды жай ғана сызба емес, табиғаттағы және техникадағы үдерістердің моделі ретінде түсінуі керек. Егер тригонометриялық есептер құрылыстағы және физикадағы нақты жағдайлармен байланыстырыла түсіндірілсе, оқушылар тақырыпты жеңіл түсінеді.

2. Психологиялық кедергілерді жою. Құзыреттілікке негізделген оқыту тәсілі оқушының өз тәжірибесімен ұштастыра отырып, оқу кедергілерін жоюына көмектеседі. Оқушы тақырыптың не үшін керек екенін түсінгенде, өзіне деген сенімділігі артады. Күрделі есептерді шығаруға деген қызығушылығы артады.

3. Логикалық ойлау қабілетінің дамуы. Құзыреттілікке негізделген оқыту тапсырмалары оқушыны дайын алгоритмдер жүйесімен емес, өз бегінше ойланып шығаруға жетелейді. Бұл тәсіл оқушының сыни ойлау қабілетін дамытады. Алдағы уақытта оқушы өз білімін кез-келген өмірлік жағдайларда еркін қолдануға дағдыланады.

Құзыреттілікке негізделген оқыту тәсілінің дәстүрлі оқыту жүйесінен басты ерекшелігі – оқушы теориялық білімді алып қана қоймай, оны өмірлік жағдайларда қолдануды үйренеді [4]. Білімді дайын күйінде қабылдаушыдан белсенді зерттеушіге айналады. Осы әрекеттер негізінде тригонометриялық ұғымдардың мазмұны тереңдеп, білімнің іргетасы нығайа түседі.

Жүргізілген зерттеу жұмысындағы теориялық талдау тригонометрияны құзыреттілікке негізделген оқыту тәсілдері білім сапасын арттыруда өте жақсы нәтиже көрсететіні анықтал-

ды. Бұл әдістеме оқушының танымдық қабілеттерін ашып, заманауи талаптарға сай функционалды сауатты тұлға болып қалыптасуына мүмкіндік береді. Болашақта осы модель бойынша нақты дидактикалық материалдар кешенін әзірлеу жоспарлануда.

Кілтті сөздер: құзыреттілікке негізделген оқыту, тригонометрия, оқу нәтижелері, математикалық сауаттылық, функционалдық құзыреттіліктер.

2020 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97D40, 97D50

ӘДЕБИЕТ

[1] Тоқаев Қ-Ж.К. «Білім келешегі: адал азамат, кәсіби маман», 02025 тамыз конференциясының пленарлық отырысы, Астана (2025).

[2] Әбілқасымов А.Е. *Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық-әдістемелік негіздері.*, Оқу құралы, Алматы: Мектеп, 2014. - 224 бет.

[3] LastName1 N1.S1. *Assessment of mathematics teachers' professional competence*, Journal on Mathematics Education, Saint Petersburg (2020).

[4] Boaler, J. *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*, Research in Mathematics Education, San Francisco: Jossey-Bass, 2016. – 320 p.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ КАК ИНСТРУМЕНТ МОДЕРНИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А.А. ДАРИБАЕВ

КазАТИУ им. С. Сейфуллина, Астана, Казахстан

alibekdaribayev4@gmail.com

В условиях стремительной цифровой трансформации общества и активного развития технологий искусственного интеллекта происходит существенное переосмысление традиционных методов обучения математике. Данная статья посвящена анализу ключевых вызовов и педагогических моделей, связанных с внедрением ИИ в школьное и университетское математическое образование. Рассматриваются адаптивные системы (ALEKS), платформы автоматизации проверки (Gradescope) и системы символьных вычислений (WolframAlpha). Показано, что интеграция ИИ способствует персонализации образовательных траекторий, формированию исследовательских компетенций и реализации принципа индивидуализации обучения.

В условиях стремительной цифровой трансформации общества и активного развития технологий искусственного интеллекта (ИИ) происходит существенное переосмысление традиционных методов обучения математике в школе и вузе. Современные образовательные модели ориентируются на интеграцию цифровых инструментов, адаптивных платформ и интеллектуальных систем сопровождения обучения.

На основе изучения существующих образовательных решений показано, что использование ИИ способствует качественному совершенствованию учебного процесса. В школьной практике применяются адаптивные системы, такие как ALEKS (McGraw Hill), позволяющие диагностировать уровень подготовки учащихся. Платформа Gradescope автоматизирует проверку математических работ с использованием технологий компьютерного зрения, снижая нагрузку на преподавателя.

В университетском образовании активно используются системы символьных вычислений, такие как WolframAlpha и Wolfram Mathematica, обеспечивающие решение уравнений вида:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

Для ссылки на уравнение (1) используются стандартные средства L^AT_EX. Кроме того, внедряются виртуальные ИИ-помощники на базе больших языковых моделей, выступающие в роли «виртуального тьютора».

Предложение 1. *Интеграция ИИ в процесс обучения математике не только упрощает освоение материала, но и создает условия для формирования исследовательских компетенций и развития критического мышления.*

Ключевые слова: цифровая трансформация, искусственный интеллект в образовании, обучение математике, адаптивное обучение, интеллектуальные тьюторские системы, символьные вычисления.

2020 Mathematics Subject Classification: 97Q60, 97Q70

ЛИТЕРАТУРА

[1] Luckin R., Holmes W. *Intelligence Unleashed: An argument for AI in Education*, Pearson, London (2016).

[2] Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Pearson, 4th Edition (2020), 1166 p.

ГЕОГЕБРА КАК ИНСТРУМЕНТ ВИЗУАЛИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Ж.К. ДАРМАНОВА¹, А.Р. КАБУЛОВА², Ж.М. НУРМУХАМЕДОВА³

^{1,2,3} КазНПУ имени Абая, Алматы, Казахстан

¹dzhadrasyn@mail.ru, ²anara_rahm@mail.ru, ³nurm_zhanna@mail.ru

Аннотация Понятие функции является одним из ключевых и в то же время трудных для усвоения элементов школьного курса математики, поскольку требует перехода к абстрактному мышлению. В казахстанской системе образования изучение функций осуществляется поэтапно в 7–11 классах и играет фундаментальную роль в освоении последующих разделов, включая производную и интеграл. Несмотря на значимость данной темы, практика показывает, что использование цифровых технологий на уроках математики носит фрагментарный характер и ограничивается преимущественно функцией наглядности. Использование образовательных технологий в процессе обучения должно выходить за рамки простой замены традиционной работы с бумагой и карандашом технологическими продуктами [1]. В работе рассматривается потенциал динамической математической среды GeoGebra как эффективного дидактического инструмента обучения функциям. Показано, что использование GeoGebra обеспечивает интеграцию различных форм представления математических объектов, способствует визуализации абстрактных понятий и снижению когнитивной нагрузки учащихся. Особое внимание уделяется возможностям организации исследовательской деятельности обучающихся через виртуальные эксперименты и моделирование. Предполагается, что системное применение GeoGebra в обучении функциям способствует развитию аналитического мышления, математической интуиции и повышению качества усвоения учебного материала.

Современные цифровые образовательные среды рассматриваются не только как технические средства, но и как дидактические инструменты, оказывающие влияние на характер учебной деятельности и результаты обучения [2]. В этом контексте особое место занимает динамическая математическая среда GeoGebra, широко применяемая в практике обучения математике на различных уровнях образования. GeoGebra представляет собой интерактивную среду, объединяющую алгебраические, геометрические, графические и табличные способы представления математических объектов. Возможность одновременной работы с несколькими формами представления информации соответствует современным дидактическим подходам и способствует формированию целостного понимания математических понятий [3]. В отличие от традиционных статических средств обучения GeoGebra позволяет учащимся наблюдать динамические изменения математических объектов, устанавливать зависимости между параметрами и результатами преобразований, что повышает осмысленность изучаемого материала [4].

С дидактической точки зрения GeoGebra обладает значительным потенциалом для визуализации абстрактных математических понятий. Использование динамических моделей способствует снижению когнитивной нагрузки учащихся и облегчает усвоение сложных понятий за счёт интеграции визуального и аналитического каналов восприятия информации [5]. Это, в свою очередь, положительно влияет на сохранение знаний в долговременной памяти [6]. Важной функцией GeoGebra является поддержка исследовательской деятельности учащихся. Среда позволяет организовывать виртуальные эксперименты, в ходе которых обучающиеся могут изменять параметры функций, наблюдать за поведением графиков, формулировать предположения и проверять их на практике. Такой подход способствует развитию логического мышления, математической интуиции и познавательной самостоятельности учащихся [4]. GeoGebra также предоставляет широкие возможности для организации различных форм учебной деятельности. В условиях фронтальной работы среда может использоваться как средство наглядной демонстрации и коллективного обсуждения. Работа в парах и малых группах способствует развитию совместной познавательной деятельности, тогда как индивидуальная работа с цифровыми моделями позволяет учитывать темп обучения и уровень подготовки учащихся, что особенно важно для формирования устойчивых знаний и предупреждения пробелов [7].

Методы исследования В ходе исследования использовались анализ научно-методической и психолого-педагогической литературы, обобщение педагогического опыта, педагогическое наблюдение за учебной деятельностью учащихся, а также сравнительный анализ результатов учебной деятельности. Педагогическое наблюдение проводилось в процессе изучения темы «Функции» в 7–10 классах общеобразовательной школы. Наблюдение было направлено на выявление особенностей учебной активности учащихся, характера их познавательной деятельности, степени вовлечённости в учебный процесс и устойчивости усвоения изученного материала при использовании динамической математической среды GeoGebra. В ходе наблюдения анализировались активность учащихся на этапах объяснения нового материала и его закрепления, характер работы с графиками функций, способность устанавливать зависимости между параметрами функций и графическими изменениями, проявление познавательной инициативы и самостоятельности, а также сохранение знаний при выполнении заданий на повторение спустя определённый промежуток времени. Результаты педагогического наблюдения показали, что использование GeoGebra способствует повышению учебной активности учащихся, более осмысленному восприятию графического материала и лучшему сохранению изученных математических понятий по сравнению с традиционным объяснительно-иллюстративным подходом.

Заключение. Таким образом, дидактический потенциал динамической математической среды GeoGebra заключается в возможности интеграции визуализации, моделирования и исследовательской деятельности учащихся в единый образовательный процесс. Методически обоснованное использование GeoGebra способствует повышению познавательной активности обучающихся, формированию осмысленных и устойчивых знаний и созданию условий для повышения сохранения знаний учащихся по математике. Аннотация есть, напиши тезис к аннотации со ссылками

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97M10, 97C30

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Darmanova, Z., Abylkassymova, A., Nurmukhamedova, Z. A systematic review of technology use in middle and high school mathematics education: insights from contextual, methodological, and evaluation characteristics., In *Frontiers in Education*, (2025).
- [2] Kuznetsov A.A. Digital educational environment: theory and practice, *Prosveshchenie*, 1:2 (2019)
- [3] Polyakova T.A. Information and communication technologies in teaching mathematics: didactic aspect., *Pedagogika*, 1:2 (2018), 42-45
- [4] Hohenwarter M., Fuchs K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in

the software system GeoGebra, Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching, , (2004)

[5] Mayer R.E. Multimedia Learning, *Cambridge University Press*, 1:2 (2009)

[6] Lindenbauer E., Infanger E.M., Lavicza Z. Enhancing mathematics education through collaborative digital material design: Lessons from a national project, *European Journal of Science and Mathematics Education, Journal*, 1:2 (2024), 276–296.

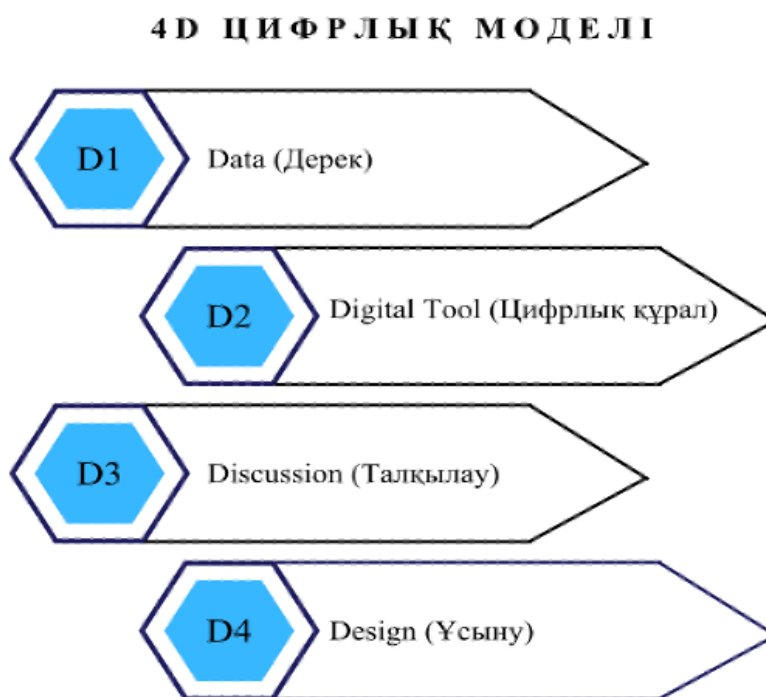
ОРТА МЕКТЕПТЕГІ МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДА БІЛІМ АЛУШЫЛАРДЫҢ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ САУАТТЫЛЫҒЫН ДАМУҒА АРНАЛҒАН 4D ЦИФРЛЫҚ МОДЕЛІ

С.М. ДОСМАХАНБЕТ

¹Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

sdm_2004@bk.ru

Қазіргі білім беру жүйесінде математиканы оқыту тек теориялық білімді меңгерумен шектелмей, білім алушылардың алған білімін практикалық жағдайларда қолдану қабілеттерін дамыту мәселелері қарастырылуда. Осы тұрғыдан алғанда функционалдық сауаттылықты, оның ішінде математикалық және цифрлық сауаттылықтарын қалыптастыру өзекті болып табылады. Білім алушылардың осы сауаттылықтарды қалыптастыруда математикалық есептерді шығарудың бір тәсілі цифрлық ресурстар мен цифрлық құрылғыларды қолдануды айтуға болады. Сондай тәсілдердің бірі болып табылатын 4D цифрлық моделін қарастырайық (1-сурет).



Сурет 1: 4D цифрлық моделі

Қазақстан Республикасында жасанды интеллект технологияларын дамыту тұжырымдамасында білім беру жүйесіне заманауи цифрлық технологияларды енгізу және білім алушылардың цифрлық құзыреттерін қалыптастыру маңызды бағыттардың бірі ретінде көрсетілген [1]. Сонымен қатар орта білім беру жүйесінде жасанды интеллектті қолдану бойынша әдістемелік ұсынымдарда цифрлық құралдарды пайдалану оқу процесінің тиімділігін арттыруға

және білім алушылардың оқу әрекетін жекелеңдіруге мүмкіндік беретіні атап өтіледі [2]. Бұл жағдай математиканы оқытуда цифрлық технологияларды қолданудың маңыздылығын арттырып, білім алушылардың функционалдық және цифрлық сауаттылығын дамытуға жаңа мүмкіндіктер ашады.

D1 – Data (Дерек): Оқу тапсырмасының мазмұнын талдау арқылы бастапқы ақпаратты айқындауды қамтиды. Бұл кезеңде білім алушылар берілген деректерді анықтап, оларды жүйелейді және есептің математикалық негізін түсінеді.

D2 – Digital Tool (Цифрлық құрал): Тапсырманы орындау барысында цифрлық технологияларды қолдануды көздейді. Цифрлық құралдар математикалық процестерді визуализациялауға, деректерді өңдеуге және нәтижелерді тексеруге мүмкіндік береді.

D3 – Discussion (Талқылау): Білім алушылар алынған нәтижелерді талдап, өз шешімдерін негіздейді. Әртүрлі шешу тәсілдері салыстырылады.

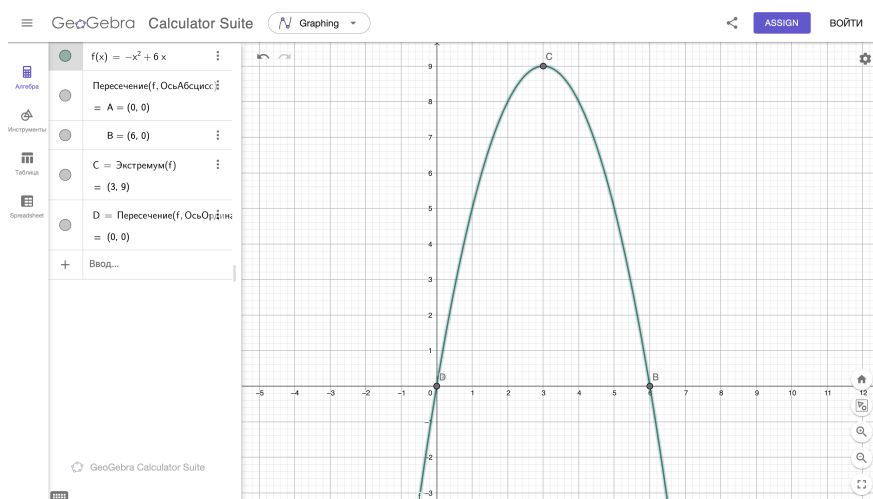
D4 – Design (Ұсыну): Оқу әрекетінің нәтижесін құрылымдап, оны цифрлық форматта ұсынуды қамтиды.

Мысал 1. $y = -x^2 + 6x$ функциясы берілген. Функцияның графигін салыңдар, нөлдерін анықтаңдар, ең үлкен мәнін табыңдар.

Шешуі.

D1 – Data. Функция квадраттық, коэффициенттері $a = -1$, $b = 6$, $c = 0$.

D2 – Digital Tool. GeoGebra немесе Desmos арқылы график салынады.



Сурет 2: $y = -x^2 + 6x$ функциясының графигі

D3 – Discussion.

$$y = -x^2 + 6x$$

$$x(-x + 6) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 6$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3, \quad y(3) = 9$$

Төбе: (3; 9), максимум: 9.

D4 – Design.

Графикте негізгі нүктелер белгіленіп, визуалды түсіндірме жасалады.

Қорытынды 2. *4D цифрлық модель математикалық есептерді цифрлық ортада тиімді зерттеуге мүмкіндік береді және білім алушылардың функционалдық және цифрлық сауаттылығын дамытуға ықпал етеді.*

Кілтті сөздер: функционалдық сауаттылық, математиканы оқыту, цифрлық құралдар, жасанды интеллект, 4D моделі.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Қазақстан Республикасында жасанды интеллект технологияларын дамыту тұжырымдамасы. – Астана, 2024.
- [2] Орта білім беру жүйесінде жасанды интеллектті қолдану бойынша әдістемелік ұсынымдар. – Астана: Ы. Алтынсарин атындағы Ұлттық білім академиясы, 2024. – 290 б.

ОҚУШЫЛАРДЫҢ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ САУАТТЫЛЫҒЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ ҮШІН АКТ КӨМЕГІМЕН КОНТЕКСТІК МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ВИЗУАЛИЗАЦИЯЛАУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК НЕГІЗДЕРІ

М.Ж. ДОЩАНОВА

¹Ш. Уәлиханов атындағы Көкшетау университеті, Көкшетау, Қазақстан
doshchanovamilana@gmail.com

Қазіргі қоғамның қарқынды дамуы, цифрландыру үдерісінің жеделдеуі және ақпарат көлемінің артуы білім беру жүйесіне жаңа талаптар қойып отыр. Білім алушылардан теориялық біліммен қатар оны нақты өмірлік жағдаяттарда қолдана алу қабілеті талап етіледі. Осыған байланысты оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастыру білім берудің негізгі стратегиялық бағыттарының біріне айналып отыр [1].

Функционалдық сауаттылық тұлғаның білімін күнделікті өмірде тиімді пайдалануымен, ақпаратты талдау, шешім қабылдау және проблемаларды шешу қабілеттерімен сипатталады [2]. Бұл бағыт Қазақстан Республикасының білім беру саясатында да басымдыққа ие және халықаралық білім сапасын бағалау талаптарымен байланысты [3].

Халықаралық PISA зерттеулері оқушылардың математикалық білімді практикалық жағдаяттарда қолдануда қиындықтарға тап болатынын көрсетеді [4]. Бұл математика пәнін оқыту әдістемесін жетілдіру қажеттігін дәлелдейді.

Функционалдық сауаттылықты қалыптастыруда математика пәні маңызды рөл атқарады, алайда білімнің көбіне абстрактілі түрде берілуі оның өмірмен байланысын әлсіретеді [5]. Осы мәселені шешудің тиімді жолдарының бірі – контекстік математикалық есептерді қолдану. Олар нақты өмірлік жағдайларға негізделіп, оқушылардың практикалық дағдыларын дамытады.

Контекстік есептерді тиімді меңгерту үшін ақпараттық-коммуникациялық технологияларды (АКТ) қолдану ерекше мәнге ие. АКТ көмегімен есептерді визуализациялау (графиктер, диаграммалар, анимациялар, интерактивті модельдер) оқу материалын түсінуді жеңілдетіп, оқушылардың танымдық белсенділігін арттырады.

Зерттеулер көрсеткендей, мультимедиялық және интерактивті визуализация оқу сапасын арттырып, оқушылардың мотивациясын күшейтеді. Сонымен қатар АКТ қолдану оқыту процесін жекелендіруге және білім нәтижелілігін арттыруға мүмкіндік береді.

Осыған байланысты АКТ көмегімен контекстік математикалық есептерді визуализациялау арқылы оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастыру мәселесі қазіргі білім беру жүйесінде өзекті болып табылады.

Зерттеудің ғылыми болжамы: Егер математика пәнін оқыту барысында АКТ көмегімен контекстік есептерді визуализациялауға негізделген әдістеме жүйелі қолданылса, онда оқушылардың функционалдық сауаттылығы артады.

Зерттеу міндеттері:

- оқушылардың функционалдық сауаттылығын дамытудың теориялық негіздерін анықтау;
- математикада контекстік есептерді қолданудың маңызын айқындау;
- АКТ құралдары арқылы визуализациялау әдістемесін әзірлеу;
- ұсынылған әдістеменің тиімділігін эксперименттік тұрғыдан тексеру.

Қорытынды. АКТ көмегімен контекстік математикалық есептерді визуализациялау оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастырудың тиімді құралы болып табылады. Бұл тәсіл математикалық білімді өмірмен байланыстыруға, оқушылардың қызығушылығын арттыруға және оқу процесінің сапасын жақсартуға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Николина В. В. Развитие функциональной грамотности обучающихся в образовательном процессе // Нижегородское образование. – 2021. – № 1. – С. 4–13.
- [2] Подлипский О. К. Функциональная грамотность как направление развития математического образования в школе // Мир науки, культуры, образования. – 2020. – № 2 (81). – С. 45–48.
- [3] OECD. PISA 2022 Mathematics Framework. – Paris: OECD Publishing, 2022. – 204 p.
- [4] OECD. PISA 2022 Results. Volume I: Student Performance in Mathematics, Reading and Science. – Paris: OECD Publishing, 2023. – 482 p.
- [5] Алексеева Е. Е. Методика формирования функциональной грамотности учащихся в обучении математике // Проблемы современного педагогического образования. – 2020. – № 66-2. – С. 10–15.

МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУДЕ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІ ҚОЛДАНУ АРҚЫЛЫ БОЛАШАҚ МҰҒАЛІМДЕРДІҢ КРЕАТИВТІ ОЙЛАУЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Г.М. ЕНСЕБАЕВА¹, Б.Ө. НАҒИ²

^{1,2}Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Қызылорда қаласы, Қазақстан

¹gulzat-y83@list.ru, ²balausa.nagi@mail.ru

Қазіргі қоғамның цифрлық трансформациясы білім беру жүйесіне елеулі өзгерістер енгізуде. Әсіресе математикалық білім беру саласында жасанды интеллект (ЖИ) технологияларын тиімді қолдану болашақ мұғалімдерді даярлаудың маңызды бағытына айналып отыр [1-2]. ХХІ ғасыр мұғалімі пәндік біліммен қатар, шығармашылық ойлайтын, инновациялық шешім қабылдайтын және цифрлық ортада еркін әрекет ететін тұлға болуы тиіс [3]. Осы тұрғыдан алғанда, болашақ математика мұғалімдерінің креативті ойлауын дамыту өзекті мәселе болып табылады.

Математикада қолданылатын ЖИ құралдары Symbolab, Wolfram Alpha, Mathway, ChatGPT, Desmos, Gemini, т.б. білім беру үдерісін дараландыруға, оқу материалын бейімдеуге және білім алушылардың танымдық белсенділігін арттыруға мүмкіндік береді. Олар деректерді алу, ақпаратты түсіну, ақпаратты талдау, шығармашылық ойлауды, біліктілікті арттыруды қалыптастыруға көмектеседі [4].

Зерттеу материалдары мен әдістері. ЖИ және цифрлық платформаларды қолдану арқылы студенттердің параметрлі функцияларды зерттеу дағдыларын қалыптастыру және олардың креативті ойлау деңгейін дамыту. «Математика» мамандығының 3-курс студенттеріне «ЖИ платформаларының болашақ мұғалімдердің креативті ойлауына әсерін анықтау» тақырыбында параметрлік функцияларды зерттеуге тапсырмалар берілді. Студенттер топқа берілген функцияларды ЖИ құралдары көмегімен зерттеуі қажет.

Тапсырма 1. ChatGPT ЖИ құралында 1-топқа $y = a(x-b)^2 + c$ функциясының стандартты түрін зерттеу. Мұнда мәндері берілген $a = 1, b = 2, c = 1$.

Студенттер $y = (x-2)^2 + 1$ функцияның a, b және c параметрлеріндегі параболаның төбесін және бағытын анықтайды. Нәтижесінде графиктің $y = x^2$ параболасынан параллель көшіру арқылы алынатынын дәлелдейді.

Тапсырма 2. Desmos платформасында 2-топқа $y = ax^2 + bx + c$ функциясын зерттеу ұсынылды. Мұнда $a = 2, b = 4, c = 1$ мәндері берілген. Функцияның a, b және c параметрлеріндегі параболаның төбесін және бағытын анықтайды.

Тапсырма 3. GeoGebra платформасында 3-топқа $y = a(x-b)(x-c)$ түріндегі функция берілді. Мұнда $a = -2, b = -1, c = 3$ мәндері берілген.

Студенттер функцияның төбесін және бағытын анықтайды. Формула мен график арасындағы байланысын графиктік түрде жылдам бақылап, зерттей алады.

Тапсырма 4. Gemini ЖИ арқылы 4-топқа $y = a|x+b| + c$ модульдік функциясын зерттеу тапсырылды. Мұнда $a = 2, b = -1, c = 3$ мәндері берілген. Студенттер $y = 2|x-1| + 3$ функциясының графиктерін жылдам сызып, зерттеуді орындайды.

Ұсынылған тәсіл алгоритмдік әрекеттермен шектелмей, студенттердің математикалық модельдеуді шығармашылық және зерттеушілік тұрғыда талдау дағдыларын қалыптастыруға негізделген.

Тәжірибе нәтижесінде әр платформа математикалық модельдеудің түрлі аспектілерін ашуға мүмкіндік беретіні дәлелденді. ЖИ және цифрлық құралдарды мақсатты қолдану студенттердің зерттеушілік белсенділігін арттырып, параметрлі функцияларды шығармашылық тұрғыда талдау дағдыларын дамытуға ықпал етті.

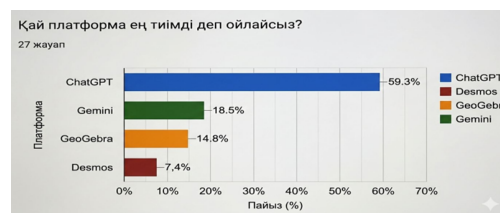
Нәтиже мен талқылау. Зерттеудің эмпирикалық бөлімі жоғары оқу орнының «Математика» (болашақ мұғалімдер) білім беру бағдарламасының 3-курс студенттері арасында жүргізілді. Студенттер ЖИ құралдарын қолдана отырып, түрлі математикалық тапсырмалар орындады.

Тәжірибелік-эксперименттік жұмыс соңында 27 студентке сауалнама жүргізілді. Нәтижелер ЖИ платформаларын қолданудың оқу тиімділігі мен креативті ойлауға оң әсерін көрсетті.

Кесте 1: ЖИ және цифрлық платформалардың салыстырмалы тиімділігі

Платформа	Қолданғандар (%)	Математикалық түсінуге әсері	Креативті ойлауға әсері
ChatGPT	44,4%	83,3%	Стандартты емес шешім ұсынуға ықпал етті
Gemini	18,6%	100%	Логикалық және графикалық сипаттау арқылы шығармашылықты арттырды
Desmos	18,5%	90% динамикалық байланыс тиімді	Параметр өзгерту арқылы зерттеушілік дағды дамыды
GeoGebra	18,5%	90% график пен формула байланысы	Эксперимент жасауға мүмкіндік берді

Зерттеуге қатысқан 27 студенттің «Қай платформа ең тиімді?» деген сұраққа берген жауаптарының пайыздық көрсеткіштері бейнеленген (1-сурет). Бұл деректер студенттердің көбісі мәгіндік талдау мен алгоритмдік түсіндіру мүмкіндігі жоғары платформаларды тиімді деп бағалайтынын көрсетеді.



Сурет 1 – Студенттердің ең тиімді платформа бойынша таңдауының нәтижелері

Қорытынды. Жүргізілген зерттеу математикалық білім беруде жасанды интеллект технологияларын мақсатты және жүйелі қолдану болашақ математика мұғалімдерінің креативті ойлауын қалыптастыруда тиімді құрал екенін көрсетті. ChatGPT, GeoGebra, Desmos және Gemini платформаларын интеграциялау студенттердің параметрлі функцияларды терең түсінуіне, математикалық заңдылықтарды визуалды модельдеуіне және болжам жасау дағдыларын дамытуына ықпал етті.

Сауалнама нәтижелері ЖИ құралдарының оқу мотивациясын арттырып, зерттеушілік белсенділік пен шығармашылық еркіндікті күшейткенін дәлелдеді. Осылайша, жасанды интеллектті математиканы оқытуда енгізу болашақ мұғалімдердің кәсіби, цифрлық және креативті құзыреттілігін дамытудың тиімді бағыты болып табылады.

Кілтті сөздер: жасанды интеллект, математиканы оқыту, креативті ойлау, параметрлі функциялар, цифрлық платформалар.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97U70, 97C80

ӘДЕБИЕТ

- [1] Бутенко А.В., Ходос Е.А. *Критическое мышление: метод, теория, практика*, Учеб.-метод. пособие, М.: Мирос, 2002.- 126 с.
- [2] Қыдырова С. Р. *Студенттердің шығармашылық ойлауын дамытудың психологиялық-педагогикалық шарттары*, (Докторлық диссертация), Алматы. 2021. – 108 с.
- [3] Ерназарова Ж.Е., Идиев Р.Т., Кабылбеков Н.М. *Болашақ педагогтардың креативті ойлауын кәсіби даярлық үдерісінде цифрлық симуляциялар арқылы дамыту*, 2025. – 100 с.
- [4] Дэвис А.Р. Socratic, Wolfram Alpha және Mathway: ЖИ-негізделген математика көмекші құралдарының салыстырмалы зерттеуі, Цифрлық оқыту журналы, - 2019. – № 11(3). – 204-220 бб.

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ КӨМЕГІМЕН ОҚУШЫЛАРДЫҢ АБСТРАКТІЛІ ОЙЛАУ ҚАБІЛЕТТЕРІН ҚАЛЫПТАСТЫРУ ӘДІСТЕМЕСІ.

С.Х. ЕРГЕШБАЕВ

¹Қ.А.Яссауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан,
Қазақстан
surazhiddin@mail.com

Бұл мақалада жасанды интеллект (ЖИ) технологияларын қолдану арқылы оқушылардың абстрактілі ойлау қабілеттерін дамыту мәселесі қарастырылады. Зерттеу нысаны ретінде ЖИ-дің оқу процесіне енгізілуі, тапсырмалардың бейімделуі және оқушының ойлау әрекетін талдау мүмкіндіктері алынған. Абстракциялау, жалпылау, логикалық байланыс орнату сияқты когнитивтік операциялардың қалыптасуына ЖИ құралдарының ықпалы ғылыми тұрғыдан талданды. Сонымен қатар абстрактілі ойлауды дамытатын есеп беріліп, оның ЖИ көмегімен орындалу қадамдары көрсетілді. Зерттеу нәтижесінде ЖИ негізіндегі оқыту ортасы оқушының ойлау құрылымын терең түсінуге, күрделі ұғымдарды модельдеуге және аналитикалық қабілеттерін арттыруға жағдай жасайтыны анықталды.

Абстрактілі ойлауды қалыптастырудың теориялық негіздері. Абстрактілі ойлау — объектілердің тек маңызды қасиеттерін бөліп алып, оларды жалпылауға негізделген күрделі когнитивтік процесс. Мектеп оқушылары үшін бұл қабілет функцияларды модельдеу, логикалық байланыстарды іздеу, көпсатылы есептерді талдау сияқты тапсырмалар арқылы дамиды. ЖИ мұндай процестерді автоматтандыруға емес, керісінше, оқушының ойлау әрекетін көрінетін, талданатын, бағаланатын етіп ұсынуға мүмкіндік береді.

ЖИ жүйелері оқушы енгізген жауаптарды талдап, оның абстракция деңгейін бағаламайды, сонымен бірге келесі тапсырманы соған сәйкес бейімдейді. Бұл динамикалық кері байланыс оқыту сапасын арттырып, жеке білім траекториясын қалыптастырады.

Абстрактілі ойлауды дамытуға арналған есеп және оны ЖИ көмегімен талдау. Берілген функцияның қасиеттерін зерттеу арқылы оқушыда абстракция, жалпылау және логикалық тұжырым жасау дағдылары қалыптасады.

Есеп:

Функция берілсін:

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

1. $f(x) = 0$ теңдеуінің түбірлерін табу.

2. Функцияның симметриясын анықтау.

3. Түбірлердің арасындағы байланысты логикалық түрде түсіндіру.

1-тәсіл: Алгебралық құрылымды талдау

Көпмүшенің құрылымы: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Демек, түбірлері: $x = 1; x = 2; x = 3$.

Бұл әдіс оқушыны факторлау заңдылығын жалпылауға, көпмүшенің ішкі симметриясын байқауға үйретеді.

2-тәсіл: ЖИ көмегімен үлгі құру және тексеру ЖИ жүйесі оқушының бастапқы қадамдарын талдап, келесі бағыттарды автоматты түрде ұсына алады:

— функцияның коэффициенттерін талдау;

— ықтимал бөлінетін түбірлерді генерациялау;

— оқушының дұрыс емес қадамдарын түзету.

Мысалы, ЖИ ұсынған тексеру әдісі: $f(1) = 0; f(2) = 0; f(3) = 0$ яғни көпмүше үш сызықтық көбейткішке ыдырайды.

Бұл тәсіл оқушылардың абстракциялау қабілетін күшейтеді, себебі олар нақты мәндерден жалпы заңдылыққа өтеді.

Қорытынды. Жүргізілген талдау жасанды интеллекттің оқушылардың абстрактілі ойлау қабілеттерін қалыптастыруда тиімді құрал екенін көрсетті. ЖИ тапсырмаларды бейімдеп, ойлау процесін талдап, жеке кері байланыс бере отырып, оқушының аналитикалық әрекетін тереңдетеді. Ұсынылған есеп мысалында ЖИ-дің функция құрылымын модельдеу, симметрияны анықтау және жалпы заңдылықтарға көшу сияқты ойлау операцияларын дамытуға ықпал ететіні дәлелденді.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № BR20281002) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: абстрактілі ойлау, жасанды интеллект, когнитивтік даму, функция талдауы, симметрия, логикалық ойлау.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ӘДЕБИЕТ

- [1] Anderson, J. R. *Cognitive Psychology and Its Implications.*, Worth Publishers, (2015).
- [2] Russell, S., Norvig, P. Artificial Intelligence: A Modern Approach, *Journal*, Pearson (2021),
- [3] Mayer, R. E. Learning and Instruction. Pearson, (2016).

ТЕХНИКАЛЫҚ ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНДАРЫНДА МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУДЕ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ: ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ШАРТТАР ЖӘНЕ ЕНГІЗУ ТӘУЕКЕЛДЕРІ

Л.У. ЖАДРАЕВА¹, Д.М. НУРБАЕВА², Г.К. УРСТЕМОВА³

^{1,2,3} Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

¹lari_6308@mail.ru, ²nur_dilara@mail.ru, ³Gulmira_7008@mail.ru

Жоғары білім беру жүйесінің цифрлық трансформациясы жағдайында жасанды интеллект инженерлік мамандықтардағы математикалық даярлықты жаңғыртудың маңызды құралдарының бірі. Қазіргі білім беру технологиялары студенттердің оқу әрекетін деректер негізінде

талдауды, жеке оқу траекторияларын қалыптастыруды және математикалық есептерді шешуде жедел кері байланыс ұсынады. Бұл технологиялар генеративті модельдер, білім беру чат-боттары, интеллектуалды тьюторлық жүйелер және оқу аналитикасына негізделген цифрлық сервистер арқылы жүзеге асырылады. Білім беру саласындағы эмпирикалық зерттеулер жасанды интеллект құралдарын қолдану белгілі бір педагогикалық шарттар сақталған жағдайда оқыту нәтижелеріне оң әсер етуі мүмкін. Әсіресе оқытудың бейімделген құрылымы, білімді меңгерудің межелік деңгейлерін қолдану, кезеңдік кері байланыс ұйымдастыру және цифрлық білім беру ресурстарын жүйелі пайдалану студенттердің оқу нәтижелері мен оқу ынтасының артуымен байланысты.

Математикалық білім беруді дамытудың келешектегі бағыттарының бірі — генеративті жасанды интеллектті динамикалық математикалық орталармен біріктіріп қолдану. Мұндай тәсіл символдық есептеу жүйелерін, визуализация құралдарын және интерактивті математикалық модельдеуді қатар пайдалануға мүмкіндік береді. Нәтижесінде студенттер математикалық объектілердің қасиеттерін көрнекі түрде талдап, есептердің шешімдерін эксперименттік түрде зерттейді. Алайда білім беру чат-боттарының тиімділігі көбіне оларды қолданудың педагогикалық контекстіне және оқу курсының әдістемелік жобалануына тәуелді. Сондықтан математикалық білім беру жүйесіне жасанды интеллектті енгізудің педагогикалық шарттарын анықтау өзекті ғылыми міндеттердің бірі.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы техникалық жоғары оқу орындарында математиканы оқыту процесіне жасанды интеллектті енгізудің педагогикалық шарттарын жүйелеумен байланысты. Зерттеу аясында генеративті жүйелерді бақылаусыз пайдаланудан туындайтын академиялық тәуекелдерді ескере отырып, «студент — жасанды интеллект — оқытушы» өзара әрекеттесуіне негізделген педагогикалық модель ұсынылады. Осы модель оқу әрекетін тексерілетін құрылым негізінде ұйымдастыруды көздейді. Бұл тәсіл студенттердің интеллектуалды жүйелермен жұмыс істеу кезінде алынған нәтижелерді сыни талдайды, математикалық дәлелдеулердің дұрыстығын тексереді және алгоритмдік шешімдердің негізділігін бағалайды, модель дайын жауаптарды механикалық қолдану қаупін төмендетуге және математикалық пайымдауды сақтауға бағытталған.

Енгізу шектеулері мен тәуекелдері Жасанды интеллект технологияларын математикалық білім беруге бақылаусыз енгізу оқыту тиімділігі артқандай көрінетін жалған әсер туындатады. Академиялық тұрғыдан маңызды тәуекелдердің бірі — тілдік модельдердің формалды түрде дұрыс көрінетін, бірақ мазмұндық тұрғыдан қате шешімдер немесе түсіндірмелер ұсыну ықтималдығы. Математикалық есептерді талдау кезінде мұндай жүйелер кей жағдайда есеп шартын дұрыс түсіндірмеуі, дәлелдеудің логикалық құрылымын бұзуы немесе математикалық контексті қате интерпретациялауы мүмкін. Сондықтан генеративті модельдерді пайдалану алынған нәтижелерді тұрақты түрде тексеруді және пайдаланушыдан жеткілікті пәндік құзыреттілікті талап етеді.

Екінші маңызды мәселе — оқу әрекетінің әдістемелік алмастырылуы. Чат-боттар мен генеративті жүйелерді шамадан тыс қолдану кезінде студент дайын шешімдерге сүйеніп, есептің шешу жолын өз бетінше құру дағдысын қалыптастырмауы мүмкін. Кейбір эмпирикалық зерттеулер генеративті жүйелерді жиі қолдану үй тапсырмаларын орындау нәтижелерін жақсартқанымен, емтихан кезінде білім нәтижелерінің төмендеуіне әкеледі.

Үшінші тәуекелдер тобы академиялық адалдық мәселелерімен байланысты. Генеративті модельдерді пайдалану плагиаттың пайда болуына, оқу қолдауы мен студенттің өзіндік жұмысы арасындағы аражіктің көмескіленуіне және технологиялық тәуелділіктің қалыптасуына ықпал етеді. Сонымен алгоритмдік бұрмаланулар және цифрлық ресурстарға қолжетімділіктің әркелкілігі білім беру теңсіздігінің жаңа формаларын қалыптастыруы ықтимал.

Қорытынды

Математикалық білім беру жүйесіне жасанды интеллектті енгізу тек жекелеген цифрлық құралдарды пайдаланумен шектелмеуі керек. Жасанды интеллектті тиімді қолдану студенттердің интеллектуалды жүйелермен сыни өзара әрекеттесуін дамытуға, алынған нәтижелерді тексеру мәдениетін қалыптастыруға және математикалық ойлауды қолдауға бағытталуы қа-

жет. Жасанды интеллект математикалық ойлауды алмастыратын құрал емес, керісінше оны дамытуға ықпал ететін маңызды педагогикалық ресурс ретінде қызмет етеді.

Кілтті сөздер: цифрлық трансформация, жасанды интеллект, математикалық білім беру, математикалық ойлау.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97U10, 97U50, 97U70

ӘДЕБИЕТ

- [1] Rong, W., Yu, Z. Do AI chatbots improve students learning outcomes? Evidence from a meta-analysis, *Br. J. Educ. Technol.*, **55** (2023), 10-33.
- [2] ElSayad, G., Mamdouh, H. AI-driven learning: evaluating the role of chatbots in enhancing student motivation and learning outcomes, *Journal of Applied Research in Higher Education*, **1** (2025), 13-18.
- [3] Chiu, T., Moorhouse, B., Chai, C., Ismailov, M. Teacher support and student motivation to learn with Artificial Intelligence (AI) based chatbot, *Interactive Learning Environments*, **32** (2023), 3240-3256.
- [4] Lademann, J., Henze, J., Becker-Genschow, S. Augmenting learning environments using AI custom chatbots: Effects on learning performance, cognitive load, and affective variables, *Physical Review Physics Education Research*, **12** (2025), 1232-1245.
- [5] Wardat, Y., Tashtoush, M., Alali, R., Jarrah, A. ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics, *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **5** (2023), 32-45.

ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А.Т. ЖАКЫПБЕКОВА¹, Д.И. ЗУЛПУКАРОВА², Н.Т. СМАНОВА³

^{1,2,3}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан
atyrgult67@mail.ru

С точки зрения связи «наличие возможности – результат» все задачи математического моделирования условно делятся на два больших класса: прямые задачи и обратные задачи. В первом случае, когда заданы определённые возможности, задача состоит в том, чтобы определить результат; во втором случае, наоборот: необходимо найти те возможности, которые привели к известным результатам. В середине XX века первые публикации по обратным и некорректно поставленным задачам относились к различным областям естествознания: физике, геофизике, астрономии, экологии, географии и другим. С появлением мощных компьютеров область применения обратных и некорректно поставленных задач охватила практически все научные направления, используя математические методы в медицинской, экологической и промышленной томографии, выявлении дефектов и т.д. В сфере высшего образования эта теория является одним из наиболее эффективных средств представления дисциплин естествознания, а также экологических и биологических предметов.

Прежде чем обсуждать обратные задачи, необходимо определить прямые задачи. В прямых задачах математики и физики исследователи стремятся найти функции, описывающие (точно или приближённо) различные физические явления (например, распространение звука, сейсмические колебания, электромагнитные волны и др.), тогда как в экологических задачах речь идёт о построении математической модели состояния современных хранилищ отходов.

Актуальность. Эти функциональные решения являются решениями уравнений математики и физики, для этого необходимо указать коэффициенты уравнения, начальные условия и граничные условия. Во многих случаях свойства среды оказываются неизвестными. Это означает необходимость постановки и решения обратных задач, для чего, например, требуется указать площадь первоначального расположения хранилищ отходов, их объём и количество

тонн токсичных веществ, определяющих коэффициенты уравнений, либо местоположение исследуемой области, её границы и другие свойства.

Объекты исследования. В поселке Шекафтар, Кыргызстан, расположено хвостохранилище №2. Оно было введено в эксплуатацию по проекту в 1975 году. В хвостохранилище накоплено около 1,3 миллиона тонн отходов. Объем составляет 650 тысяч м³.

Методы. Данный метод позволяет создавать поверхностные модели структурных объектов, таких как полигоны отходов и муниципальные свалки, состоящие из нескольких компонентов, определяемых различными поверхностными текстурами.

Ключевые слова: космические изображения, объекты, остатки, хвостохранилища, захоронения, мусорные свалки, текстуры, матрица информационных функций, компоненты, определение, извлечение, поверхности, поверхностные модели, компонентные модели, разделение компонентов.

2020 Mathematics Subject Classification: 517.95

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*, М.: Наука, Москва (1986).
- [2] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Новосибирск: Наука, Новосибирск (1980).
- [3] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, М.: Наука, Москва (1978).
- [4] Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, Новосибирск (2008).

The development of mathematical concepts in school mathematics through communication in the context of digital education

S.A. ZHAKIEVA¹, N. AZIZBEK KYZY²

^{1,2}Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykov, Osh, Kyrgyzstan

¹jakieva84@mail.ru, ²nuskaiymazizbekkyzy@mail.ru

The education system is currently evolving in the context of digital transformation, necessitating a revision of teaching content and methods. In this process, school mathematics instruction also faces new challenges. The primary goal of mathematics education is to develop students' computational skills and the ability to consciously grasp mathematical concepts.

The purpose of this report is to identify the didactic potential for developing mathematical concepts through communication in school mathematics in a digital education environment.

Research objectives:

- clarify the concept of “mathematical communication”;
- determine the role of digital tools in the acquisition of mathematical concepts;
- substantiate the pedagogical potential for developing mathematical communication using the example of preparing future computer science teachers to teach school mathematics.

In the context of digital education, the capabilities for enhancing mathematical communication are expanding significantly. Visualization software, interactive assignments, and digital resources create the necessary conditions for the visual representation and discussion of mathematical objects. This, in turn, facilitates a deeper understanding of mathematical concepts among students.

Using the example of training future computer science teachers — specifically those oriented toward teaching school mathematics — the development of mathematical communication is regarded as a vital component of a teacher's professional activity. A future teacher's ability to explain mathematical concepts clearly and accessibly, organize dialogue with students, and structure the process of justification has a direct impact on the quality of school mathematics education.

Thus, the formation of mathematical concepts through communication within a digital educational environment increases the effectiveness of teaching school mathematics. The application of didactic methods focused on the development of mathematical communication promotes the formation of mathematical thinking, logical analysis, and justification skills in students. Furthermore, this activity occupies a significant place in preparing future computer science teachers for the instruction of school mathematics.

Acknowledgments: We thank our colleagues of Department of Digital Technologies and Informatics for useful discussions.

Keywords: mathematical concept, mathematical communication, digital education, school mathematics, future teacher.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40

References

- [1] Polat E.S., Bukharkina M.Yu. *Modern pedagogical and digital technologies in education: a textbook (in Russian)*. "Academy", Moscow (2023).
- [2] Fridman L.M. *Didactics of mathematics in the context of digitalization of education (in Russian)*, Yurait, Moscow (2024).
- [3] OECD. *Digital transformation of education: learning and teaching in the era of artificial intelligence: an analytical report*, OECD Publishing, Paris (2023).
- [4] Zheentaeva Zh.K., Arystanbek kyzy B. Mathematics in the integration of students' knowledge (in Russian), *Science. Education. Technology, Osh*, **65(2)** (2019), 115–120.

КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ КАК ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (НА ПРИМЕРЕ 7–8 КЛАССОВ)

Д.И. ЗУЛПУКАРОВА¹, Н.Т. СМАНОВА², А.Т. ЖАКЫПБЕКОВА³

^{1,2,3}Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

zdamira15@mail.ru

В этой статье анализируется важность компетентностно-ориентированных задач в образовании и возможности их использования в качестве средства оценки. Понятие компетентности включает в себя не только объем знаний, но и способность применять их в жизненных ситуациях. Компетентностно-ориентированные задания направлены на развитие практических навыков учащихся и стали использоваться для определения их навыков мышления, решения проблем, логического и критического мышления на более высоком уровне. Рассмотрены роль учителей в создании и применении компетентностно-ориентированных задач, а также важность интеграции этих задач в образовательный процесс. В нем описаны основные особенности построения компетентностно-ориентированных задач в качестве инструмента оценки, его применения и использования в качестве наиболее эффективного инструмента в образовании. Также показана роль компетентностно-ориентированных заданий в образовательном процессе, их значимость для достижения высокого качества образования, особенности в развитии мышления учащихся.

Важное место в самостоятельных исследованиях и разработках, учащихся занимает создание компетентностно-ориентированных задач для оценки их компетентности. Инструменты оценки имеют большое значение для достижения поставленной цели. В большинстве образовательных систем процесс оценки в основном ограничивается проверкой уровня образования. Однако в последние годы компетентностно-ориентированные задачи широко используются в качестве нового инструмента оценки. Эти задания позволяют студентам и учащимся применять свои теоретические знания на практическом уровне и являются идеальным инструментом для оценки их устойчивых навыков мышления, а также эффективности принимаемых ими решений. Задачи, ориентированные на компетенции, обеспечивают эффективную оценку в процессе обучения и способствуют расширению знаний учащихся.

В условиях инноваций в системе образования особое значение приобретает компетентный подход к преподаванию математики. В соответствии с образовательными стандартами Кыргызской Республики основной упор делается не на запоминание знаний, а на умение применять их в практических ситуациях. Поэтому компетентностно-ориентированные задачи должны стать основной частью фонда средств оценки. Задача, ориентированная на компетенции — это деятельность, которая требует от учащегося способности применять математические знания в реальных или смоделированных жизненных ситуациях, анализировать, делать выводы и принимать решения.

Такие задачи имеют следующую структуру:

1. иметь жизненно важное содержание;
2. интегрированное использование нескольких математических концепций;
3. требование открытого или полукрытого ответа;
4. четкое определение критериев оценки.

В 7 классе задания по темам рациональные числа, проценты, пропорции могут быть связаны с расчетами в повседневной жизни (например, дисконтирование, планирование бюджета, расчет скорости). В 8-м классе линейные уравнения, анализ графиков в задачах по функциям и геометрия охватывают практические задачи, такие как вычисление площади и объема. При создании фонда средств оценки необходимо учитывать следующую структуру:

- стимул — погружает в контекст задания и мотивирует на его выполнение;
- задачная формулировка — точно указывает на деятельность;
- источник информации — содержит информацию, необходимую для успешной деятельности учащихся по выполнению задания;
- инструмент проверки — ключ, модельный ответ, бланк формализованного наблюдения;
- бланк — задает структуру предъявления результата.

Например, в задании по теме „Проценты“ учащийся рассчитывает 15% скидку, предоставленную на товар, определяет сэкономленную сумму и делает выводы.

Критерии оценки: правильное использование формулы, точность расчета, обоснование результата.

Компетентностно-ориентированные задания при применении в формирующей (ежедневное наблюдение, самооценка) и итоговой (итоговая работа) оценке способствуют комплексной оценке успеваемости учащегося. Такой подход развивает математическую грамотность, логическое мышление и социальную активность учащегося. Следовательно, систематическая разработка компетентностно-ориентированных задач и включение их в фонд средств оценки является эффективным механизмом, направленным на повышение качества образования.

Ключевые слова: задачи, ориентированные на компетенции, новые концепции обучения, Процесс оценки, средство оценки, расширение знаний учащихся.

2020 Mathematics Subject Classification: 372.851

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Култаева Д. Ч., Зулпукарова Д. И. Математикалык маселелерди чыгаруу аркылуу окуучулардын предметтик компетенттүүлүктөрүн калыптандыруу, *Вестник Иссык-Кульского университета*, 58 (2024), 73–80.
- [2] Зулпукарова Д.И., Абдукаимова А.Ж. Формирование информационной компетентности учащихся с помощью интерактивных заданий на уроках математики, *Вестник Ошского государственного университета. Педагогика. Психология*, 1:4 (2024), 23–31.
- [3] Попович, И.Ю. Технология создания компетентностноориентированных заданий , *Начальная школа*, 1 (2014), 47–54.

НЕГІЗГІ МЕКТЕП ОҚУШЫЛАРЫНЫҢ МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ПРОЦЕСІНДЕ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ САУАТТЫЛЫҒЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ ӘДІСТЕМЕСІ

З.А. ЖҰМАҒҰЛОВА¹, С.Е. КАППАСОВА²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университет, Алматы, Қазақстан

eldisann@gmail.com

Зерттеу жұмысы негізгі мектеп оқушыларының математиканы оқыту процесінде функционалдық сауаттылығын қалыптастырудың әдістемелік негіздерін әзірлеуге бағытталған. Қазіргі білім беру кеңістігінде функционалдық сауаттылық білім алушылардың алған білімдерін өмірлік жағдаяттарда тиімді қолдану қабілеті ретінде қарастырылып, білім сапасының негізгі индикаторларының бірі болып табылады.

Зерттеудің мақсаты – негізгі мектепте математиканы оқыту процесінде оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастырудың мазмұны мен тиімді әдістемесін ғылыми негіздеу және оны педагогикалық тәжірибеде іске асыру.

Зерттеу барысында функционалдық математикалық сауаттылықтың мәні мен құрылымы, оны қалыптастырудың педагогикалық шарттары, сондай-ақ математиканы оқытудың мазмұндық-әдістемелік ерекшеліктері кешенді түрде талданды. Халықаралық зерттеулердің (PISA, TIMSS) нәтижелері, отандық және шетелдік ғылыми еңбектер, сондай-ақ педагогикалық тәжірибе деректері негізінде негізгі мектеп оқушыларының функционалдық сауаттылығының қазіргі жағдайы айқындалды.

Зерттеу аясында цифрлық білім беру ресурстарын, жасанды интеллект құралдарын және өмірлік жағдаяттарға бағдарланған қолданбалы есептер жүйесін тиімді пайдалану арқылы оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастырудың әдістемесі әзірленді. Ұсынылған әдістеменің тиімділігі педагогикалық эксперимент барысында тексеріліп, алынған нәтижелер сандық және сапалық талдау арқылы дәлелденді. Зерттеудің ғылыми жаңалығы функционалдық математикалық сауаттылықтың мазмұны мен құрылымын нақтылаумен, оны қалыптастыруға ықпал ететін педагогикалық шарттарды айқындаумен, сондай-ақ цифрлық трансформация жағдайында оқытудың әдістемелік жүйесін ғылыми тұрғыда негіздеумен сипатталады. Зерттеу нәтижелері білім беру практикасына енгізуге бағытталған және негізгі мектепте математиканы оқыту сапасын арттыруға, білім алушылардың функционалдық сауаттылығын жүйелі дамытуға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТ

[1] Abylkassymova A., Kappasova S.E., Tuyakov T.A et al. Methodological aspects of functional literacy formation of school Children in mathematics, Вестник КазНПУ им. Абая. – 2023. – №1(81). – 66-73.

[2] Әбілқасымова А.Е., Жұмағұлова З.Ә., Тұяқов Е.А. Оқушылардың функционалдық сауаттылығын практикалық мазмұнды есептер арқылы дамыту: оқу құр., Алматы: Мектеп, 2024. – 200.

[3] Kappasova S., Abylkassymova A., Zhadyrayeva L. et al. Methodological aspects of the development of functional literacy of schoolchildren in mathematics, Scientific Herald of Uzhhorod University. Series Physics. – 2024. – Issue 55. – P. 2372-2382.

[4] Kappasova S., Abylkassymova A., Bulut U. et al. Mathematical literacy and its influencing factors: A decade of research findings (2015-2024), Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education. – 2025. – Vol. 21, Issue 7. – P. 2671.

[5] Абылкасымова А.Е., Каппасова С.Е., Жадраева Л.У. Мектеп оқушыларының математикалық сауаттылығын дискурстар көмегімен дамыту, Вестник КазНПУ им. Абая. – 2022. – №3(79). – С. 110-117.

[6] Абылкасымова А.Е., Каппасова С.Е., Мусайбеков Р.К. и др. Критический и развивающий анализы в исследовательской деятельности учащихся, 3i: intellect, idea, innovation - интеллект, идея, инновация. – 2024. №3. – С. 207-217.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНСТРУМЕНТОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

А.С. ИОВБАК

Докторант КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан

2577986@abaiuniversity.edu.kz

В современном образовании актуализируется потребность в системной интеграции математических методов анализа, экспериментальных задач и инструментов искусственного интеллекта. Цифровые технологии обеспечивают эффективную обработку экспериментальных данных, выявление статистически значимых корреляций и закономерностей, а также наглядную визуализацию полученных результатов в форме графиков, таблиц и диаграмм. Для анализа данных используется количественная обработка с помощью статистических методов, включая: вычисление средних величин, построение графиков и расчет погрешностей случайных величин. Такой подход позволяет учащимся не только оптимизировать учебный процесс, но и освоить актуальные методы научного исследования.

В процессе выполнения физического эксперимента учащиеся получают «сырые» данные, интерпретация которых является ключевой задачей. Школьная программа обычно не включает сложные методы анализа, такие как регрессионный анализ. В случае необходимости учащиеся используют численные методы, например, решение уравнений, а затем применяют статистическую обработку, включая вычисление среднего арифметического. Этот подход эффективен только для множественных прямых измерений, где требуется вычисление неизвестной константы. Более продвинутым методом является использование коэффициента Стьюдента для оценки значимости результатов, однако даже такие ручные расчеты не соответствуют современным стандартам исследовательских практик.

Для минимизации расхождений между методами анализа школьных и научных физических экспериментов предлагается интегрировать более эффективные и наглядные методы математического анализа. Применение этих методов требует высокого уровня подготовки, что может быть компенсировано использованием инструментов искусственного интеллекта, таких как язык программирования Python с библиотеками *scikit-learn* и *matplotlib* для проведения статистического анализа и визуализации данных, программный комплекс *Wolfram Mathematica* для решения систем уравнений и построения графиков, а также облачные платформы *Google Colab* и *AutoML* для автоматизации процедур обработки, анализа и интерпретации экспериментальных результатов. Согласно современным исследованиям [1, 2], применение методов математического анализа в образовательной практике демонстрирует положительную динамику знаний и навыков учащихся. Использование этих методов способствует формированию исследовательских умений, углубленному пониманию закономерностей и причинно-следственных связей физических процессов.

Интеграция математических методов анализа данных с инструментами искусственного интеллекта в школьном образовании обеспечивает системное развитие исследовательских навыков, углубленное понимание закономерностей физических процессов и формирование математического мышления. Такой подход создаёт условия для подготовки выпускников, способных применять современные цифровые технологии и математические инструменты в решении практических и научных задач, что является ключевым требованием современного общества.

Ключевые слова: математический анализ, статистические методы, искусственный интеллект, экспериментальные данные, исследовательские навыки.

2020 Mathematics Subject Classification: 62P25, 68T40, 62P20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Henze J., Lademann J., Becker-Genschow S., Bresges A. AI-supported data analysis boosts

student motivation and reduces stress in physics education, *Frontiers in Education*, **11** (2026), 1719670.

[2] Fadillah M. A., Usmeldi, Lufri, Mawardi, Festiyed Exploring user perceptions: The impact of ChatGPT on high school students' physics understanding and learning, *Advances in Mobile Learning Educational Research*, **4**(2) (2024), 1197–1207.

ГРАФИКТЕРДІ ВИЗУАЛИЗАЦИЯЛАУ МЕН ТАЛДАУДАҒЫ GEOGEBRANYҢ РӨЛІ

А.К. КАГАЗБАЕВА¹, Ж. КАЙДАСОВ²

^{1,2}Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Қазіргі таңда білім сапасын арттыруда цифрлық технологияларды қолданудың рөлі артуда. Цифрлық платформалардың құрамындағы визуализацияға арналған программалардың бірі GeoGebra математиканы оқытуда қолдануға кең көлемді мүмкіндіктер бар. Әсіресе динамикалық графиктерді визуализациялауда және талдауда GeoGebra маңызды роль атқарады. Оның басты артықшылықтарының бірі – “жанды сызбаларды” жасауға мүмкіндік беретін динамиканың болуы. GeoGebra жүгірткі параметрін енгізу арқылы сызбадағы қисық немесе беттің орны мен теңдеудегі коэффициенттер (параметрлер) арасындағы байланысты түсінуге мүмкіндік бар. Ол визуалды бақылау арқылы күрделі тапсырмаларды түсінуді жеңілдетеді. Математиканың әр түрлі бөлімінен мысалдар келтірейік.

1. GeoGebra бағдарламасының көмегімен қисықтар теориясының кейбір проблемаларын шешудің мүмкіндіктерін қарастырайық. Қисықтар теориясында қарапайым қисық, жанама, ерекше нүкте, қисықтар үйірі, қисықтар үйірінің орай жанаушысы және т.б. ұғымдар жиі кездеседі [1]. Мысалы, GeoGebra қарапайым қисықтың анықтамасын көрнекі түрде түсіндіруге мүмкіндік береді. Әсіресе нүкте қозғалысының заңы векторлық нысанда $\vec{r} = \vec{r}(t)$ анықталғанда және қисықты $\vec{r}$ вектор-функцияның *годографы* ретінде, яғни $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ радиус-векторлы қозғалыстағы M нүктенің траекториясы ретінде анықталғанда GeoGebra көрнекі түрде түсіндіруге көмектеседі (1-сурет). Қисықтар теориясында тегіс қисықтың нүктедегі негізгі «үш-жағы» ұғымы бар. Бұл нүкте қисық бойымен жылжығанда бұрала отырып, нүктемен қоса қозғалатын объекті. GeoGebra қолдану бұл объектінің сызбадағы орнының динамикасын көруге мүмкіндік береді [2].

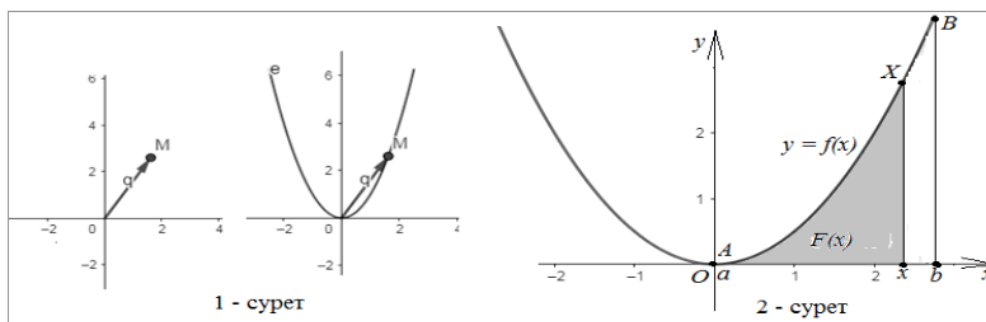


Рис. 1: Графиктерді визуализациялау

2. Теріс емес функцияның анықталған интегралы сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданының сандық мәніне тең болатыны белгілі. Ал анықталған интегралдың жоғарғы шегі айнымалы болған жағдайдың геометриялық мағынасын білім алушылар түсіне бермейді. Міне осы мәселені шешуде GeoGebra көрнекі түрде түсіндіруге көмектеседі (2-сурет).

3. Көпжақтардың және айналу денелерінің қималарын салу классикалық позициялық есептер қатарына жатады. Денелер мен стереометрия есептерін шешуге қажетті GeoGebra

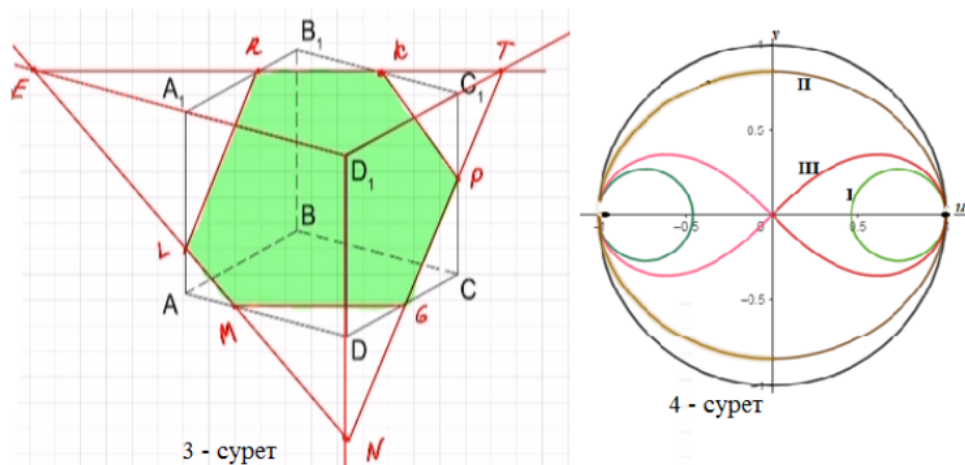
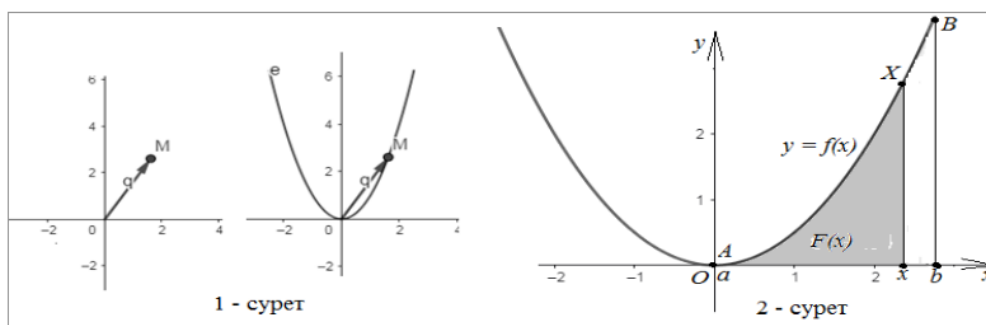


Рис. 2: Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы

құралдары туралы [3] оқу құралында келтірілген. Бірақ, онда позициялық стереометрия есептерін шешу толық қарастырылмаған. Құралда қима салуда, көбінесе, іздер әдісін қолданумен шектеледі. Іштей проекциялау немесе аралас әдіс қолданылмаған. Бұл әдістерді қолданып қима салғанда, табылған қиманы түрлендіріп көрнекі түсіндіруде GeoGebra құралының көмегі мол.

Қиюшы жазықтық бір түзде жатпайтын үш нүктемен, немесе екі нүктемен және бағытпен, немесе нүктемен және әртүрлі екі бағытпен берілетінін еске түсірейік. Мысалға, бір түзде жатпайтын M, L, K үш нүктеден өтетін қиюшы жазықтық пен призманың салынған қимасын қарастырайық (3-сурет). Берілген нүктелердің орналасуына байланысты (мысалға M нүктесі) қиманың пішіні әр түрлі болуы мүмкін. GeoGebra көмегімен M нүктесін призма қырымен жылжымалы етсек, онда қима төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш бола алады.

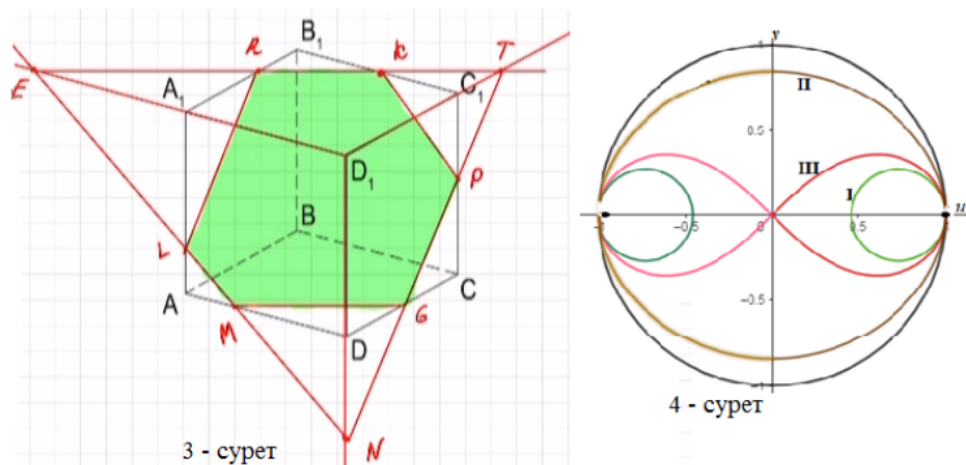


Сурет 3: Призма қимасының динамикасы

4. GeoGebra көмегімен Лобачевский геометриясының қисықтары мен шексіз облыстарын Пуанкаре бірлік дөңгелегінде бейнелеуге де болады. Мысалы, 4-суретте: параметрлік жазықтықтағы гиперболаның бейнесі эллипспен (II), $|y| = |x|$ түзулерінің бейнесі лемнискатамен (III), орицикл бейнесі шеңбермен бейнеленген (I). Олар $(1,0)$ және $(-1,0)$ нүктелерінде сыртқы шеңбермен (абсолютпен) жанасып тұр.

Цифрлық GeoGebra платформасы білім беру жүйелерінде математиканы оқытудың сапасын жетілдіруде, математикалық модельдер мен графиктерді визуализациялауға, функциялардың қасиеттерін интерактивті режимде зерттеуге қолайлы орта құра отырып, білім алушылардың кеңістікте елестете алу, логикалық ойлау қабілеттерін дамытуда тиімді ақпараттық құрал болып табылады.

Кілтті сөздер: GeoGebra, визуализация, графиктер, математиканы оқыту, қисықтар теориясы, стереометрия.



Сурет 4: Лобачевский геометриясының бейнелері

2020 Mathematics Subject Classification: 97U50, 97D40, 97G40

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

[1] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия: Первое знакомство*. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.

[2] Ларин С.В. *Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учеб. пособие*. Ростов н/Д: Легион, 2015. 192 с.

[3] Смирнов В.А., Смирнова И.М. *Геометрия с Geogebra: стереометрия: учеб. пособие*. М.: Прометей, 2018. 171 с.

Visualization of Fluid Flow Velocity and Pressure Using OpenFOAM or ANSYS Fluent

T.R. KADYROVA¹, Ch.N. MAMAZHUNUSOVA²

^{1,2}Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykov, Osh, Kyrgyzstan

¹kadyrova@mail.ru, ²mamazhunosova@mail.ru

This research considers the issues of visualizing fluid flow velocity and pressure fields in modern computational fluid dynamics (CFD) software packages, OpenFOAM and ANSYS Fluent. The purpose of the study is to evaluate the accuracy and efficiency of modeling hydrodynamic processes in complex channels using the capabilities of two different software tools.

The Navier–Stokes equations for an incompressible viscous fluid are used as the primary mathematical framework in modeling fluid motion:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Here ρ is density, p is pressure, and μ is dynamic viscosity.

While OpenFOAM, as an open-source platform, allows for deep code modification, ANSYS Fluent is distinguished by its user-friendly interface and powerful meshing algorithms. As a result of numerical simulations, the pressure drop and sharp changes in the velocity gradient in the narrowed parts of the channel were successfully visualized in both software environments. The obtained contours make it possible to accurately determine the zones of turbulence formation.

Acknowledgments: We express our gratitude to the staff of the Department of Digital Technologies and Informatics for their useful discussions.

Keywords: OpenFOAM, ANSYS Fluent, visualization, fluid dynamics, velocity field, pressure.

References

- [1] Ivanov A.A., Smirnov V.V. *Modern methods of computational fluid dynamics in ANSYS Fluent (in Russian)*. Bauman MSTU Press, Moscow (2024).
- [2] Snegirev A.Yu. *Modeling of turbulent flows in OpenFOAM: new approaches (in Russian)*. Polytech-Press, St. Petersburg (2025).
- [3] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theoretical Physics. Vol. VI. Fluid Mechanics (in Russian)*. Nauka, Moscow (1986).
- [4] Moukalled F., Mangani L. *Advanced OpenFOAM: From Theory to Practice*. Springer, Berlin (2024).

ЖОҒАРЫ БІЛІМ БЕРУ ЖҮЙЕСІН ТРАНСФОРМАЦИЯЛАУ КОНТЕКСИНДЕГІ ЦИФРЛЫҚ КЛОН ТЕХНОЛОГИЯСЫ

Д.А. КАЗИМОВА¹, С.С. КОПБАЛИНА²

^{1,2}Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды ұлттық зерттеу университеті,
Қарағанды, Қазақстан

¹dinkaz73@mail.ru, ²kopbalina@mail.ru

Білім беруді дамытудың қазіргі кезеңі цифрлық технологиялар мен жасанды интеллект жүйелерін белсенді енгізумен сипатталады, бұл оқу процесін ұйымдастырудың дәстүрлі тәсілдерінің өзгеруіне алып келеді және оқытудың жаңа интеллектуалды құралдарын әзірлеуді талап етеді. Түйінді процестердің бірі білім алушылармен бейімделушілік пен интерактивті өзара іс-қимылды қамтамасыз ететін дәстүрлі электрондық ресурстардан интеллектуалды білім беру жүйелеріне көшу болып табылады. Бұл тұрғыда оқытушының педагогикалық іс-әрекетін цифрлық ортада модельдеуге мүмкіндік беретін цифрлық клон технологиясы ерекше қызығушылық тудырады. Сондықтан қазіргі таңда білім алушылармен автоматтандырылған өзара іс-қимылды қамтамасыз ететін оқытушының интеллектуалды цифрлық клонын әзірлеу бағытты даму үстінде. Бұл тәсілді жүзеге асыру үшін оқытушының цифрлық клон технологиясына негізделген интеллектуалды білім беру жүйесінің моделі ұсынылады.

Ұсынылып отырған интеллектуалдық жүйе оқытушының білімін, әдістемелік тәсілдерін және оқу материалын ұсыну ерекшеліктерін қамтитын нақты оқытушының виртуалды моделі болып табылатын цифрлық клон тұжырымдамасына негізделген. Оқытушының ЖИ-аватары цифрлық технологияны қамтитын бірнеше технологиялық құрамдастардың интеграциясы ретінде жүзеге асырылады. Олар бейнеаватар, сөйлеуді синтездеу жүйесі, интеллектуалды диалогтық модуль, білім беру, білім қоры және пайдаланушылардың өзара әрекеттесуіне арналған бағдарламалық платформа.

Бейнеаватар оқытушының цифрлық бейнесінің визуализациясын қамтамасыз ету және оқу материалын ұсыну үшін қолданылады. Үлкен тілдік модельдер негізінде жүзеге асырылатын интеллектуалды диалогтық модуль білім алушылармен табиғи тіл арқылы қарым-қатынас жасау мүмкіндігін береді. Білімнің оқыту қоры оқытушының оқу-әдістемелік материалдары негізінде қалыптасады және интеллектуалды жүйенің жұмыс істеуіне негіз болады.

Ұсынылып отырған модель келесі құрылым түрінде болады:

Кезең	Жүйе компоненті	Сипаттамасы
1	Оқытушы	Білім мен оқу материалдарының қайнар көзі
2	Білім қоры	Оқу материалдары мен әдістемелік ресурстар
3	Интеллектуалды модель	Білімді өңдеу және құрылымдау
4	Цифрлық клон	Білімді цифрлық түрде ұсыну
5	Білім алушы	Білім беру ақпаратын алу

Мұндай құрылым педагогикалық білімнің цифрлық түрге көшу процесін көрсетеді.

Жүйенің функционалдық мүмкіндіктері

Оқытушының интеллектуалды ЖИ-аватарының әзірленген тұжырымдамасы білім беру процесінің тиімділігін арттыруға бағытталған функционалдық мүмкіндіктер кешенін жүзеге асыруға мүмкіндік береді. Негізгі функциялардың қатарына бейнеаватар көмегімен мультимедиялық құралдарды пайдалана отырып оқу материалын автоматтандырылған түрде ұсыну кіреді. Оқу мәселелері бойынша кеңестер мен түсініктемелер алуды қамтамасыз ететін диалогтық жүйелер негізінде жүзеге асырылатын білім алушыларды интеллектуалды қолдау маңызды рөл атқарады. Жүйенің маңызды ерекшелігі педагогикалық іс-әрекетті тиімді етіруге ықпал ететін оқу материалдарын қайталап пайдалану мүмкіндігі болып табылады.

Оқытушының ЖИ-аватарын пайдалану келесі принциптерді жүзеге асыруға мүмкіндік береді:

- үздіксіз оқытуды ұйымдастыру;
- оқытуды жекелендіру;
- білім беру ортасының бейімделу мүмкіндіктері;
- білім беру ресурстарының қолжетімділігі.

Технология оқытуды ұйымдастырудың әртүрлі нысандарында, соның ішінде қашықтықтан және аралас оқытуда қолданылуы мүмкін. Оқытушылардың цифрлық клоны бар интеллектуалды білім беру жүйелерін пайдалану оқу процесінің тиімділігін арттырады. Олар білім беру ресурстарына тұрақты қолжетімділікті қамтамасыз етеді, білім алушыларға оқу қарқынын өз бетінше реттеуге және жекелендірілген тәсіл элементтерін енгізуге мүмкіндік береді. Қайталанатын педагогикалық операцияларды автоматтандыру оқытушылардың жүктемесін азайтады және білім беру процесінің ауқымын қамтамасыз етеді, бұл бір оқытушыға көптеген студенттермен жұмыс істеуге мүмкіндік береді.

Бірақ цифрлық клондар тікелей өзара әрекеттесуді толығымен алмастыра алмайды, сондықтан ең тиімдісі аралас оқыту жағдайында. Жүйенің білім қорының сапасы және оқытушының цифрлық имиджін пайдалануды реттеу маңызды аспектілер болып қала береді.

Қолданыстағы шектеулермен бірге интеллектуалды білім беру технологияларының тұрақты дамуы да байқалады. Интеллектуалды білім беру жүйелерінің даму перспективалары ЖИ технологияларын жетілдірумен байланысты: білім беру қызметін талдауға қабілетті бейімделгіш платформаларды құру, білім беру платформаларына интеграциялау және интеграцияланған интеллектуалды білім беру орталарын қалыптастыру.

Осылайша, оқытушылардың жасанды интеллектпен цифрлық клондарын білім беру тәжірибесінде қолданудың айтарлықтай әлеуеті бар деген қорытынды жасауға болады. Оқытушының цифрлық клон технологиясы білім беру ресурстарының қолжетімділігін және білім беру процесінің тиімділігін арттыруды қамтамасыз ететін жаңа буынның зияткерлік білім беру жүйелерін құрудың негізін құрайды. Білім беруді цифрлық трансформациялау жағдайында жасанды интеллект технологияларына негізделген интеллектуалды білім беру жүйелерін әзірлеу мен енгізуді заманауи білім беру ортасын дамытудың стратегиялық бағыты ретінде қарастыруға болады.

Кілтті сөздер: жасанды интеллект, оқытушының цифрлық клоны, білім беруді цифрландыру, интеллектуалды білім беру жүйелері, аралас оқыту.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Рассел С., Норвиг П. ағылшын тілінен ауд. Мансұрова М.Е, Дүйсебекова К.С. *Жасанды интеллект: жаңашыл әдіс*, Алматы (2016).
- [2] Казимова Д.А., Спирина Е.А., Копбалина С.С., Турмуратова Д.А., Турсынғалиева Г.Н. *Технологии искусственного интеллекта в цифровой среде*, Colorprint, Караганда (2025).
- [3] Woolf B. *Building Intelligent Interactive Tutors*, Elsevier, (2020).
- [4] Вихман В.В., Ромм М.В. «Цифровые двойники» в образовании: перспективы и реальность, *Высшее образование в России*, (2021), 22–32.

МЕКТЕП БІЛІМ АЛУШЫЛАРЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ САПАСЫН АРТТЫРУДА ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫН ҚОЛДАНУ

Ж.А. КАРАБАЕВА¹, К.М. БЕРКІМБАЕВ²

^{1,2}Өзбекәлі Жәнібеков атындағы ОҚПУ, Шымкент, Қазақстан

Karabaeva.zhayna@okmpu.kz

Ескерту 1. Қазақстанда білім беру жүйесін цифрлық трансформациялау – ұлттық даму стратегиясының басым бағыттарының бірі болып табылады. 2026 жылды «Цифрландыру және жасанды интеллект жылы» деп жариялау білім беру саласында озық технологияларды жүйелі енгізудің стратегиялық маңызын көрсетеді. Бұл мақалада жасанды интеллект (ЖИ) платформаларының мектеп білім алушыларының математикалық білімін көтерудегі рөлі қарастырылады. Адаптивті оқыту жүйелері, геймификация, кеңейтілген шындықтағы тапсырмалар және аналитикалық құралдардың қолданылуы оқу процесін даралауға, оқушылардың қабілеттерін дамытуға және олардың мотивациясын арттыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, мемлекеттік бастамалар мен ЖИ инфрақұрылымы мектептердегі білім сапасын жетілдіру үшін маңызды болып табылады.

Қазіргі кезеңде Қазақстанда білім беру жүйесін цифрлық трансформациялау – ұлттық даму стратегиясының негізгі бағыты болып табылады. Президент Қасым-Жомарт Тоқаев 2026 жылды «Цифрландыру және жасанды интеллект жылы» деп жариялады. Бұл шешім цифрлық трансформацияны жеделдетуге, жасанды интеллект құралдарын кеңінен қолдануға және мектептерде математикалық білім сапасын арттыруға бағытталған.

Қазіргі уақытта білім беру процесіне енгізілетін ЖИ платформалары оқушылардың оқу үлгерімін бақылауға, деректерді жинақтауға және оқу траекторияларын даралауға мүмкіндік береді. Мысалы, Google AI for Education, Microsoft Azure AI, OpenAI ChatGPT, сондай-ақ AR Web Studio және ZapWorks платформалары мектептерде аналитикалық құралдар мен кеңейтілген шындықтағы математикалық тапсырмаларды іске қосуға қолданылуда. AR платформалары оқушыларға интерактивті және кеңейтілген шындықтағы математикалық тапсырмаларды ұсына отырып, абстрактілі ұғымдарды визуалды түрде түсінуге көмектеседі. Бұл оқу процесін қызықты әрі нәтижелі етеді. Математиканы оқытуда адаптивті оқыту жүйелері маңызды рөл атқарады. Curipod.com платформасы әр оқушының білім деңгейін, оқу қарқынын және жеке ерекшеліктерін талдап, оқу материалын даралап ұсынады. Платформа оқушының әлсіз тұстарын анықтап, қажетті тапсырмалар мен ресурстарды ұсына отырып, аналитикалық ойлау қабілетін дамытуға бағытталған. Мұғалімдерге аналитикалық есеп беру арқылы әр оқушының прогресін нақты бақылауға және оқу жоспарын түзетуге мүмкіндік туады. Адаптивті оқыту жүйелері математикалық білімді меңгеруді тиімді етіп, оқу процесін қызықты әрі нәтижелі етеді.

Оқу мотивациясын арттыруда геймификация элементтері мен цифрлық марапаттау жүйелері маңызды. Kahoot! және Quizizz платформалары интерактивті викториналар арқылы математикалық тапсырмаларды ойын формасында меңгеруге мүмкіндік береді, ал Classcraft оқушыларды оқу процесінде марапаттау жүйесі арқылы ынталандырады, топтық және жеке жетістіктерді бағалайды. AR технологиялары – AR Web Studio және ZapWorks – оқушылардың оқу процесіне жаңа деңгейдегі қызығушылық қосып, математикалық ұғымдарды кеңейтілген шындықта визуалды түрде түсіндіруге мүмкіндік береді. Бұл тәсіл сабаққа қызығушылықты арттырып қана қоймай, оқушылардың шығармашылық ойлау, кеңістіктік қабілет және проблемаларды шешу дағдыларын дамытуға ықпал етеді. Сонымен қатар, мұғалімдер сабақтағы белсенділікті бақылап, әр оқушыға жекелеген қолдау көрсете алады, нәтижесінде математикалық білім сапасы жоғарылайды.

Қазақстандағы ЖИ саясаты мен инфрақұрылымдық бастамалар мектеп білім алушыларының математикалық білімін арттыруға тікелей әсер етеді. Жасанды интеллектті дамыту

тұжырымдамасы, ЖИ туралы заң, жаңа Цифрлық даму және жасанды интеллект министрлігінің бастамалары, суперкомпьютерлер мен деректерді өңдеу орталықтары мектептерде ЖИ қолдануды жеделдетіп, білім беру экожүйесін жетілдіруге жол ашады. Осылайша, жасанды интеллект құралдары тек математикалық дағдыларды дамытуға ғана емес, сонымен қатар оқушылардың зерттеушілік қабілеттерін, аналитикалық ойлауын, мотивациясын және оқу үрдісіндегі белсенділігін арттыруға мүмкіндік береді.

Жалпы алғанда, жасанды интеллект пен цифрлық технологияларды мектепте қолдану білім беру процесін тиімді, қызықты және нәтижелі етеді. Оқушылар өз қабілеттеріне сай дараланған оқу траекториялары арқылы білім алады, аналитикалық ойлау дағдылары дамиды, ал мотивация мен қызығушылық сақталады. Осы тәсілдер мектеп білім алушыларының математикалық білім сапасын жоғарылатып, заманауи технологияларды тиімді пайдалана білуді қалыптастырады.

Қорытынды 2. *Жасанды интеллект платформалары мен цифрлық технологияларды мектепте қолдану математикалық білім сапасын арттыруда маңызды рөл атқарады. Олар оқу процесін даралауға, оқушының жеке қабілеттерін дамытуға, аналитикалық және кеңістіктік ойлау дағдыларын жетілдіруге мүмкіндік береді.*

Қорытынды 3. *Геймификация, AR технологиялары, аналитикалық есеп беру және интерактивті тапсырмалар оқушылардың оқу мотивациясын тұрақты түрде арттырады. Осы тәсілдердің интеграциясы мектеп білім алушыларының математикалық білім сапасын көтеріп, білім беру процесін заманауи талаптарға сай тиімді етеді.*

Кілт сөздер: жасанды интеллект, цифрлық трансформация, математикалық білім сапасы, адаптивті оқыту, геймификация, аналитикалық жүйелер, AR технологиялары

ӘДЕБИЕТ

- [1] Қазақстан Республикасының Президенті Қ.Тоқаев. «2026 жылды Цифрландыру және жасанды интеллект жылы деп жариялау» туралы Жарлық.
<https://www.gov.kz/memleket/entities/zhambyl-moyynkum/press/news/details/1137347?lang=kk>
- [2] Жасанды интеллектті дамыту тұжырымдамасы 2024–2029 жылдарға арналған, ҚР Үкіметі.
- [3] Curipod.com – адаптивті оқыту платформасы. <https://www.curipod.com>
- [4] Kahoot! – геймификация және интерактивті викториналар платформасы. <https://kahoot.com>
- [5] Quizizz – оқу мотивациясын арттыруға арналған интерактивті тапсырмалар.
<https://quizizz.com>
- [6] Classcraft – цифрлық марапаттау және ойын элементтерін енгізу. <https://www.classcraft.com>
- [7] AR Web Studio – кеңейтілген шындықтағы тапсырмалар. <https://www.arwebstudio.com>
- [8] ZapWorks – AR/VR контент жасау платформасы. <https://zap.works>

О ВВОДНОМ КУРСЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА УНИВЕРСИТЕТОВ

С.Д. КАРАКОЗОВ¹, В.А. СМЕРНОВ²

^{1,2}Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

¹sd.karakozov@mpgu.su, ²v-a-smirnov@mail.ru

Сегодня проблема обучения аналитической геометрии студентов 1-го курса классических, технических и педагогических университетов состоит в том, что абитуриенты не всегда обладают необходимыми геометрическими представлениями, не знакомы с классическими кривыми и их свойствами, не умеют изображать и моделировать эти кривые в компьютерных программах.

Это обусловлено тем, что школьные учебники геометрии, как правило, не содержат такого материала, а Единый Государственный Экзамен (ЕГЭ) по математике в 11-м классе не предусматривает проверку соответствующих компетенций учащихся.

Выходом из этого положения может быть включение в программу обучения студентов 1-го курса, а также в программу обучения учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений вводного курса аналитической геометрии, в котором учащиеся могли бы:

- познакомиться с классическими кривыми, их свойствами и приложениями;
- научиться изображать эти кривые и моделировать их в компьютерных программах;
- овладеть различными способами аналитического задания кривых.

Такой вводный курс аналитической геометрии был разработан и внедрён в учебный процесс в Институте математики и информатики Московского педагогического государственного университета. Его основу составил курс по выбору [1], разработанный в рамках проекта «Математика. Инженеры будущего» издательства «Просвещение».

Он рассчитан на 36 академических часов и содержит четыре модуля.

Первый модуль посвящён кривым как геометрическим местам точек. В нём рассматриваются

- классические кривые (парабола, эллипс, гипербола),
- именные кривые (конхоида Никомеда, улитка Паскаля, циссоида Диоклеса, лемниската Бернулли, кривые Крамера и др.).

Показываются возможности использования компьютерной программы GeoGebra для моделирования кривых как геометрических мест точек.

Во втором модуле изучаются кривые как траектории движения точек. Среди таких кривых: циклоида, эпициклоиды и гипоциклоиды, кардиоида, астроида, кривая Штейнера и др. Показываются возможности использования компьютерной программы GeoGebra для моделирования кривых как траекторий движения точек и реализации самих движений точек.

В третьем модуле рассматриваются геометрические преобразования плоскости, включающие:

- центральную и осевую симметрию, поворот, симметрию n -го порядка,
- параллельный перенос, движение, подобие, гомотетию и инверсию, которая используется для знакомства учащихся с моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Показываются возможности использования компьютерной программы GeoGebra для моделирования различных геометрических преобразований плоскости.

Четвёртый модуль посвящён аналитическому заданию кривых на плоскости. В нём рассмотрены различные способы аналитического задания кривых, среди которых:

- задание кривых уравнениями в декартовых координатах;
- параметрическое задание кривых;
- задание кривых уравнениями в полярных координатах.

Выводятся уравнения изученных ранее кривых как геометрических мест точек и как траекторий движения точек. Среди кривых, заданных уравнениями в полярных координатах, рассмотрены: спираль Архимеда, гиперболическая спираль, спираль Галилея, логарифмическая спираль, n -лепестковые розы и др. Устанавливаются формулы для геометрических преобразований координатной плоскости. Показывается использование компьютерной программы GeoGebra для моделирования аналитически заданных кривых и геометрических преобразований плоскости.

Каждый модуль, помимо теоретического материала, содержит задачи на изображение кривых, доказательство их свойств, нахождение аналитического задания кривых, моделирование кривых в компьютерных программах.

С целью повышения эффективности изучения курса к нему прилагаются пособие по использованию компьютерной программы GeoGebra [2] и четыре рабочие тетради, в которых

учащиеся могут решать предлагаемые задачи, устанавливать свойства геометрических фигур, проводить необходимые построения на клетчатой бумаге.

Проведение курса в 2025-2026 учебном году показало доступность предлагаемого материала для студентов 1-го курса, повысило их интерес, мотивацию и, как следствие, успеваемость по аналитической геометрии.

Ключевые слова: вводный курс, аналитическая геометрия.

2020 Mathematics Subject Classification: 51N20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов В.А., Смирнова И.М. *Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы. Учебное пособие*, Просвещение, Москва (2025).
- [2] Смирнов В.А., Смирнова И.М. *Геометрия с GeoGebra. Планиметрия*, Прометей, Москва (2018).

PISA НӘТИЖЕЛЕРІ НЕГІЗІНДЕ МЕКТЕПТЕ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫН ОҚЫТУДЫ ЖЕТІЛДІРУ

Г.Ж. КЕНЕСАРИЕВА¹, А.Ж. АДИБЕВА²

^{1,2}Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау, Қазақстан

¹guldanakenesarieva7@gmail.com, ²adiyeva.a@mail.ru

Кіріспе. Қазіргі заманда қоғамның қарқынды дамуы, ақпарат көлемінің артуы және белгісіздік жағдайларының көбеюі жеке тұлғаның сандық және аналитикалық ойлау қабілеттеріне жаңа талаптар қояды. Мұндай жағдайда ықтималдықтар теориясы мен статистика тек математиканың бір бөлімі ғана емес, күнделікті өмірде дұрыс шешім қабылдаудың маңызды құралына айналады. Оқушылардың математикалық дайындық деңгейін халықаралық деңгейде бағалайтын PISA (Programme for International Student Assessment) зерттеуі математиканы нақты өмірлік жағдаяттарда қолдану қабілетіне басымдық береді. Бұл зерттеуде ықтималдықтар теориясы кездейсоқ құбылыстарды түсіндіру, тәуекелді бағалау және деректерге сүйене отырып қорытынды жасау дағдыларымен тікелей байланысты қарастырылады. Соған қарамастан, мектеп тәжірибесінде ықтималдықтар теориясы көбіне формальды есептермен шектеліп, оның өмірлік мәні жеткілікті деңгейде ашылмайды. Осыған байланысты PISA нәтижелерін ескере отырып, ықтималдықтарды оқыту әдістемесін жетілдіру өзекті ғылыми-педагогикалық мәселе болып табылады.

PISA нәтижелерін талдау және ықтималдықтарға байланысты негізгі қиындықтар. PISA халықаралық зерттеулерінің деректері оқушылардың ықтималдықтар теориясына қатысты тапсырмаларды орындау барысында елеулі қиындықтарға кезігетінін көрсетеді. Бұл қиындықтар тек есептеу дағдыларының әлсіздігімен емес, ең алдымен ықтималдық ұғымының мағынасын терең түсінбеумен байланысты. Біріншіден, оқушылардың көпшілігі ықтималдықты сипаттайтын ақпаратты дұрыс интерпретациялай алмайды. Екіншіден, теориялық ықтималдық пен тәжірибелік (эмпирикалық) жиілік ұғымдарының ара жігін ажыратуда қиындықтар туындайды. Үшіншіден, интуитивті ойлауға шамадан тыс сену кең таралған құбылыс болып табылады. Төртіншіден, алынған нәтижені түсіндіру және негіздеу қабілетінің жеткіліксіздігі байқалады. Аталған қиындықтар оқушылардың ықтималдықтар теориясын формальды деңгейде меңгергенін, алайда оны өмірлік жағдаяттарда қолдану дағдысының жеткіліксіз екенін көрсетеді.

Ықтималдықтар теориясын оқытуды жетілдірудің әдістемелік бағыттары. PISA талаптарына сәйкес мектептегі ықтималдықтар теориясын оқытуды жетілдіру үшін дәстүрлі тәсілдермен қатар жаңа әдістемелік бағыттарды енгізу қажет. Ең алдымен, контекстік оқытуға негізделген тапсырмаларды кеңінен қолдану маңызды. Күнделікті өмірден алынған жағдайлар (ауа райы болжамы, тәуекелді бағалау, ойын элементтері) оқушылардың қызығушылығын арттырады. Сонымен қатар, есеп нәтижесін талдау мен интерпретациялауға ерекше назар аудару

қажет. Оқушылар ықтималдықтың сандық мәнін ғана емес, оның мағынасын да түсіндіре алуы тиіс. Пәнаралық байланысты күшейту де маңызды бағыттардың бірі болып табылады. Ықтималдықты информатика, жаратылыстану және экономика элементтерімен байланыстыра оқыту білімнің қолданбалы сипатын арттырады. Ақырында, тәжірибе, модельдеу және цифрлық симуляция әдістерін қолдану оқушылардың ықтималдық құбылыстарын терең түсінуіне мүмкіндік береді.

Талқылау. PISA зерттеулерінің нәтижелері ықтималдықтар теориясының мектеп математикасындағы рөлін қайта қарастыру қажеттігін көрсетеді. Ықтималдық – тек есептеу объектісі емес, ол белгісіздік жағдайында ой қорыту мен шешім қабылдаудың маңызды құралы. Сондықтан ықтималдықтарды оқытуда формулаларды жаттатудан гөрі мағыналық түсінуге, нәтижені интерпретациялауға және өмірлік жағдайлармен байланыстыруға басымдық беру қажет. Мұндай тәсіл оқушылардың сыни және аналитикалық ойлау қабілеттерін дамытуға ықпал етеді.

Қорытынды. Жүргізілген талдау мен PISA халықаралық зерттеулерінің нәтижелері мектепте ықтималдықтар теориясын оқыту әдістемесін жетілдірудің аса өзекті екенін айқын көрсетеді. Қазіргі білім беру жағдайында ықтималдықтар теориясы тек математиканың жеке бір тарауы ретінде емес, оқушылардың функционалдық математикалық сауаттылығын қалыптастыратын маңызды құрал ретінде қарастырылуы тиіс. Мақалада ұсынылған контекстік тапсырмаларға негізделген оқыту, модельдеу және симуляция әдістерін қолдану, сондай-ақ ықтималдық пен статистиканы өзара байланыста қарастыру оқушылардың ықтималдықтық ойлауын дамытуға мүмкіндік береді. Бұл тәсілдер оқушыларды кездейсоқ құбылыстарды түсінуге, белгісіздік жағдайында саналы шешім қабылдауға және деректерге сыни көзқараспен қарауға үйретеді.

Сонымен қатар, ықтималдықтар теориясын оқытуды жетілдіру білім алушылардың тек математикалық дайындығын ғана емес, олардың жалпы оқу сауаттылығын, аналитикалық және сыни ойлау қабілеттерін дамытуға да оң әсер етеді. Мұндай дағдылар қазіргі қоғамда, әсіресе ақпараттық және цифрлық ортада, аса маңызды болып табылады. Қорытындылай келе, PISA нәтижелеріне сүйене отырып, мектепте ықтималдықтар теориясын оқытуды жаңғырту – білім беру жүйесінің стратегиялық міндеттерінің бірі. Ықтималдықты оқыту формальды есептеуден функционалдық қолдануға бағытталған жағдайда ғана оқушылардың математикалық сауаттылығы артып, олар болашақта әлеуметтік, кәсіби және жеке өмірінде кездесетін белгісіздік жағдайларына дайын, саналы шешім қабылдай алатын тұлға ретінде қалыптасады.

Кілтті сөздер: PISA, математикалық сауаттылық, ықтималдықтар теориясы, функционалдық сауаттылық, мектеп математикасы, статистика.

2020 Mathematics Subject Classification: 9711, 97K10, 97K50

ӘДЕБИЕТ

- [1] OECD. *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*, OECD Publishing, Paris (2023).
- [2] OECD. *PISA 2018 Results: What Students Know and Can Do*, OECD Publishing, Paris (2019).
- [3] Garfield J., Ben-Zvi D. *Developing Students' Statistical Reasoning*, Springer, (2008).
- [4] Gal I. Adults' statistical literacy, *International Statistical Review*, **70**:1 (2002), 1–25.
- [5] Batanero C. et al. *Research on teaching and learning probability*, ZDM Mathematics Education, (2016).
- [6] Shaughnessy J. M. *Probability and statistics*, Handbook of Research on Mathematics Teaching, (2007).
- [7] Franklin C. et al. *Statistical education of teachers*, American Statistical Association, (2015).

АВТОРСКАЯ МЕТОДИКА НАГЛЯДНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И АЛГОРИТМИЗАЦИИ РАССУЖДЕНИЙ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

И.М. КИМ¹, Н.К. МАДИЯРОВ²

^{1,2}Южно-Казахстанский государственный университет имени М.Ауэзова, Шымкент,
Казахстан

inessiya65@gmail.com

Геометрия представляет собой строгую доказательную систему, в которой каждое новое знание опирается на ранее установленные утверждения. Такая логика построения содержания обуславливает поэтапное и распределённое во времени изучение взаимосвязанных понятий и свойств, что создаёт объективные трудности освоения курса и нередко приводит к фрагментарному усвоению материала и затруднениям при решении задач. Проблема устойчивых трудностей в изучении геометрии во многом связана с отсутствием у учащихся целостного представления о структуре курса.

Анализ собственной 38-летней педагогической практики показывает, что одной из причин указанных трудностей является различие подходов к изучению теоретического материала и к решению задач: изложение теории традиционно строится от частного к общему, тогда как решение задач требует движения от общего к частному. Данное противоречие затрудняет формирование устойчивых ориентиров рассуждений и системного понимания содержания курса.

В целях преодоления обозначенной проблемы разработана методика наглядного планирования и алгоритмизации рассуждений (МНПА), направленная на формирование целостного понимания школьного курса геометрии, повышение осознанности учебной деятельности и развитие рациональных способов решения задач.

Методика выстроена как целостная система и опирается на четыре взаимосвязанных концептуальных положения, представленные в виде цели, механизма, инструментов и результатов.

Первое положение состоит в необходимости формирования у учащихся целостного видения структуры курса геометрии как единой логически организованной системы.

Второе положение предполагает структурную реорганизацию содержания на основе принципа движения «от общего к частному и обратно к общему», что обеспечивает согласование логики изучения теории и логики решения задач.

Третье положение заключается в использовании наглядного планирования как системообразующего инструмента организации содержания. Реализация данного положения осуществляется через трёхуровневую систему планирования: долгосрочные схемы структуры курса (7–11 классы), среднесрочные планы тематических блоков и краткосрочные планы конкретных тем.

Четвёртое положение отражает стратегию рассуждений учащихся при изучении теории и решении задач, как результат применения методики МНПА. Обобщённые алгоритмические ориентиры обеспечивают последовательный анализ геометрической ситуации, осознанный выбор свойств и построения логически завершённого рассуждения.

Совокупность указанных положений образует целостную педагогическую систему, включающую цель, содержание, средства, способы организации учебной деятельности, планируемые результаты и обеспечивающую методическую поддержку деятельности учителя. Методика не требует изменения действующих учебных программ и может быть внедрена в массовую школьную практику, не зависимо от страны и уровня подготовки учащихся. Наглядное планирование может быть дополнением к любому учебнику геометрии не зависимо от автора.

Эффективность авторской методики подтверждена результатами педагогического эксперимента, включавшего анкетирование и контрольные работы. Полученные данные свидетельствуют о формировании более целостной системы знаний, повышении осмысленности рассуждений при решении задач и росте учебной мотивации учащихся.

Ключевые слова: уравнение диффузии, однородное тело, начальное состояние, локальная неоднородность, прозрачные граничные условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 97G40, 97C30

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Vygotsky L.S. *Myshlenie i rech'*, Labirint, Moscow (1999).
- [2] Kim I.M. Sistematizatsiya i strukturirovanie uchebnogo materiala po geometrii i ee ispol'zovanie dlya ratsional'nogo resheniya geometricheskikh zadach, *Otkrytyi urok*, 1Sentyabrya.ru (2008).
- [3] Kim I.M. Naglyadnoe planirovanie geometrii, *Otkrytaya shkola*, **9**:160 (2016), 20–22.

БОЛАШАҚ МАТЕМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІН ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФИГУРАЛАРДЫ КЕСКІНДЕУГЕ ОҚЫТУДА GEOGEBRA-НЫ ҚОЛДАНУДЫҢ ДИДАКТИКАЛЫҚ МҮМКІНДІКТЕРІ

А.Н. КӨКЕШ¹, Н.Б. ЖӘҢГІР², Н.К. МАДИЯРОВ³

¹М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан

¹kokesh.azhar@mail.ru, ²zhangir_nurgul@mail.ru, ³madnur69@mail.ru

Болашақ математика мұғалімдерін геометриялық фигураларды кескіндеуге даярлау қазіргі педагогикалық білім беру жүйесінің маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Геометрияны оқыту барысында фигураларды дұрыс және көрнекі кескіндеу оқушылардың кеңістіктік ойлауын дамытуда, геометриялық ұғымдарды түсінуде және есептерді шешуде ерекше рөл атқарады. Сондықтан болашақ мұғалімдерді геометриялық фигураларды кескіндеуге даярлаудың мазмұндық-әдістемелік құрылымын анықтау педагогикалық және әдістемелік тұрғыдан маңызды мәселе болып саналады.

Аталған даярлық құрылымы бірнеше өзара байланысты компоненттерді қамтиды: теориялық-геометриялық дайындық, кескіндеу және графикалық дағдыларды қалыптастыру, әдістемелік дайындық, цифрлық технологияларды қолдану және практикалық-зерттеушілік әрекет. Бұл компоненттердің қамтылуы геометрияны оқыту теориясы мен әдістемесінің талаптарына, сондай-ақ болашақ мұғалімнің кәсіби қызметінің ерекшеліктеріне негізделеді [1, 2].

Мақаланың мақсаты – болашақ математика мұғалімдерін геометрияны оқытуда көпжақтарды кескіндеу мен оның қималарын салуға әдістемелік даярлауда GeoGebra бағдарламасын қолданудың дидактикалық мүмкіндіктерін көрсету.

Геометрия пәні білім алушылармен зерттеу қызметін ұйымдастыруға кең мүмкіндік береді, ал мұндай қызмет түрлерінің бірі — математикалық эксперимент. Оны интерактивті жұмыс формаларына жатқызуға болады, өйткені ол оқу міндеттерін шешу үдерісінде оқытушы мен білім алушылардың диалогтік өзара әрекеттесуін қамтамасыз етеді [2].

Біз математикалық экспериментті, М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті 7M01510-Математика білім беру бағдарламасының магистранттарына (магистранттар саны – 40) «Бейіндік сыныптардағы геометрияның таңдаулы тараулары» пәнін оқыту барысында жүргіздік.

Эксперименттік жұмысты жүргізу үшін біз GeoGebra бағдарламасын таңдадық, себебі ол әртүрлі геометриялық денелер мен олардың қималарын салуға; алынған қиманың пішінін анықтауға; оны өзгертуге; денені жазықтықпен қиғанда пайда болған фигуралардың қабырғаларын, бұрыштарын, аудандарын табуға және басқа да әрекеттерді орындауға мүмкіндік береді.

Математикалық эксперимент төрт кезеңнен тұрды:

Эксперименттің бірінші кезеңі — ұғымдармен жұмыс. Бұл кезеңде теориялық материалды жинақтау және талдау жүзеге асырылады. Эксперимент басында оқытушы білім алушыларға келесі анықтамаларды еске түсіруді ұсынады: көпжақтар, оның кескінін салу, қима, қима салу әдістері, түзуге параллель жазықтық, түзуге перпендикуляр жазықтық және т.б.

Екінші кезең — білім алушылардың болжамдар ұсынуы. Бұл кезеңде білім алушылар көпжақты жазықтықпен қиғанда қандай фигуралар пайда болуы мүмкін екендігін болжайды, мысалы: үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар, алтыбұрыштар және олардың түрлерін нақтылайды. Егер үшбұрыш болса, ол дұрыс үшбұрыш па, теңбүйірлі ме, тікбұрышты ма; төртбұрыш болса, параллелограмм, ромб, тіктөртбұрыш, шаршы, трапеция және т.с.с..

Үшінші кезең — болжамдарды компьютерлік модельдеу арқылы тексеру. Ол GeoGebra бағдарламасында көпжақ моделін құруды және оны жазықтықпен қиғанда пайда болатын ықтимал қималарды анықтауды қамтиды. Бұл кезеңде оқытушы негізінен кеңесші рөлін атқарып, қимада алынған фигуралар жөніндегі білім алушылар жауаптарына түсініктеме берді. Сондай-ақ, зерттеудің математикалық құрамдас бөлігі, мысалы, қажетті қиюшы жазықтықты жүргізуге мүмкіндік беретін нүктелердің орналасу жағдайлары мен оған сәйкес алынған қиманың түрі білім алушылармен бірге талқыланды.

Төртінші кезеңде - білім алушылар алынған нәтижеге жеткізетін әрекеттер алгоритмін талқылап, орындалған жұмысты қорытындылады және көпжақты жазықтықпен қиғанда алынатын фигуралар туралы тұжырымдар жасады.

Математикалық эксперимент барысында бірнеше зерттеу есептері ұсынылып, білім алушылардың зерттеу болжамдары GeoGebra бағдарламасының динамикалық мүмкіндіктерін қолдана отырып талданды.

Қорыта келгенде, жүргізілген эксперимент болашақ математика мұғалімдерін көпжақтарды кескіндеу мен олардың қимасын салуға оқытуда GeoGebra бағдарламасын қолдану көрнекілікті арттыруға, зерттеушілік әрекетті ұйымдастыруға, алгоритмдік ойлауды қалыптастыруға және болашақ математика мұғалімдерінің әдістемелік даярлығын жетілдіруге бағытталған маңызды дидактикалық мүмкіндіктерді қамтамасыз ететінін көрсетті.

Кілтті сөздер: GeoGebra, геометрияны оқыту, геометриялық фигураларды кескіндеу, көпжақтар қимасын салу, математикалық эксперимент, цифрлық технологиялар.

2020 Mathematics Subject Classification: 97G40, 97U70, 97C30

ӘДЕБИЕТ

- [1] Abilkassymova A.E. *Matematikany oqytudyn teoriyasy men adistemesi: didaktikalyk-adistemelik negizderi*, Mektep, Almaty (2014).
- [2] Karaev Zh.A., Abdikalikova B.A. Bolashak mugalimderdi kasibi dayarlauda cifrlyk bilim beru resurstaryn koldanu, *Pedagogika zhane psixologiya*, **45**:4 (2020), 97–104.
- [3] Kokesh A.N., Kalimbetov B.T., Madiyarov N.K. Cifrlyk tehnologiyalardy koldanyp bolashak matematika mugalimderin geometriyalyk figuralardy keskindeyuge okytu adisteri, in: *Gumilyov Journal of Pedagogy*, Astana (2025), 248–266.

МОДЕЛЬ НАЦИОНАЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ НАЧАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН: КОМПЕТЕНТНОСТНАЯ АРХИТЕКТУРА И ОРИЕНТАЦИЯ НА РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ

Б.К. ХАЙДАРОВ

Министерство дошкольного и школьного образования Республики Узбекистан,

Ташкент, Узбекистан

khaydarov2021@gmail.com

В условиях глобальной трансформации образовательных систем приоритетом становится формирование функциональной грамотности и способности применять знания в реальных жизненных ситуациях. Национальная учебная программа по математике для 1–4 классов Республики Узбекистан разработана на основе государственных образовательных стандартов и отражает переход к компетентностной модели обучения.

Программа ориентирована на интеграцию предметных результатов и универсальных компетенций. В её основе лежат развитие критического и креативного мышления, навыков сотрудничества и коммуникации, цифровой и технологической грамотности, а также социально-эмоциональных компетенций. Существенное внимание уделяется формированию личностных, гражданских, национальных и общечеловеческих ценностей через содержание математического образования.

Содержательная структура включает четыре взаимосвязанные области: «Числа и операции», «Геометрия и измерения», «Алгебра и отношения», «Статистика и вероятность». Развитие учебных целей организовано по спиральному принципу — от базовых представлений о числе в 1 классе до операций с десятичными дробями, элементами вероятности и координатной геометрии в 4 классе.

Ключевой инновацией программы является выделение направления «Применение математики при решении проблем» как системообразующего компонента. Модель решения включает пять этапов: понимание проблемы, математическое моделирование, применение математических методов, интерпретацию и оценку альтернативных решений, представление оптимального результата. Тем самым математическое обучение рассматривается как процесс формирования мышления и способности к обоснованному принятию решений.

Особенностью программы является кодирование учебных целей и когнитивных операций (анализ, синтез, индукция, дедукция, обоснование, оценивание и создание), что обеспечивает прозрачность планирования и мониторинга образовательных результатов.

Практическая значимость модели заключается в создании прочной основы для дальнейшего изучения математики, развитии математической и функциональной грамотности, а также подготовке учащихся к участию в международных исследованиях качества образования.

Ключевые слова: начальное математическое образование, компетентностный подход, функциональная грамотность, математическое моделирование, решение проблем, учебная программа.

2020 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97D40.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОСЕВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL SOLVER И АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

К.М. МААТОВ ¹, Ж.И. МАМБЕТОВ ²

^{1,2}*Ошский технологический университет имени М.М. Адышева*

Maatov.k.m@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимизации структуры посевных площадей сельскохозяйственного предприятия Кыргызстана на основе методов линейного программирования и алгоритмов машинного обучения. Разработана экономико-математическая модель распределения земельных ресурсов с учётом ограничений по площади, трудовым и материальным ресурсам, а также минимальным объёмам производства. Для численной реализации использована надстройка Solver в MS Excel. Алгоритмы машинного обучения применены для прогнозирования урожайности культур с учётом климатических и агротехнических факторов. Интеграция оптимизационной модели и прогнозной аналитики обеспечивает повышение эффективности планирования сельскохозяйственного производства.

Эффективное распределение посевных площадей является одной из ключевых задач управления аграрным производством в условиях ограниченности земельных и материальных ресурсов Кыргызстана. Горный рельеф и климатическая нестабильность требуют применения методов математического моделирования [1].

В работе построена модель линейного программирования, где переменные отражают площади посева основных культур, а целевая функция направлена на максимизацию прибыли предприятия при ограничениях по земельным, трудовым и техническим ресурсам, а также

по минимальному объёму производства [2]. Численная реализация выполнена в MS Excel с использованием надстройки Solver, что обеспечивает практическую доступность метода.

Для повышения точности планирования применены алгоритмы машинного обучения, позволяющие прогнозировать урожайность на основе климатических и агротехнических данных. Прогнозные показатели интегрированы в оптимизационную модель, что повышает устойчивость решений к изменению внешних условий [3].

Апробация модели на примере хозяйства Ошской области показала возможность увеличения потенциальной прибыли на 8–12% по сравнению с традиционным планированием и более рационального использования ресурсов.

Таким образом, интеграция методов линейного программирования и машинного обучения является эффективным инструментом формирования рациональной структуры посевных площадей и повышения устойчивости агропредприятия.

Ключевые слова: оптимизация, линейное программирование, посевные площади, MS Excel Solver, машинное обучение, аграрное планирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 569.8

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Асанкулова М., Жусупбаев А. Математическая модель оптимизации производства и ввоза сельхозпродукции, *Успехи современной науки и образования*, 5 (2016), 121–123.
- [2] Асанкулова М., Жусупбаев А., Жусупбаев Г.А. Определение максимального дохода предприятия при ограниченном объеме финансов, *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*, 3:7 (2015), 101–105.
- [3] Маатов К.М. Ишкананын айдоо аянтына айыл чарба эгиндерин өстүрүүнү математикалык моделдештирүү, *Ош мамлекеттик университетинин жарчысы. Математика. Физика. Техника*, 1:4 (2024), 131–135.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

А.Т. МАМАТКАСЫМОВА¹, Э.М. ЖУСУПОВА²,
С.Э. САГЫНБАЙ УУЛУ ЭЛАМАН³

^{1,2,3} Ошский технологический университет, Ош, Кыргызстан
mamatkasymova1973@mail.ru

В настоящее время применение искусственного интеллекта в математике ежедневно используется в различных областях человеческой деятельности для решения задач в экономике, технике и других областях.

Математика — это абстрактная наука. При обучении математике студентов, ориентированных на технологии, становится возможным работать с многомерными данными и объектами, которые могут быть представлены в различных интерпретациях математического поля. Методы машинного обучения постепенно проникают в области математики, связанные с большими данными, решая масштабные задачи. В последние десятилетия влияние искусственного интеллекта в области математики значительно расширилось, и он является полезным инструментом. Для нейронных вычислений требуются мощные компьютеры, большие объемы данных и алгоритмы нейронных сетей. Сегодня основным способом решения многих задач искусственного интеллекта является использование сверточных нейронных сетей.

Искусственный интеллект описывает машины, способные выполнять когнитивные функции, такие как решение проблем и обучение, связанные с мышлением студентов. Он включает в себя понимание, разработку и внедрение методов представления информации, собранной из внешней среды и хранящейся в компьютере. Это помогает понимать информацию и планировать дальнейшие действия. Несмотря на разнообразие нейронных сетей, все они имеют

общие черты. Подобно человеческому мозгу, все они состоят из множества взаимосвязанных, похожих элементов — нейронов, — которые имитируют нейроны головного мозга.

Конечно, это поднимает вопрос о том, как подходить к математическим задачам с точки зрения искусственного интеллекта и насколько каждый студент способен понимать и осваивать этот поток знаний на лекциях и практических занятиях по математике. Использование искусственного интеллекта в математике предполагает обучение студентов университета математическим теоремам, формулам и определениям посредством нестандартных логических задач. Независимо от стандартных математических задач, специалисты в различных областях могут, прежде всего, сравнивать известные данные, находить необходимые логические связи и делать выводы, подтверждающие или опровергающие исходное утверждение на основе их анализа. Таким образом, исследование показало, что использование различных методов компьютерного представления знаний в математике, а также применение искусственного интеллекта в методологии и технологиях преподавания математики может быть полезно не только в области прикладной математики, но и при решении логических задач, решении дифференциальных уравнений и т. д.

Давайте рассмотрим некоторые математические приложения, в которых используется искусственный интеллект:

1. Photomath — позволяет пользователям сфотографировать математическую задачу, и приложение мгновенно предоставит пошаговое решение. Это бесценный ресурс для пользователей.

2. Google Socrat — это платформа пошаговое объяснение математических задач по темам, начиная от элементарной арифметики и заканчивая сложными вычислениями.

3. Wolfram Alpha — отличная платформа для решения сложных математических задач и построения графиков функций. Она предлагает пошаговые решения, помогающие студентам понять ключевые понятия. Это бесценный инструмент, предлагающий пошаговые решения, помогающие студентам понять ключевые понятия, и содержащий обширную базу математических понятий, формул и уравнений.

Искусственный интеллект, включая чат-боты, открывает новые возможности для гибкого и персонализированного обучения. Благодаря своей способности повышать доступность и автоматизировать рутинные задачи, использование искусственного интеллекта в математике сегодня весьма актуально.

Для того чтобы искусственный интеллект в математике получил широкое распространение, стал высококачественным и эффективным, крайне важно продолжать исследования в этой области и разрабатывать новые инструменты и технологии. Несмотря на все преимущества, использование искусственного интеллекта в науке и технике сопряжено с рядом серьезных проблем. Искусственный интеллект в математике представляет собой ряд потенциальных угроз.

Например, академические эксперты опасаются, что искусственный интеллект может заменить человеческий интеллект и привести к потере креативности в решении математических задач. Кроме того, существуют опасения, что использование искусственного интеллекта в математике может привести к замене людей компьютерами, что повлечет за собой потерю рабочих мест или найм менее квалифицированного персонала в определенных областях, таких как бухгалтерский учет или аналитика.

Поэтому, помимо технологических достижений, необходимо также учитывать различные этические, правовые и социальные вопросы, связанные с использованием искусственного интеллекта в математике.

Выводы. Использование искусственного интеллекта в математике обладает огромным потенциалом для повышения качества и точности математических исследований, а также для создания новых инструментов и технологий, которые помогут не только математикам, но и специалистам в других областях науки и техники. Однако для эффективного использования искусственного интеллекта необходимо учитывать множество технических, социальных и этических вопросов, связанных с его применением в математике. При правильном подходе к ис-

куственному интеллекту и технологическому прогрессу он принес много пользы математике, улучшив способность людей решать сложные математические задачи, выявив новые закономерности и формулы, а также улучшив образование в этой области, что является новым и захватывающим направлением.

Ключевые слова: методы машинного обучения, искусственный интеллект, большие данные, методы, технология, коммуникация, информация, компьютер.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Анохин К.В., Новоселов К.С., Смирнов С.К. и др. *Искусственный интеллект для науки и наука для искусственного интеллекта*, Вопросы философии, Москва (2022)
- [2] Гаврилова Т.А. *Основы интеллектуальных систем*, Санкт-Петербург, Петербург (2000).
- [3] Константинова Л. В., Ворожихин В. В., Петров А. М., Титова Е. С., Штыхно Д. А. *Генеративный искусственный интеллект в образовании: дискуссии и прогнозы*, Открытое образование, **27:2** (2003), 36–48.
- [4] Гаркуша, Н. С., Городова, Ю. С. Г in: *Педагогические возможности ChatGPT для развития познавательной деятельности студентов.*, Профессиональное образование и рынок труда, Москва (2023), 11(52). - 2–23.

Integrated Modeling Approach for Explainable, Trustworthy, Responsible, and Robust AI

A. MOSAVI¹, S. BAIPAKBAYEVA², L. AIDAROVA³, N. TESHEBAYEV⁴,
M. MANSUROVA⁵, I. FELDE⁶, M. KALIMOLDAYEV⁷

^{1,6}John von Neumann Faculty of Informatics, Obuda University, Budapest, Hungary

^{2,3,4,5,7}Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

amir.allen.hu@gmail.com

Artificial intelligence (AI) systems are increasingly deployed in high-stakes domains such as healthcare, finance, and cybersecurity. These systems must not only deliver accurate predictions but also ensure transparency, accountability, ethical compliance, and robustness. Explainability, trustworthiness, responsibility, and robustness constitute critical dimensions that define reliable AI deployment. Despite advances in individual areas, few approaches integrate these dimensions into a coherent modeling strategy that addresses both technical performance and societal expectations. This research addresses the problem of designing AI systems that simultaneously satisfy explainability, trustworthiness, responsibility, and robustness criteria. The central question is how to construct an integrated modeling approach that ensures AI decisions are interpretable, ethically aligned, technically resilient, and accountable to stakeholders. Previous research has explored explainable AI (XAI) techniques, such as intrinsic and post-hoc interpretability methods, model-agnostic tools like SHAP and LIME, and human-centered design strategies (Yang et al., 2025; Singh et al., 2024; Naeem & Farhan, 2025). Studies have also examined robustness through adversarial defenses and sensitivity analysis (Tiwari & Mohanty, 2025; Ahmed et al., 2024) and governance mechanisms for accountability and ethical compliance (Finzel, 2025; Muñoz-Ordóñez et al., 2025). While these efforts provide substantial insights into individual dimensions, they often lack integration into a unified modeling approach that operationalizes all criteria simultaneously.

The contribution of this research is to provide a comprehensive methodology that bridges these gaps. By integrating explainability, trust, ethical alignment, human-centered design, and robustness, AI systems can become not only technically effective but socially acceptable and legally compliant. This integration is particularly urgent in applications where decisions directly impact human well-being or involve sensitive data. The approach synthesizes intrinsic and post-hoc explainability techniques, human-centric interaction design, ethical and regulatory compliance, hybrid modeling strategies, and robustness measures including adversarial defenses and sensitivity analyses. Model-driven engineering (MDE) and structured maturity models, such as MM4XAI-AE,

are used to embed explainability and accountability into the design process. The methodology is validated through case studies in healthcare, cybersecurity, and agriculture, demonstrating improvements in transparency, trust, and operational reliability. Findings indicate that an integrated modeling approach enhances model interpretability, increases stakeholder trust, ensures ethical compliance, and strengthens robustness against adversarial or environmental perturbations. Hybrid models successfully balance accuracy and transparency, while structured frameworks provide measurable guidance for operational deployment. Applications in healthcare and cybersecurity show that explainable and robust models improve decision-making, reduce risk, and satisfy regulatory requirements. The significance of this research lies in its demonstration that comprehensive integration of explainability, trustworthiness, responsibility, and robustness is feasible and effective. The results provide a replicable methodology for practitioners and policymakers seeking to deploy AI systems that are technically sound, ethically responsible, and socially aligned. This work contributes to establishing standards for trustworthy and accountable AI in high-stakes contexts.

References

- [1] Ahmed, S. T., Barua, S., Fahim-Ul-Islam, M., Chakrabarty, A. Enhancing precision in rice leaf disease detection: A transformer model approach with attention mapping. 2024 International Conference on Advances in Computing, Communication, Electrical, and Smart Systems: Innovation for Sustainability, iCACCESS, (2024).
- [2] Finzel, B. Toward trustworthy AI with integrative explainable AI frameworks. IT - Information Technology. Muñoz-Ordóñez, J., Cobos, C., Vidal-Rojas, J. C., Herrera, F. (2025). A maturity model for practical explainability in artificial intelligence-based applications: Integrating analysis and evaluation (MM4XAI-AE) models. International Journal of Intelligent Systems.(2025).
- [3] Naeem, M. R., Farhan, M. Bridging the gap: Explainable AI in threat detection and cybersecurity. Explainable Artificial Intelligence (XAI) for Next Generation Cybersecurity: Concepts, Challenges and Applications, (2025).
- [4] Singh, J., Rani, S., Srilakshmi, G. Towards explainable AI: Interpretable models for complex decision-making. 2024 International Conference on Knowledge Engineering and Communication Systems, ICKECS, (2024).
- [5] Tiwari, N., Mohanty, S. N. Trustworthy and explainable LLM security frameworks. Securing Large Language Models Against Emerging Threats. (2025).
- [6] Yang, Y., Wen, L., Li, L.. Explainable AI for time series prediction in economic mental health analysis. Frontiers in Medicine. (2025).

ҚАЗІРГІ БІЛІМ БЕРУ ЖҮЙЕСІНДЕ ФУНКЦИЯНЫ ОҚЫТУДЫҢ ТРАНСФОРМАЦИЯСЫ: ДӘСТҮРЛІДЕН SMART LEARNING-КЕ ДЕЙІН

Г.Б. МІНСІЗБАЕВА¹, С.Қ. МЕНЛИХОЖАЕВА²

^{1,2}Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Қызылорда, Қазақстан

¹gbahitova.03@gmail.com, ²saulesh_menli@mail.ru

Вақыт талабына сай жасанды интеллект технологиялары білім саласында, оқыту процесінде интеграциялануда. Цифрлық трансформацияның қарқынды дамуы орта білім берудегі «функция» ұғымын оқыту әдістемесін қайта пайымдауда да өзекті болып отыр. Функция – алгебра және анализ бастамалары курсына негізгі құраушы ұғым. Функционалдық тәуелділікті меңгеру нақты арифметикалық тәуелділіктерден абстрактілі модельдерге көшуге негіз болады. Білім алушылардың функционалдық ойлауын қалыптастырады. Алайда, дәстүрлі оқыту әдістемесі мен Smart Learning технологиясының мақсатқа жету жағдайлары арасындағы қайшылық сақталуда. Дәстүрлі әдістеме қасиеттер мен анықтамаларды, графиктік интерпретацияны жүйелі түсіндіруге бағытталған. Смарт – білім беру ортасы мазмұнды дараландыруға, оқу нәтижелерін жедел талдауға мүмкіндік береді. Соның нәтижесінде функцияны

мектеп математикасында оқытуда жасанды интеллект құралдарын кіріктірудің педагогикалық сапалық көрсеткіштерін саралау мәселесі туындайды.

Зерттеудің мақсаты – функцияны оқытудағы дәстүрлі әдістеме мен Smart Learning технологиясын салыстырмалы талдау, педагогикалық мүмкіндіктер жиынтығын айқындау, функционалдық оқытуды трансформациялаудың тиімді моделін ұсыну. Функцияны оқыту әдістемесінің қазіргі жағдайын талдау, салыстыру критерийлерін анықтау, интегративті оқыту моделін жобалау және цифрлық құралдардың оқу жетістіктеріне ықпалын бағалау сияқты міндеттер қойылады.

Зерттеудің әдіснамалық негізін жүйелік, іс-әрекеттік және құзыреттілік тәсілдер құрайды. Аталған бағыттар жалпы орта білім берудің жаңартылған мазмұнына сай мектеп математикасын оқыту әдістемесіне арналған еңбектерде теориялық тұрғыдан негізделген [1,2]. Педагогикалық тәжірибелік жұмыс барысында функция ұғымын оқытуды ұйымдастырудың екі моделі қарастырылды:

- дәстүрлі түсіндірмелі-репродуктивті тәсіл (анықтаманы енгізу, қасиеттерін дәлелдеу, типтік есептер шығару, графиктер салу) ;
- цифрлық орта элементтерімен толықтырылған бейімделген тәсіл (қателерді талдау, сараланған тапсырмалар ұсыну, интерактивті визуализацияны пайдалану).

Бағалау көрсеткіштері мектеп математикасы бағдарламасында айқындалған оқу мақсаттарына сәйкес анықталды. Функция анықтамасын саналы меңгеру, аналитикалық және графиктік интерпретация жасау, қасиеттерін стандартты емес есептерде қолдану, сондай-ақ рефлексия және өзіндік талдау дағдыларына басымдылық берілді.

Алынған деректер дәстүрлі модельдің теориялық ұғымдарды жүйелі және дәлелді түрде қалыптастыруда тиімді екенін растады. Бұл мектеп оқулықтарында ұсынылған мазмұндық-логикалық желімен үйлеседі. Оның артықшылықтары - ұғымдық аппараттың нақтылығы, материалдың құрылымдылығы және дәлелдеуге негізделген мазмұн. Сонымен қатар, оқу үдерісін дараландыру мүмкіндіктерінің шектеулігі, оқушылардың оқу қарқыны және танымдық стиліндегі айырмашылықтарды ескеру деңгейінің жеткіліксіздігі байқалды. Цифрлық құралдармен толықтырылған бейімделген тәсіл оқу белсенділігін арттыруға және функционалдық тәуелділіктерді көрнекі түрде түсіндіруге ықпал етті. Интерактивті графикалық модельдер аналитикалық өрнек пен оның геометриялық бейнесі арасындағы байланысты тереңірек ұғынуға мүмкіндік берді. Бұл тұжырымдар Smart Learning ортасының бейімделгіш, деректерге негізделген және оқушыға бағдарланған сипатын негіздейтін зерттеулермен сәйкес келеді [3]. Онда интеллектуалды технологиялар оқу мазмұнын даралауға және танымдық белсенділікті арттыруға ықпал ететін орта ретінде сипатталады.

Салыстырмалы талдау жасанды интеллектке негізделген әдістердің бейімделгіштігін және метапәндік құзыреттерді дамыту әлеуетін көрсетті. Сонымен қатар цифрлық құралдарды жүйесіз қолдану теориялық тереңдіктің әлсіреуіне әкелуі мүмкін. Сондықтан дәстүрлі дидактикалық қағидаларды Smart Learning технологияларымен ықпалдастыру арқылы ең жоғары нәтижеге қол жеткізіледі [4].

Тақырып аясында функция ұғымын біртіндеп меңгертуге бағытталған интеграциялық үлгінің тұжырымдамасы сипатталды: шамалар арасындағы бастапқы интуитивті байланыстарды талдаудан формальды анықтамаға өту және функция қасиеттерін есептерді шешу барысында қолдану қарастырылады, ал цифрлық құралдар негізінен көрнекілендіру мен оқу нәтижелерін жедел талдауды қолдаушы ресурс ретінде қолданылады. Аталған тәсіл математикалық дайындық сапасын жетілдіруге және білім алушылардың цифрлық ортада жұмыс істеу дағдыларын дамытуға ықпал етуі мүмкін.

Қорытындылай келе, функцияны оқытуды Smart Learning бағытына трансформациялау – қазіргі қажеттіліктерден туындайды. Алайда, жасанды интеллект дәстүрлі модельді алмастырмайды, оны толықтырып, дараландыру мен интерактивтілікті қамтамасыз етеді.

Кілтті сөздер: функция, Smart Learning, цифрлық білім беру, функционалдық ойлау.

2020 Mathematics Subject Classification: 97C70, 97D40, 97U70

ӘДЕБИЕТ

- [1] Әбілқасымова А.Е., Кучер Т.П., Корчевский В.Е., Жұмағұлова З.Ә. *Алгебра және анализ бастамалары 1 - бөлім.*, Жалпы білім беретін орта мектептің жаратылыстану – математика бағытындағы 10 – сыныбына арналған оқулық, Алматы: Мектеп, 2019 – 240 бет.
- [2] Әбілқасымова А. *Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық – әдістемелік негіздері.*, Оқу құралы, Алматы: Мектеп, 2014. – 224 бет.
- [3] Hwang G.J. *Definition, framework and research issues of smart learning environments*, Smart Learning Environments., 2014. – Vol. 1. – № 4. – P. 1–14.
- [4] Zhu Z.-T., Yu M.-H., Riezebos P. *A research framework of smart education*, Smart Learning Environments, 2021. – Vol. 8. – Article 1. – P. 1–17.

ЦИФРЛЫҚ ТРАНСФОРМАЦИЯ ЖАҒДАЙЫНДА МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ

А. МУРАТ¹, С.М. СЕИТОВА²

¹Талдықорған қаласы №30 орта мектеп, Талдықорған, Қазақстан

²Талдықорған, Қазақстан Республикасы

¹akkagaz8@mail.com, ²seitova.s.m@mail.ru

Аннотация. Мақалада цифрлық трансформация жағдайында мектеппен жоғары оқу орындарында математиканы оқытудың өзекті мәселелері қарастырылады. Жасанды интеллект құралдарының білім беру үдерісіне енгізілуі оқыту мазмұны мен әдістеріне жаңа талаптар қояды. Жұмыста цифрлық құралдарды педагогикалық тұрғыда қолданудың мүмкіндіктері мен шектеулері талданып, сыни ойлау мен зерттеушілік дағдыларды сақтаудың маңыздылығы негізделеді.

Қазіргі кезеңде білім беру жүйесі қарқынды цифрлық өзгерістер жағдайында дамып отыр. Жасанды интеллект құралдарының кеңінен таралуы математиканы оқыту мазмұны мен әдістемесіне жаңа талаптар қояды. Зерттеулер көрсеткендей, цифрлық технологияларды білім беру үдерісіне енгізу педагогтің рөлін қайта қарастыруды талап етеді (Zawacki-Richter et al., 2019)[1].

Жасанды интеллект жүйелері есептердің шешу жолдарын түсіндіруге, баламалы тәсілдерді көрсетуге және кері байланыс ұйымдастыруға мүмкіндік береді. Мұндай құралдар мұғалімдердің кәсіби әрекетін қолдай отырып, оқу үдерісін дараландыруға жағдай жасайды (Tap et al., 2025). Сонымен қатар, генеративті жасанды интеллектті қолдану болашақ мұғалімдердің сабақ жобалау құзіреттілігіне оң ықпал ететіні анықталған (Oh, 2025)[2].

Дегенмен, цифрлық технологияларды қолдану бірқатар педагогикалық мәселелерді де туындатады. Атап айтқанда, дайын жауапқа сүйену білім алушылардың логикалық ойлау белсенділігін төмендетуі мүмкін. Сондықтан жасанды интеллектті талдау және салыстыру құралы ретінде қолдану маңызды. Зерттеушілер жасанды интеллекттің білім беру сапасын арттырудағы әлеуетін мойындай отырып, оны әдістемелік тұрғыда негізді қолдану қажеттігін атап көрсетеді (Holmes et al., 2019). Математика пәнін оқыту контекстінде жасанды интеллект мұғалімге күрделі ұғымдарды түсіндіруді жеңілдетуге және оқу материалын бейімдеуге мүмкіндік береді. Алайда технология мен педагогикалық мақсаттың үйлесімділігі сақталуы тиіс. Education Sciences журналында жарияланған зерттеуде жасанды интеллекттің математиканы оқытудағы мүмкіндіктері мен шектеулері сараланып, мұғалімнің кәсіби құзіреттілігі шешуші фактор екені көрсетілген (García-Martínez et al., 2023).

Осылайша, цифрлық трансформация жағдайында математиканы оқытудың өзекті мәселелері технологияны мақсатты қолдану, білім алушылардың сыни ойлау қабілетін сақтау және мұғалімнің кәсіби дамуын қамтамасыз ету бағыттарында айқындалады.

Кілтті сөздер: цифрлық трансформация, жасанды интеллект, математика, білім беру, педагогикалық құзіреттілік.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Zawacki-Richter O., Marín V.I., Bond M., Gouverneur F. *Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – Where are the educators?* // International Journal of Educational Technology in Higher Education, 16(1) (2019), 1–27.
- [2] Tan X., Cheng G., Ling M.H. *Artificial intelligence in teaching and teacher professional development: A systematic review* // Computers and Education: Artificial Intelligence, 8 (2025), 100355.
- [3] Oh S. *Integration of generative AI in mathematics teacher preparation: An empirical study on lesson design competency* // IEEE Access, 13 (2025), 128959–128973.
- [4] Holmes W., Bialik M., Fadel C. *Artificial intelligence in education: Promises and implications for teaching and learning*, Center for Curriculum Redesign, Boston (2019).
- [5] García-Martínez I., Fernández-Batanero J.M., Cobos-Sanchiz D., Luque-de la Rosa A. *Artificial intelligence in mathematics education: Opportunities and challenges for teachers* // Education Sciences, 13(5) (2023), 456.

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ТЕХНОЛОГИЯСЫН ТИІМДІ ПАЙДАЛАНУДА 4К ҚҰЗЫРЕТТІЛІГІН ИГЕРУДІҢ МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ

А.Ж. НУРБЕКОВА

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
janaseljan@mail.ru

Зерттеудің өзектілігі. Қазіргі цифрлық трансформация жағдайында жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары білім беру жүйесінің мазмұнына, әдістеріне және нәтижелеріне елеулі ықпал етуде. Қазақстан Республикасында ЖИ дамытудың 2024–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасында цифрлық инфрақұрылымды жетілдірумен қатар, ЖИ саласында кәсіби даярланған мамандарды қалыптастыру міндеті қойылған. Бұл педагогтардың тек техникалық сауаттылығын ғана емес, сонымен қатар ЖИ құралдарын оқу процесінде саналы, тиімді және жауапты қолдану қабілетін талап етеді.

Сонымен бірге, ЖИ технологияларын білім беру үдерісіне енгізу педагогтан тек пәндік құзыреттілікті ғана емес, ХХІ ғасыр дағдыларын меңгеруді қажет етеді. Осы контексте «4К» құзыреттілігі – шығармашылық (creativity), сыни ойлау (critical thinking), коммуникация (communication), ынтымақтастық (collaboration) – жасанды интеллект құралдарын тиімді пайдаланудың тұлғалық-әдіснамалық негізі ретінде қарастырылады [1, 5].

Алайда ғылыми әдебиеттерде ЖИ технологияларын қолдану мәселесі кеңінен зерттелгенімен, оны тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігінің рөлі жеткілікті деңгейде эмпирикалық тұрғыдан талданбаған. Осы қайшылық зерттеу проблемасын айқындайды.

Зерттеудің мақсаты мен міндеттері. Зерттеудің мақсаты – жасанды интеллект технологиясын тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігін игерудің маңыздылығын теориялық негіздеу және жоғары мектеп оқытушыларының аталған дағдыларды меңгеру деңгейін эмпирикалық тұрғыдан айқындау.

Міндеттері:

- 4К құзыреттілігінің мазмұнын және құрылымдық компоненттерін талдау;
- ЖИ технологияларын білім беруде қолданудың педагогикалық ерекшеліктерін айқындау;
- Оқытушылардың 4К құзыреттілігін меңгеру деңгейін анықтау;
- Алынған нәтижелер негізінде 4К құзыреттілігінің ЖИ-ді тиімді қолданудағы маңызын дәлелдеу.

Зерттеу әдістері. Зерттеу барысында теориялық талдау, салыстырмалы зерттеу және сауалнама әдістері қолданылды. Эмпирикалық кезеңде 26 жоғары оқу орны оқытушысы қатысқан

сауалнама жүргізілді. Сауалнама 5 тұжырымнан тұратын Ликерт шкаласы негізінде құрастырылды және респонденттердің 4К құзыреттілігін меңгеру деңгейі мен ЖИ құралдарын пайдалану тәжірибесін анықтауға бағытталды. Нәтижелер пайыздық және салыстырмалы талдау әдістерімен өңделді.

Теориялық негіз. 4К құзыреттілігі өзара байланысты төрт компоненттен тұрады.

Шығармашылық (креативтілік) — жаңа идеяларды генерациялау, ЖИ құралдарын дәстүрлі емес тәсілмен қолдану және білім беру мазмұнын жаңғырту қабілеті.

Сыни ойлау — ЖИ арқылы алынған ақпаратты талдау, алгоритмдік шешімдерді бағалау және этикалық тәуекелдерді саралау мүмкіндігі [2].

Коммуникация — цифрлық ортада тиімді өзара әрекеттестік орнату, ЖИ нәтижелерін түсіндіру және білім алушылармен кері байланыс жүргізу қабілеті [3].

Ынтымақтастық — командалық жұмыс барысында ЖИ құралдарын бірлесіп қолдану, тәжірибе алмасу және жобалық қызметті ұйымдастыру дағдысы [4].

ЖИ технологияларын тиімді пайдалану осы компоненттердің интегративті дамуын талап етеді.

Зерттеу нәтижелері. Зерттеу нәтижелері респонденттердің басым бөлігі 4К құзыреттілігінің ЖИ қолдануда маңызды рөл атқаратынын көрсетті.

- 30,77% оқытушы 4К дағдыларын кәсіби табыстың негізгі факторы ретінде бағалайды;
- 23,08% респондент аталған дағдыларды жүйелі түрде дамыту қажеттігін атап өтті;
- «Ынтымақтастық» компоненті ең жоғары көрсеткішке ие болды, бұл білім беру ортасында коллаборативті стратегиялардың басымдығын көрсетеді;
- «Сыни ойлау» мен «шығармашылық» компоненттері ЖИ нәтижелерін талдау және оқу контентін бейімдеуде ерекше маңызға ие екендігі анықталды.

Нәтижелер 4К құзыреттілігінің жеткілікті деңгейде дамымауы ЖИ технологияларын толыққанды пайдалануға кедергі келтіруі мүмкін екенін көрсетеді.

Қорытынды. Жүргізілген зерттеу жасанды интеллект технологиясын тиімді пайдалануда 4К құзыреттілігінің шешуші фактор екенін дәлелдейді. ЖИ құралдары педагогикалық үдерісті автоматтандырумен шектелмей, педагогтың шығармашылық, аналитикалық және коммуникативтік әлеуетін іске асыруды талап етеді.

Эмпирикалық деректер 4К құзыреттілігін жүйелі түрде дамыту қажеттігін көрсетеді. Осыған байланысты жоғары оқу орындарында педагог кадрларды даярлау және біліктілікті арттыру бағдарламаларына 4К құзыреттілігін дамытуға бағытталған арнайы модульдерді енгізу ұсынылады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] Kurilenko I.V. *Teoriya i praktika obshchestvennogo razvitiya, Teoriya i praktika obshchestvennogo razvitiya*, (15) (2014), 67–68.
- [2] Olkhovaya T.A., Eliseev V.N. *Kriticheskoe myshlenie kak osnova razvitiya informatsionno-poznavatelnoi samostoyatelnosti studentov, Vysshee obrazovanie segodnya*, (5) (2013), 47–49.
- [3] Korchagina M.I. *Kommunikativnost – professionalnoe kachestvo pedagoga, Vestnik pedagogicheskikh nauk*, (3) (2008), 45–50.
- [4] Agaev N.F. *Pedagogicheskie usloviya povysheniya emotsionalnoi ustoichivosti lichnosti studentov, Pedagogika*, (7) (2013), 284–290.
- [5] Arno A.O. *Proektirovanie obrazovatel'nogo prostranstva na osnove podkhoda razvitiya navykov «4K», Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, (4) (2020), 112–118.

МЕКТЕП ГЕОМЕТРИЯСЫН ОҚЫТУДА ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР АРҚЫЛЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРДІ ЖЕТІЛДІРУ

Ж. ОМАР¹, А.Ж. АДИБЕВА²

^{1,2}Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау, Қазақстан

¹zhandos.bagdatuly@gmail.com, ²adiyeva.a@mail.ru

Кіріспе.

Қазіргі жаһандану жағдайында білім беру жүйесін цифрландыру – педагогикалық ғылымның маңызды бағыттарының бірі. Ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың қарқынды дамуы оқыту үдерісінің мазмұнын жаңартуға, білім алушылардың танымдық белсенділігін арттыруға және білім сапасын көтеруге мүмкіндік беріп отыр. Математикалық білім беру жүйесінде цифрлық технологияларды қолдану әсіресе геометрия пәнін оқытуда өзекті болып табылады, себебі геометриялық материалдар абстрактілі сипатқа ие және оларды меңгеру оқушылардан жоғары деңгейдегі кеңістіктік ойлау қабілетін талап етеді.

Мектеп геометрия курсына геометриялық түрлендірулерді оқыту математикалық білім берудің маңызды құрамдас бөлігі саналады. Геометриялық түрлендірулер оқушылардың логикалық ойлауын дамытуға, математикалық модельдеу дағдыларын қалыптастыруға және теориялық білімді практикалық қолдануға мүмкіндік береді. Дегенмен, дәстүрлі оқыту әдістері геометриялық түрлендірулерді визуалды түрде түсіндіруде белгілі бір қиындықтар туғызады. Осыған байланысты оқу процесінде динамикалық модельдеу, интерактивті тапсырмалар және цифрлық білім беру ресурстарын пайдалану қажеттілігі артып отыр.

Цифрлық технологияларды қолдану геометриялық объектілерді қозғалыста қарастыруға, түрлендірулерді визуализациялау арқылы түсіндіруге және оқушылардың оқу материалын терең әрі жүйелі меңгеруіне жағдай жасайды. Геометриялық түрлендірулерді цифрлық ортада оқыту оқушылардың зерттеушілік дағдыларын қалыптастыруға, пәнге деген қызығушылығын арттыруға және білімді өз бетінше игеру қабілетін дамытуға ықпал етеді [1, 23-б.].

Зерттеу барысында мектеп геометриясын оқытуда цифрлық технологияларды қолданудың теориялық және практикалық аспектілерін талдау үшін келесі әдістер қолданылды:

1. Теориялық талдау әдісі – геометриялық түрлендірулерді оқытудың педагогикалық-әдіснамалық принциптерін, оқу-әдістемелік әдебиеттер мен ғылыми еңбектерді зерделеуге бағытталған. Бұл әдіс Қазақстан Республикасының білім беру стандартына сәйкес мектеп геометриясының мазмұны мен оқыту технологияларын жүйелі сипаттауға мүмкіндік берді.

2. Педагогикалық бақылау әдісі – геометриялық түрлендірулерді оқыту үдерісінде цифрлық технологияларды енгізудің әсерін бақылауға арналған. Бұл әдіс нақты оқу жағдайында оқушылардың оқу әрекетін, белсенділігін және білім нәтижелерін қадағалауға бағытталды.

3. Эксперименттік әдіс (педагогикалық тәжірибе) – цифрлық технологиялар қолданылған және дәстүрлі оқыту тәсілдері қолданылған эксперименттік және бақылау сыныптарында салыстырмалы талдау жүргізілді. Эксперименттік әдіс оқу нәтижелерінің статистикалық түрде салыстырмалы бағасын жасауға мүмкіндік берді [2, 23-б.]. Зерттеу барысында алынған деректер реттеліп, өңделді және салыстырмалы талдаудан кейін қорытынды бағаланды. Әдістердің комбинациясы зерттеу нәтижелерінің сенімділігін арттыруға және геометриялық түрлендірулерді оқытуда цифрлық технологиялардың тиімділігін дәл бағалауға мүмкіндік берді.

Талқылау мен нәтижелер.

Зерттеу жұмысының эксперименттік кезеңінде мектеп геометриясын оқыту үдерісінде цифрлық технологияларды қолдану арқылы геометриялық түрлендірулерді меңгертудің тиімділігі жан-жақты талданды. Педагогикалық эксперимент 10-сынып оқушылары арасында ұйымдастырылып, зерттеуге жалпы саны 60 оқушы қатысты. Оның 30-ы эксперименттік топ, 30-ы бақылау тобы ретінде анықталды. Эксперименттік топта сабақтар цифрлық білім беру

технологияларын пайдалану арқылы жүргізілсе, бақылау тобында дәстүрлі оқыту әдістері қолданылды.

Жалпы зерттеу нәтижелері мектеп геометриясын оқытуда цифрлық технологияларды жүйелі қолдану білім сапасын арттыруға, оқушылардың пәнге деген қызығушылығын күшейтуге және геометриялық түрлендірулерді терең меңгеруге мүмкіндік беретінін дәлелдеді. Ұсынылған әдістеме мектеп математикасын оқыту үдерісін жаңғыртуға бағытталған перспективалық педагогикалық модель ретінде қарастырылуы мүмкін.

Қорытынды.

Зерттеу жұмысы мектеп геометрия курсына геометриялық түрлендірулерді оқытуда цифрлық технологияларды қолданудың педагогикалық және әдістемелік тиімділігін анықтауға бағытталды. Жүргізілген теориялық талдау мен педагогикалық эксперимент нәтижелері цифрлық білім беру құралдарын пайдалану геометриялық материалдарды меңгертудің сапасын арттыруға ықпал ететінін көрсетті.

Зерттеу барысында геометриялық түрлендірулерді оқытудың теориялық негіздері қарастырылып, динамикалық модельдеу, визуализация және интерактивті тапсырмалар жүйесінің оқушылардың кеңістіктік ойлау қабілетін дамытудағы маңызы анықталды. Мектеп геометриясын оқытуда қолданылған цифрлық технологиялар абстрактілі математикалық ұғымдарды нақты бейнелеуге мүмкіндік беріп, оқушылардың оқу материалын терең әрі саналы меңгеруіне жағдай жасады.

Педагогикалық эксперимент нәтижелері эксперименттік топ оқушыларының білім деңгейінің бақылау тобымен салыстырғанда едәуір жоғарылағанын дәлелдеді. Қорытынды тест нәтижелері бойынша эксперименттік топтағы оқушылардың орташа балл көрсеткіші 79,8 балға жетіп, білім сапасының айтарлықтай өскені байқалды. Бұл көрсеткіш цифрлық технологиялар негізінде ұйымдастырылған оқыту үдерісінің тиімділігін растайды. Сонымен қатар, зерттеу нәтижелері цифрлық білім беру ортасын қолдану оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып, оқу мотивациясын күшейтетінін көрсетті. Сауалнама және педагогикалық бақылау деректері бойынша оқушылардың басым бөлігі динамикалық визуализация әдісінің геометриялық түрлендірулерді түсінуді жеңілдететінін атап өтті.

Жалпы алғанда, мектеп геометриясын оқытуда цифрлық технологияларды жүйелі түрде қолдану білім беру сапасын арттыруға, оқушылардың танымдық белсенділігін дамытуға және геометриялық білімді практикалық тұрғыда қолдану дағдыларын қалыптастыруға мүмкіндік береді. Зерттеу нәтижелері ұсынылған әдістеменің тиімділігін дәлелдеп, оны мектеп математикасын оқыту тәжірибесіне енгізудің перспективалы екенін көрсетті. Алдағы уақытта геометриялық түрлендірулерді оқытуда жасанды интеллект элементтерін, адаптивті оқыту жүйелерін және виртуалды білім беру орталарын қолдану бағытында зерттеулер жүргізу ұсынылады.

Кілтті сөздер: геометриялық түрлендірулер, цифрлық білім беру технологиялары, визуализация әдісі, ақпараттық-коммуникациялық технологиялар, педагогикалық модельдеу, математикалық білім беру.

2020 Mathematics Subject Classification: 97G10, 97G80

ӘДЕБИЕТ

- [1] Шыныбеков Ә.Н., Шыныбеков Д.Ә., Жұмабаев Р., Маделханов С. Геометрия, Алматы: Атамұра, (2020), 240б.
- [2] Қабдолов Ж.Ә., Сүлейменова Қ.Ө. Мектеп геометриясын оқыту әдістемесі, Алматы, (2018), 196б.
- [3] Әлімжанов М.А. Цифрлық технологиялар негізінде математиканы оқыту, Алматы, (2021), 180б.
- [4] Бектұрғанов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі, Алматы: Мектеп, (2019), 210б.

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В КОНТЕКСТЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА

А.А. ПАПЫШЕВ¹, Б.С. ХАНЖАРОВА²

¹КазНПУ им. Абая, кафедра МММ, Алматы, Казахстан

²КазНЖПУ, кафедра МММ, Алматы, Казахстан

¹darap57@mail.ru, ²hanzharova.b@qyzpu.edu.kz

Современные образовательные стандарты Казахстана ориентированы на формирование метапредметных компетенций и развивающей функции образования. Реализация этих задач требует внедрения деятельностного подхода, при котором учение рассматривается как система действий, направленных на достижение осознанной цели. Данный подход способствует развитию познавательной активности, устойчивой учебной мотивации, коммуникативных компетенций и умений сотрудничества. Ориентация итоговой аттестации (ЕГЭ, ЕНТ) на решение задач различного уровня сложности усиливает актуальность исследований в этой области.

В рамках деятельностного подхода разработана модель взаимодействия:

Учитель ↔ Ученик ↔ Задача ↔ Система задач ↔ Учитель

Для её реализации уточнены понятия «задача» и «система задач», разработаны принципы построения целостной системы задач, определены приёмы обобщения способов решения, выявлена внутренняя структура математических задач.

Учебная деятельность имеет иерархическую структуру: деятельность → действие → операция, где деятельность определяется мотивом, действие — осознанной целью, операция — условиями выполнения. В процессе решения задач происходит постоянное согласование цели, средств и результата. С позиций структурно-функционального анализа выделяются принципы: целостность, иерархичность, управление, соответствие структур, целесообразность, самоорганизация.

Успешность решения задач определяется умением извлекать три вида информации: непосредственно заданную в условии, выводимую из него и полученную в ходе преобразований. Формирование аналитических умений включает развитие способности распознавать объекты и их свойства, выводить следствия, переводить содержание задачи на язык алгебраической, векторной или координатной теории, а также видеть альтернативные способы решения.

Реализация деятельностного подхода предполагает системное освоение методов решения: геометрических преобразований, векторного, координатного, а также работы с текстовыми и алгебраическими задачами. Использование векторного и координатного методов требует овладения «языком перевода» между геометрическими и аналитическими представлениями и включает три этапа: перевод условия на аналитический язык, выполнение преобразований и интерпретацию результата.

Систематизация задач по степени сложности опирается на критерий В. И. Крупича:

$$S = m + n + p, \quad (1)$$

где m — число элементов структуры задачи; n — число связей между ними; p — число типов связей. Данная формула позволяет выстраивать систему задач по принципу возрастания проблемности. Систематизация предполагает выявление логической структуры решения, выделение тождественных и равносильных преобразований, установление явных и неявных связей. Следует учитывать, что оценка сложности возможна лишь в рамках конкретной системы задач.

Формирование умений решать математические задачи должно носить целенаправленный и системный характер. Недостаточно увеличивать количество решаемых задач — необходимо специально формировать способы анализа условия и требования, построения плана решения,

контроля и оценки результата. Деятельностный подход позволяет рассматривать этот процесс как сложную структурированную систему, направленную на формирование у учащихся устойчивых способов математической деятельности и повышение качества математического образования.

Ключевые слова: деятельностный подход, обучение математике, решение задач, система задач, метапредметные компетенции, учебная деятельность, интерактивные методы.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97C70, 97B40

МЕКТЕП ПЕН ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНДАРЫНДА ГЕОМЕТРИЯНЫ ОҚЫТУДА САБАҚТАСТЫҚТЫ ЖҮЗЕГЕ АСЫРУ ЖОЛДАРЫ

Е.А. ТҮЯҚОВ¹, Ж.Н. РАЗАҚ², Н.Ғ. БЕКҚУЛ³

^{1,2,3} Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

¹t.esen.a@mail.ru, ²zhenisbekrazak@gmail.com

Қазақстан Республикасында жоғары білім беруді дамытудың 2023–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасында білім беру мазмұнын жаңарту және оқытудың сапасын арттыру басты басымдықтардың бірі ретінде айқындалған. Осы тұрғыдан алғанда, орта мектеп пен жоғары педагогикалық білім беру арасындағы сабақтастықты қамтамасыз ету - болашақ математика мұғалімдерінің кәсіби біліктілігін қалыптастырудың іргетасы болып табылады. Геометрия курсы өзінің логикалық құрылымы мен абстрактілі сипатының күрделілігіне байланысты осы сабақтастықты ең бірінші кезекте қажет ететін сала. Мектептегі геометрия курсы мен ЖОО-дағы жоғары геометрия арасындағы сабақтастық тек мазмұнмен шектелмейді. Ол функционалдық сауаттылықтан кәсіби құзыреттілікке көшуді қамтиды. Мектептегі «аналитикалық және кеңістіктік ойлау» ЖОО-да «геометриялық модельдеу» деңгейіне көтерілуі тиіс. Бұл студенттерге мектеп бағдарламасындағы күрделі тақырыптарды (мысалы, координаталық әдіс, векторлық әдіс, стереометриялық есептер) тек шешіп қана қоймай, олардың ғылыми негіздемесін еркін баяндауға мүмкіндік береді.

Білім беру жүйесінде геометрияны оқытудың сабақтастығы бірнеше өзара байланысты деңгейлерді қамтиды:

1. Мазмұндық сабақтастық: Мектептегі аналитикалық геометрия ұғымдарын ЖОО-дағы геометриялық теориялармен (аксиоматикалық құрылым, векторлық кеңістіктер) логикалық тұрғыдан байланыстыру.

2. Әдістемелік сабақтастық: Оқушылардың көрнекі-бейнелі ойлауынан студенттердің абстрактілі-логикалық ойлауына біртіндеп көшуін қамтамасыз ететін оқыту технологияларын үйлестіру.

3. Цифрлық сабақтастық: Мектеп пен ЖОО-да динамикалық геометриялық орталарды (GeoGebra және т.б.) ортақ құрал ретінде қолдану арқылы білім берудің бірізділігін сақтау.

Қазіргі уақытта білім беру үдерісін цифрландыру жағдайында бұл сабақтастық жаңа сипатқа ие болуда. Мектеп геометриясында қолданылатын көрнекі құралдар ЖОО-да күрделі математикалық модельдеу элементтерімен ұласуы тиіс. Бұл студенттерге мектеп бағдарламасының ғылыми негіздерін тереңірек түсінуге және болашақ педагогикалық қызметінде осы білімді тиімді қолдануға мүмкіндік береді.

Тәжірибелік зерттеулер мен мұғалімдер арасында жүргізілген сауалнама нәтижелері көрсеткендей, мектеп түлектерінің басым бөлігі (60%-дан астамы) аналитикалық геометрия элементтеріне қатысты түзулер мен жазықтықтың теңдеулерін және векторларды қолданып есептерді шешуде қиындықтарға тап болады. Бұл ЖОО-дағы «Геометрия негіздері» курсының бастапқы кезеңінде бейімделу процесін қиындатады. Сондықтан, педагогикалық ЖОО-ларда мектеп курсының күрделі бөлімдерін (жазықтықтағы және кеңістіктегі координаталар мен

векторлар, түзу мен жазықтықтың теңдеулері және олардың қолданылуы) тереңдетіп оқыту және оларды жоғары математикалық деңгейде негіздеу маңызды. Сабақтастықты нығайтудың бір жолы – мектептегі аналитикалық геометрия есептерін ЖОО-ның арнайы курстарына енгізу. Мәселен, векторлық-координаталық әдіспен мектептегі күрделі есептерді шешуді оқыту болашақ мұғалімнің эрудициясын кеңейтеді. Қысқаша айтқанда, сабақтастықты жүзеге асырудың басты жолы — мектеп қабырғасында векторлық және координаттық әдістерді қолдану аясын кеңейту. Оқушылар тек нүктенің координатын тауып қана қоймай, жазықтықтағы түзудің түрлі теңдеулерін, векторлардың скалярлық көбейтіндісінің геометриялық мағынасын терең түсінуі тиіс. Бұл іргетас қаланған жағдайда ғана студент жоғары оқу орнында екінші ретті қисықтарды, кеңістіктегі жазықтықтар мен түзулердің өзара орналасуын зерттегенде қиындыққа тап болмайды.

Жоғары білім беру жүйесінде аналитикалық геометрия жаңа сапалық деңгейге көтеріледі. Егер мектепте негізінен жазықтықтағы (2D) қарапайым фигуралар қарастырылса, жоғары оқу орнында студенттер үш өлшемді (3D) кеңістікке, тіпті n -өлшемді кеңістіктерге көшеді. Университетте бұл пән сызықтық алгебрамен тығыз интеграцияланады: есептерді шешуде матрицалар, детерминанттар және теңдеулер жүйесі кеңінен қолданылады. Мұнда тек түзу мен шеңбер ғана емес, екінші ретті қисықтар (эллипс, гиперболола, парабола) мен беттердің (сфера, конус, цилиндр, эллипсоид) теңдеулері жан-жақты зерттеледі.

Бұл екі кезеңнің арасындағы басты айырмашылық әдіснамада жатыр. Мектеп геометриясы көбінесе аксиомалар мен теоремаларға сүйенетін «синтетикалық» сипатта болса, жоғары мектепте толығымен «аналитикалық» бағыт басым болады. Яғни, кез келген геометриялық мәселе алгебралық есептеулерге тіреледі. Бұл әдіс инженерлік жобалауда, компьютерлік графикада, робототехникада және физикалық процестерді модельдеуде өте тиімді. Қорыта айтқанда, мектеп пен жоғары оқу орны арасындағы геометриялық білім берудегі сабақтастық – бұл тек бағдарламалық сәйкестік емес, бұл болашақ мұғалімнің кәсіби құзыреттілігін арттыруға бағытталған жүйелі процесс. Бұл үдерісте педагогикалық ЖОО-лар жетекші рөл атқарып, мектеп геометриясын ғылыми деңгейде жаңғыртуға ықпал етуі тиіс.

Кілтті сөздер: Мектеп геометрия курсы, аналитикалық геометрия, сабақтастық, геометриялық есептер.

ӘДЕБИЕТ

[1] “Қазақстан Республикасында мектепке дейінгі, орта, техникалық және кәсіптік білім беруді дамытудың 2023 – 2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын бекіту туралы” Қазақстан Республикасы Үкіметінің 2023 жылғы 28 наурыздағы № 249 қаулысы, Астана (2023).

[2] Әбілқасымов А.Е., Тұяқов Е.А. Жалпы білім беретін мектепте математикалық есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздері. – Алматы, 2019.

[3] Смирнов В.А., Смирнова И.М. О новой концепции обучения геометрии в школе // Материалы межд.науч.-прак. конф. «Проблемы совершенствования обучения математике, физике и информатике в школе и вузе». – Алматы: Изд. «Ұлағат», 2014. - С.11-12.

[2] Қайдасов Ж. Аналитикалық геометрия: оқу құралы. – Алматы: CyberSmith, 2021– Б.96.

ИНТЕГРАЦИЯЛАНҒАН ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУДА ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІ ҚОЛДАНУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ-ӘДІСТЕМЕЛІК НЕГІЗДЕРІ

А.М. РОСПАЙ

¹Шоқан Уалиханов атындағы Көкшетау университеті, Көкшетау қ.

aigerim.rosipay@gmail.com

Мақалада интеграцияланған оқу есептерін шешу барысында жасанды интеллектті қолданудың теориялық-әдістемелік негіздері қарастырылады. Зерттеу теориялық сипатта жүргізіліп, білім беру үдерісінде жасанды интеллектті пайдаланудың заманауи ғылыми тәсілдері

талданады. Жасанды интеллекттің оқу қызметін қолдау, пәнаралық байланыстарды қалыптастыру және интеграцияланған есептерді шешу үдерісін әдістемелік қамтамасыз ету құралы ретіндегі дидактикалық мүмкіндіктері айқындалады. Білім беру сапасын арттыру мақсатында жасанды интеллектті білім беру практикасында қолданудың орынды екендігі негізделеді.

Кіріспе

Қазіргі білім беру жүйесінің дамуы білім алушы тұлғаның өзін-өзі жүзеге асыруына және өзін-өзі дамытуына жағдай жасауға бағытталған білім беруді гуманизациялау үрдісінің күшеюімен сипатталады. Осыған байланысты білім алушылардың жеке танымдық ерекшеліктерін, қызығушылықтары мен білім беру қажеттіліктерін ескеретін икемді білім беру модельдерін әзірлеу өзекті болып табылады. Мұндай талаптарды жүзеге асырудың перспективалы бағыттарының бірі – жасанды интеллект мүмкіндіктеріне негізделген цифрлық білім беру технологияларын қолдану болып табылады [1, 52 б.; 2, 34 б.].

Негізгі бөлім

Қазіргі педагогикалық зерттеулерді талдау білім беру жүйесінің дамуында оқу үдерісін дербестендіру, білім мазмұнын интеграциялау және білім алушылардың өзіндік оқу қызметін кеңейту сияқты тұрақты үрдістердің бар екенін көрсетеді [3, 27–29 б.]. Бұл үрдістерді тиімді жүзеге асыру жасанды интеллект құралдарын пайдаланатын цифрлық білім беру технологиялары арқылы қамтамасыз етіледі.

Теориялық тұрғыдан алғанда, жасанды интеллектке негізделген білім беру технологиялары дидактикалық, ақпараттық және жалпы педагогикалық құралдардың тұтас жүйесі ретінде қарастырылады. Бұл құралдар оқытуды алгоритмдік басқарумен шектелмей, интеграцияланған сипаттағы оқу міндеттерін шешуге мүмкіндік береді [4, 41–43 б.; 5, 38–40 б.].

Дидактика тұрғысынан жасанды интеллектті қолдану оқытуды дараландыруды, білім беру үдерісін оңтайландыруды, білім алушылардың уәждемесі мен танымдық белсенділігін арттыруды көздейді. Сонымен қатар, дәстүрлі педагогикалық қағидалармен сабақтастықты сақтау маңызды шарт болып табылады [6, 88–91 б.].

Интегративті тәсіл оқу мазмұнының әртүрлі элементтерін біртұтас жүйеге біріктіруге бағытталған әдіснамалық негіз ретінде қарастырылады және пәнаралық байланыстарды қалыптастыруға мүмкіндік береді [7, 214–216 б.; 8, 46–48 б.]. Осы тәсіл аясында интеграцияланған есептер оқу материалының меңгерілуін бақылау құралы ғана емес, білімді кешенді қолдануға негізделген интегративті ойлау стилін қалыптастыру құралы ретінде қарастырылады.

Интеграцияланған есептерді шешу барысында жасанды интеллект есептің құрылымын талдауға, шешу жолдарын модельдеуге және пәнаралық байланыстарды көрнекі түрде көрсетуге мүмкіндік береді. Бұл білім алушылардың ой қорыту әрекеттерін кезең-кезеңімен ұйымдастыруға және білімді түрлі пәндік салалар арасында тасымалдау қабілетін қалыптастыруға жағдай жасайды [7, 101–103 б.; 1, 22–24 б.].

Қорытынды

Интеграцияланған есептерді шығаруда жасанды интеллектті қолдану білім беру үдерісін жетілдірудің тиімді бағыттарының бірі болып табылады. Жасанды интеллект негізіндегі цифрлық білім беру технологиялары білім алушылардың жүйелі ойлауын дамытуға, пәнаралық байланыстарды тереңдетуге және оқу міндеттерін кешенді талдау қабілетін қалыптастыруға ықпал етеді. Осылайша, жасанды интеллектті қолдану интеграцияланған есептерді оқытуда теориялық-әдістемелік тұрғыдан негізделген педагогикалық құрал ретінде қарастырылады.

Кілт сөздер: жасанды интеллект, интеграцияланған есептер, теориялық негіздер, әдістемелік тәсілдер, пәнаралық байланыс, цифрлық білім беру.

ӘДЕБИЕТ

- 1] Slastenin V.A., Isaev I.F., Shiyanov E.N. *Pedagogy*, Akademiya, Moscow (2013).
- 2] Lerner I.Ya. *Didactics*, Prosveshchenie, Moscow (2011).
- 3] Skatkin M.N. *Theory of Teaching*, Pedagogika, Moscow (2010).
- 4] Polat E.S., Bukharkina M.Yu. *New Pedagogical and Information Technologies in the Education System*, Akademiya, Moscow (2014).

- [5] Andreev A.A. *Information Technologies in Education*, Akademiya, Moscow (2012).
- [6] Titova S.A. *Intelligent Learning Systems*, Flinta, Moscow (2016).
- [7] Gorodetskaya N.I. *Artificial Intelligence in Education*, INFRA-M, Moscow (2019).
- [8] Podlasy I.P. *Pedagogy*, Yurait, Moscow (2018).

Applied mathematical problems in high school mathematics as a tool for developing functional literacy

A.M. SEISENBAYEVA

¹*Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*

aizadaseisenbaeva@gmail.com

In recent years, the goals of secondary education have undergone significant changes. Modern educational standards increasingly emphasize not only the acquisition of subject knowledge but also the development of skills that allow high school students to function effectively in everyday life. As a result, the concept of functional literacy has become central to discussions about educational quality and learning outcomes.

Functional literacy is commonly associated with the ability to use acquired knowledge in real-life situations, make informed decisions, and solve practical problems. Mathematics plays a special role in this process, as it provides tools for quantitative reasoning, data analysis, and modeling of real processes. At the same time, school practice shows that many high school students experience difficulties when applying mathematical knowledge outside standard textbook tasks. This contradiction between formal mathematical training and its practical application indicates the need to reconsider traditional approaches to teaching mathematics. One possible solution is the purposeful and systematic use of applied mathematical problems, which create conditions for meaningful learning and contribute to the development of functional literacy among high school students.

Functional literacy is a multidimensional concept that includes cognitive, practical, and social components. In mathematics education, it is not limited to the ability to perform calculations or reproduce formulas. Rather, it involves understanding problem situations, selecting appropriate mathematical methods, and interpreting results in relation to real contexts.

From a practical point of view, functional literacy in mathematics can be described as high school students' readiness to solve problems that arise in everyday life, further education, or future professional activities. This includes working with numerical data, analyzing graphs and tables, estimating values, and making reasonable conclusions based on quantitative information.

International studies such as PISA highlight the importance of high school students' ability to apply mathematical knowledge in real-life contexts [1]. Similar ideas are reflected in the works of Kazakhstani scholars, who associate the development of functional literacy with the modernization of mathematics education and teaching methodology [2].

Applied mathematical problems are characterized by their connection to real or realistic situations. Unlike purely abstract exercises, they are based on contexts familiar to high school students, such as everyday activities, economic processes, technological systems, or natural phenomena. Solving such problems requires not only mathematical skills but also an understanding of the situation described. One of the main features of applied problems is the need to translate a real situation into a mathematical model. This process involves identifying relevant variables, establishing relationships between them, and selecting appropriate methods for solving the problem. As a result, high school students develop modeling skills, which are an important component of functional literacy [3].

In addition, applied mathematical problems encourage high school students to reflect on the meaning of their solutions. It is not enough to obtain a numerical answer; students must also interpret the result and evaluate its relevance to the original problem. This step is often missing in traditional problem-solving but is essential for developing practical reasoning.

Educational practice shows that applied problems can significantly increase high school students' motivation to study mathematics. When high school students see how mathematical concepts are connected to real-life situations, mathematics becomes more meaningful and engaging. This, in turn, has a positive effect on learning outcomes.

The effectiveness of applied mathematical problems largely depends on how they are integrated into the learning process. Occasional use of such tasks may have limited impact, as it does not provide sufficient continuity or depth. Therefore, it is important to consider applied problems as part of a coherent system rather than isolated examples.

A system of applied mathematical problems should be built in accordance with the curriculum and high school students' cognitive development. At the initial stage, problems may involve simple real-life contexts and require basic calculations. Gradually, the complexity of situations and the level of abstraction can be increased, leading students to more complex forms of mathematical modeling. Such a system allows applied problems to perform several important functions. First, they support the formation of practical skills by linking theory with real situations. Second, they contribute to the development of analytical and critical thinking. Finally, they provide teachers with tools to assess students' functional literacy, as these problems reveal how well students can apply knowledge in practice.

The systematic use of applied mathematical problems leads to noticeable changes in students' learning behavior. High school students become more active participants in the learning process, as they are required to analyze situations, make assumptions, and justify their decisions. This approach also supports the development of independence and responsibility for learning outcomes. From the teacher's perspective, working with applied problems requires a shift in instructional strategies. The teacher's role is not limited to explaining solutions but includes guiding students through the process of reasoning and reflection. Such interaction aligns with student-centered and competence-based approaches to education. Moreover, applied mathematical problems create opportunities for interdisciplinary connections, as they often involve elements from physics, economics, geography, or social studies. This contributes to a more holistic understanding of knowledge and prepares students for solving complex problems in real life [4].

The analysis shows that applied mathematical problems have significant potential for developing functional literacy among high school students. Their systematic use in mathematics education helps bridge the gap between theoretical knowledge and practical application. As a result, students acquire not only mathematical skills but also the ability to use them effectively in real-life situations. Further research may focus on developing methodological recommendations and evaluating the effectiveness of different systems of applied problems in school practice.

Keywords: functional literacy, applied mathematical problems, secondary school mathematics, mathematical modeling, educational outcomes.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D50, 97D60.

References

- [1] OECD, *The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*, Paris (2000).
- [2] Abylkasymova A.E., On modernization of the content of general secondary and university pedagogical education and methodological aspects of teaching mathematics, *Continuum maths informatics education*, **27** (2022), 8–14.
- [3] Blum W., Galbraith P., Henn H-W., Niss M. *Modelling and Applications in Mathematics Education*, Springer New York, NY (2007).
- [4] Stillman G., Brown J., Galbraith P., Researching applications and mathematical modelling in mathematics learning and teaching, *Mathematics Education Research Journal*, **22** (2010), 1–6.

БОЛАШАҚ МАТЕМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІН ДАЯРЛАУ ПРОЦЕСІНДЕ SOFT SKILLS ДАҒДЫЛАРЫН ДАМУЫНЫҢ МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ

С.М. СЕИТОВА¹, Д.Ж. ЖАНАХМЕТОВА²

^{1,2}I. Жансүгіров атындағы Жетісу университеті, Жетісу облысы, Қазақстан

¹firstauthor@mail.com, ²secondauthor@mail.com

Бұл мақалада қазіргі білім беру жүйесіндегі болашақ математика мұғалімін даярлауда икемді дағдылардың маңызы қарастырылады. Академиялық білімді (hard skills) икемді дағдылармен (soft skills) толықтыру қажеттілігі негізделеді. Бұл білімгерлердің бойынан математикалық үрейді жеңуге және цифрландыру жағдайында оқыту сапасын арттыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар мақалада студенттер арасында жүргізілген эмпирикалық зерттеу нәтижелері ұсынылған.

Кіріспе. Математика мұғалімін кәсіби даярлау дәстүрлі түрде пәндік білімді (анализ, алгебра, геометрия) терең меңгеруге негізделеді. Бұл «қатты дағдылар» (Hard Skills) мұғалім даярлаудың іргетасы болып қала береді. Алайда қазіргі заман мұғалімнен тек ақпарат жеткізуші емес, білім беру процесінің ұйымдастырушысы болуды талап етеді.

Математика оқушылар үшін күрделі пәндердің бірі болып табылады. Сондықтан мұғалім тек формулаларды меңгеріп қана қоймай, оны оқушы деңгейіне бейімдей алуы тиіс. Бұл мұғалімнің дамыған soft skills дағдыларының болуын талап етеді.

Шетелдік зерттеулерге сүйенсек, Стэнфорд университетінің профессоры Джо Боулер өзінің еңбектерінде мұғалімнің психологиялық икемділігі мен оқушының эмоциялық жағдайын түсінуі математикалық жетістікке тікелей әсер ететінін көрсетеді. Сонымен қатар Дэниел Гоулманның эмоциялық интеллект теориясы қазіргі STEM біліміндегі маңызды бағыттардың бірі болып табылады.

Қазақстандық ғалымдар Ш.Таубаева мен А.Құсайынов еңбектерінде мұғалімнің инновациялық іс-әрекетке дайындығы мен коммуникативтік құзыреттілігін дамыту мәселелері қарастырылған.

Материалдар мен әдістер. Болашақ математика мұғалімдерінің икемді дағдыларын қалыптастыру үшін интерактивті әдістер қолданылды. Олардың ішінде:

Case-study әдісі. Студенттерге педагогикалық жағдаяттар ұсынылып, оларды талдау арқылы шешім қабылдау дағдылары дамытылады.

Рольдік ойындар. Бұл әдіс студенттердің коммуникация, конфликт жағдайларын шешу және эмоциялық тұрақтылық дағдыларын дамытуға мүмкіндік береді.

Математикалық фасилитация. Мұғалім оқушыға дайын жауап бермей, бағыттаушы сұрақтар арқылы оның ойлау процесін дамытуға көмектеседі.

Рефлексия және эмоцияны басқару. Студенттер өздерінің сөйлеу мәнерін, эмоциялық күйін бақылауды үйренеді.

Нәтижелер мен талқылаулар. Зерттеу барысында физика-математика факультетінің 20 студенті арасында сауалнама жүргізілді. Зерттеу нәтижелері бойынша Hard Skills деңгейі жоғары болғанымен, Soft Skills көрсеткіштері төмен екені анықталды.

- Hard Skills – 8.7 балл
- Коммуникация – 5.4 балл
- Стресске төзімділік – 4.2 балл
- Эмоциялық интеллект – 3.8 балл

Бұл нәтижелер болашақ мұғалімдердің коммуникативтік және эмоционалдық дағдыларын дамыту қажеттігін көрсетеді.

Қорытынды

Жүргізілген зерттеу нәтижелері болашақ математика мұғалімдерінің пәндік білім деңгейі жоғары болғанымен, икемді дағдыларды дамыту қажеттілігі бар екенін көрсетті. Заманауи

мұғалім тек пән маманы ғана емес, сонымен қатар коммуникатор, психолог және көшбасшы болуы тиіс. Сондықтан жоғары оқу орындарының бағдарламасына soft skills дамытуға бағытталған арнайы курстар енгізу маңызды.

Кілт сөздер: икемді дағдылар, soft skills, коммуникативтік дағдылар, белсенді оқыту әдістері.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Боулер Дж. Математикалық ойлау жүйесі. – 2019.
- [2] Гоулман Д. Эмоциялық интеллект. – 2020.
- [3] Таубаева Ш. Педагогикалық зерттеу әдіснамасы. – 2018.
- [4] Зимняя И.А. Ключевые компетенции как основа компетентностного подхода. – 2004.

Orimatics & Oritech: Mathematical Origami in Education and Engineering

M. SIGALOVSKY

Kazakh-British Technical University (KBTU), Almaty, Kazakhstan

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Phystech Science & IT School, Almaty, Kazakhstan

m.sigalovskiy@kbtu.kz

In recent decades, origami has evolved from a traditional art form into a rigorously formalized domain of mathematical and engineering research. The axiomatization of folding operations through the Huzita–Hatori framework, the possibility of solving classical geometric problems beyond compass-and-straightedge constructions, and the development of algorithmic crease-pattern theory have established origami as a legitimate mathematical discipline.

Foundational contributions include the extension of folding axioms by Koshiro Hatori and the geometric investigations of Kazuo Haga, whose work revealed nontrivial mathematical structures arising from elementary folding procedures. Further systematic developments appear in the works of Robert J. Lang on geometric constructions and computational design, Tom Hull on mathematical origami theory and pedagogy, and Erik Demaine in computational and algorithmic origami.

In addition to individual research contributions, origami has developed into an established international research community. A continuing series of conferences under the title *Origami: Science, Mathematics, and Education* (OSME) has been held regularly, bringing together mathematicians, engineers, computer scientists, architects, and educators who apply folding principles in their respective fields. The proceedings of these meetings document developments in geometric constructions, computational folding theory, structural engineering, and pedagogical applications.

Parallel to its mathematical formalization, folding principles have become increasingly relevant in engineering practice. Deployable space structures, Miura-ori folding systems, medical devices, and kinetic architectural elements demonstrate that fold-based transformations provide efficient structural and kinematic solutions. In this broader perspective, folding may be interpreted as an algorithmic transformation of planar configurations with direct implications for mechanics and design.

Despite these developments, systematic preparation for such mathematical and engineering applications rarely begins at the school level. School geometry often remains formal and detached from constructive action, while spatial reasoning and configurational thinking are insufficiently cultivated. This suggests the need for an educational approach in which folding-based geometric reasoning is introduced as an integral component of mathematical learning.

Mathematical origami provides such a framework. At the geometric level, folding operates as a strict construction method rather than as a visual illustration. It allows the exploration of angle trisection, cubic constructions, and classical problems through explicitly defined transformations. The Haga theorem and related constructions illustrate how simple folding operations generate nontrivial geometric relations that admit formal proof.

Long-term observation indicates that early engagement with mathematical origami may support the development of sustained investigative activity. Such a trajectory can include participation in scientific projects at school age, independent work on origami-based trisection methods for arbitrary angles, and subsequent supervision of student research projects combining the Haga theorem with angle division techniques and their generalizations at the national level. The continuity of this line suggests that origami can function not merely as an auxiliary tool, but as a stable research-oriented environment within school mathematics.

A Russian translation of Robert J. Lang’s article “Origami and Geometric Constructions” was available on the author’s website from 2010 to 2015 alongside the English original.

Since 2016, regular origami-based sessions have been conducted with students enrolled in olympiad-oriented mathematics groups, with formal geometry instruction provided separately. Over several years, a consistent strengthening of geometric problem-solving performance has been observed. These observations are compatible with the hypothesis that systematic work with folded configurations enhances intuition for symmetry, transformation, and structural relationships—competencies directly relevant to advanced geometric reasoning.

Beyond paper folding, the broader concept of origami-like constructions—here provisionally termed *oritech*—may serve as a bridge toward engineering thinking. Oritech encompasses fold-based structural systems and transformable configurations applicable to materials beyond paper. Introducing such principles within school mathematics creates a preparatory pathway toward understanding deployable structures, mechanical linkages, and transformable design in STEM-oriented education.

Origami, therefore, should be considered not as an extracurricular artistic activity, but as a structured method for cultivating spatial reasoning, algorithmic thinking, proof culture, and early engineering intuition. Purposeful inclusion of mathematical origami in school curricula and project-based learning may provide a coherent foundation for both advanced mathematical study and future engagement with fold-based engineering systems.

2020 Mathematics Subject Classification: 51M15, 51N20, 97G40, 97U70.

Keywords: mathematical origami; geometric constructions; folding axioms; spatial reasoning; mathematics education; STEM education; origami-like constructions.

References

- [1] K. Haga, *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding*, World Scientific, Singapore, 2008.
- [2] R. J. Lang, “Origami and Geometric Constructions,” in T. Hull (ed.), *Origami⁴: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, A K Peters, Natick, MA, 2009, pp. 555–566.
- [3] T. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [4] T. Hull (ed.), *Origamiⁿ: Proceedings of the International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, A K Peters/CRC Press, Boca Raton, FL, various volumes.

ГЕОМЕТРИЯ САБАҒЫН ЦИФРЛЫҚ ПЛАТФОРМАЛАРДЫ ПАЙДАЛАНЫП ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ ТИІМДІЛІГІ

Л.А. СЫРЛЫБАЕВА¹, Е.А. ТҰЯҚОВ²

^{1,2}Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан
essentuyak@gmail.com

Қазіргі заман талабына сай кез келген пәнді оқу барысында оны цифрлық технологиялармен ұштастырып оқыту негізгі мәселелердің бірі болып табылады. Цифрлық технологияларды

тиімді пайдалана білу қабілеті көптеген салада маңызды рөл атқарады. Білім беру саласында цифрлық технологиялар дидактикалық құрал ретінде де, цифрлық ортада оқытуды ұйымдастыру тәсілі ретінде педагогикалық технология ретінде де қолданылады [1]. Цифрлық білім беру платформасы - оқу үдерісін ұйымдастыруға, білім мазмұнын электрондық түрде ұсынуға және оқушы нәтижелерін қадағалауға арналған бағдарламалық орта. Платформалар мәтіндік, бейнелік және интерактивті материалдарды тұтас жүйеге біріктіре отырып, оқушыға өз қарқынымен жұмыс істеуге, мұғалімге нәтижелерді нақты уақытта бақылауға мүмкіндік береді. Геометрияны оқытуда олар геометриялық объектілерді динамикалық модельдеуге және оқушының зерттеушілік белсенділігін дамытуға қызмет етеді. Дәстүрлі оқытуды толықтырып отырып, цифрлық технологияларды дұрыс пайдалана білу оқу процесінде білімді игеру тиімділігін арттыруға көмектеседі.

Білім беруде цифрлық құралдарды пайдалануға арналған көптеген зерттеулер мұғалім мен оқушылардың сабақтастық өзара іс-қимылы режимінде және оның қосымша қолдауы аясында осындай технологиялардың мүмкіндіктерін өзектілендіретінін атап өткен жөн.

Цифрлық технологиялар мұғалімге сабақты айтарлықтай күш жұмсамай-ақ неғұрлым серпінді және қызықты етуге мүмкіндік береді. Арнайы оқыту бағдарламалары геометрия шеңберіндегі әртүрлі әрекеттердің құрамы мен мақсаттары туралы ақпарат береді. Құрастыру, қасиеттерді анықтау, шектер шеңберіндегі парақтағы геометриялық нысандармен жұмыс істеу сияқты осы әрекеттер оқушылардың математикалық қабілеттерін дамытуға көмектеседі. Өлшеу, байланыстарды табу, талдау, геометриялық фигураларды салыстыру және т.б. аналитикалық қабілеттерді дамытады. Тапсырма тек салыстыруға қатысты болса да, ол әртүрлі әрекеттерді қамтиды. Геометрияны оқытуда цифрлық білім беру платформаларын пайдалану жүйесі бірнеше өзара байланысты аспектілерді қамтиды. Бірінші кезеңде цифрлық құралдарды іріктеу және әдістемелік бейімдеу жүзеге асырылады: динамикалық геометрия ортасы (GeoGebra, Desmos), интерактивті оқыту платформалары (Bilimland, Kundelik), оқытуды басқару жүйелері (Moodle, Google Classroom). Осы ресурстар негізінде сабақтың цифрлық білім беру ортасы қалыптасады, ол білім алушының зерттеушілік қызметін ұйымдастыруға мүмкіндік береді. Келесі кезең геометриялық нысандарды динамикалық режимде құруды және зерттеуді болжайды, бұл бақылау арқылы теоремаларды өз бетінше «ашуға» мүмкіндік береді. Бұл цифрлық тәсілді дәстүрліден түбегейлі ерекшелендіреді: оқушы танымдық үдерістің белсенді қатысушысына айналады, тек қана бақылаушы емес.

Цифрлық платформаларды сабақтың барлық кезеңдерінде қолдануға болады. Кіріспе кезеңде GeoGebra немесе Desmos арқылы фигуралардың динамикалық моделін көрсету оқушы назарын тақырыпқа аударады. Негізгі кезеңде оқушылар платформада өз бетінше фигуралар тұрғызып, қасиеттерін бақылай отырып заңдылықтарды өздері ашады. Bilimland, Kundelik тапсырмалары білімді бекітуге көмектеседі. Қорытынды кезеңде Google Classroom немесе Moodle арқылы тест өткізіліп, нәтижелер автоматты түрде өңделеді және оқушыға жедел кері байланыс беріледі.

Ұй тапсырмасында платформалар оқушыға тапсырманы ыңғайлы уақытта орындауға, мұғалімге орындалуды қашықтан бақылауға мүмкіндік береді. Математика мұғалімдері арасында «Орта мектепте геометрия сабақтарында цифрлық платформаларды пайдалану» тақырыбында жүргізілген сауалнама цифрлық құралдардың геометрияны оқыту тәжірибесіне біртіндеп енгізіліп жатқанын көрсетті (сұралғандардың 61%-ы). Бұл ретте респонденттердің 74%-ы геометриялық құрылымдарды визуализациялау үшін платформаларды пайдаланады. Сонымен қатар мұғалімдердің 49%-ы цифрлық құралдармен жұмыс саласында әдістемелік қолдау мен біліктілікті арттыру қажеттілігін атап өтті. Артықшылық ретінде оқушылардың танымдық қызығушылығының өсуі және геометриялық материалды түсіну сапасының жақсаруы атап өтілсе, тәуекелдер қатарында қолмен геометриялық құрылым жасау дағдыларының төмендеуі аталды.

Цифрлық платформаларды пайдалану барысында басты ескерілуі керек жағдай - мұғалімнің жетекші рөлін жоймау. Оқу материалдарын дайындауда, оқыту нәтижелерін талдауда және саралап оқытуды ұйымдастыруда мұғалім басты тұлға болып қала береді.

Демек, цифрлық білім беру платформаларын әдістемелік тұрғыдан дұрыс қолдану орта мектепте геометрияны оқытудың тиімділігін арттырудың нәтижелі тетігіне айнала алады және оқушылардың кеңістіктік және логикалық ойлауын дамытуға ықпал етеді.

Кілтті сөздер: цифрлық платформа, цифрлық технологиялар, интерактивті оқыту, электрондық білім беру, математика дидактикасы, оқыту тиімділігі.

2020 Mathematics Subject Classification: 97Q60, 97U60

ӘДЕБИЕТ

[1] Абилхасимова, А. Е. Цифрлық білім беру ресурстарын білім беру үдерісінде қолдану, Молодой ученый, (2020), — № 14 (304), — С. 292-295.

[2] Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е., Поликарпов С.А. Основания математического образования в цифровой век, Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. (2023) — Т. 511. — С. 3–12.

[3] Мадияров Н.К., Дробышев Ю.А., Утеулиев Н.С. Математиканы оқытуда қолданылатын цифрлық білім беру ресурстары мен платформалары, in: «Әуезов оқулары-19: Тәуелсіз Қазақстанға-30» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының еңбектері, Шымкент, (2021), — Б. 107–110.

[4] Мамбетова Н.С., Анисимова Т.И. Использование цифровых ресурсов на уроках геометрии, Молодой ученый, (2023), Общество: социология, психология, педагогика. — № 8 (112). — С. 136–143.

ГЕОГЕВРА КӨМЕГІМЕН 5Е МОДЕЛІ АРҚЫЛЫ ОҚУШЫЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ ҚАБІЛЕТІН ЖЕТІЛДІРУ

Р.Б. ШЕРИМОВА¹, Л.Қ. ЖАЙДАҚБАЕВА²

^{1,2}М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан зерттеу университеті, Шымкент,
Қазақстан

raushan.sherimova@gmail.com

Қазіргі білім беруді цифрландыру жағдайында оқушылардың цифрлық қабілеттерін дамыту мектеп геометрия курсының басты мақсаттарының бірі. Жұмыста планиметрия есептерін оқытуда GeoGebra бағдарламасымен үйлестірілген «5Е» моделінің тиімділігі зерттелген. Зерттеудің мақсаты — GeoGebra бағдарламасының көмегімен «5Е» оқыту моделін қолдану арқылы 7-сынып оқушыларының планиметрия есептерін шығару қабілетін арттыру және олардың математикалық тұжырымдамаларды түсіну деңгейіне әсерін анықтау.

Зерттеу міндеттері GeoGebra бағдарламасымен үйлестірілген «5Е» оқыту моделінің тиімділігін эксперименттік тұрғыдан тексеру, оқушылардың геометриялық ұғымдарды меңгеруі мен есеп шығару дағдыларының даму динамикасын бақылау және дәстүрлі оқыту әдісі мен инновациялық әдісті салыстыра отырып, нәтижелерді статистикалық талдау жасау болып табылады.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы «5Е» оқыту кезеңдері мен GeoGebra бағдарламасының өзара әрекеттесуінің синергетикалық әсерін зерттеу, яғни екі әдістің бірлесіп қолданылуы оқушылардың геометриялық есептерді шығарудағы математикалық тұжырымдамаларды меңгеруіне тигізетін ықпалын айқындау.

«5Е» оқыту моделі — конструктивті оқыту теориясы мен когнитивті психологияға негізделген, бес кезеңнен тұратын педагогикалық модель [4]:

- **Engage (Қызықтыру/Назар аударту)** — оқушылардың сабаққа деген қызығушылығын ояту, өткен тақырыптармен байланыс орнату.
- **Explore (Зерттеу)** — оқушылардың өз бетінше немесе топпен жұмыс жасауы, мәселені зерттеуі.

- **Explain (Түсіндіру)** — алынған нәтижелерді талқылау, ұғымдарды тұжырымдау.
- **Elaborate (Дамыту/Тереңдету)** — алған білімді жаңа жағдайларда қолдану, күрделі есептерді шешу.
- **Evaluate (Бағалау)** — өзін-өзі бағалау және кері байланыс жасау.

GeoGebra бағдарламасы — геометрия, алгебра және анализді біріктіретін динамикалық бағдарламалық жасақтама. Бұл құрал геометриялық тәжірибелер жүргізуге, теоремаларды көрнекілеуге, фигуралар арасындағы тәуелділіктерді орнатуға мүмкіндік береді.

Зерттеуге Шымкент қаласындағы Назарбаев Зияткерлік мектебінің 7-сынып оқушыларынан 50 адам қатысты. Олар бақылау ($n = 25$) және эксперименттік ($n = 25$) топтарға бөлінді. Бақылау тобы дәстүрлі әдіспен, ал эксперименттік топ GeoGebra көмегімен 5E моделі бойынша оқытылды. Зерттеу алдында және соңында тест алынып, нәтижелер Стьюденттің t -критерий арқылы салыстырылды.

Эксперименттік топтың орташа көрсеткіші 10,76-дан 19,04-ке өсті ($t = 16,50$, $p < 0,05$), бақылау тобында 10,84-тен 15,52-ге өсті ($t = 7,50$, $p < 0,05$). Посттест нәтижелері бойынша эксперименттік топтың көрсеткіші бақылау тобынан айтарлықтай жоғары болды (19,04 және 15,52; $t = 12,75$, $p < 0,05$). Бұл айырмашылық статистикалық тұрғыдан маңызды.

GeoGebra қосымшасымен бірге қолданылған «5E» оқыту моделі геометрияны оқытуда дәстүрлі әдіске қарағанда тиімдірек екендігі дәлелденді. Бұл әдіс оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып, геометриялық ұғымдарды терең меңгеруіне және цифрлық дағдыларының дамуына ықпал етеді.

Кілтті сөздер: GeoGebra, 5E моделі, геометриялық есептер, цифрлық дағдылар, математикалық тұжырымдама.

2020 Mathematics Subject Classification: 97U50, 97D40.

ӘДЕБИЕТ

[1] Putri N.N.W.D., Astawa I.W.P., Ardana I.M. Improving Students' Conceptual Understanding Through Geogebra-Assisted "5E" Learning Cycle: Is It Effective? *Jurnal Pendidikan dan Pengajaran*, 54(1), 170–180 (2021).

[2] Adelabu F., Makgato M., Ramaligela M.S. The Importance of Dynamic Geometry Computer Software on Learners' Performance in Geometry. *The Electronic Journal of E-Learning*, 17(1), 52–63 (2019).

[3] Plaikoil A.K.S., Pujani N.M., Tika I.N. The Effect of 5E Learning Cycle Model on Problem Solving Ability in Terms of Student Numerical Ability. *Proceeding of International Conference on Fundamental and Applied Research* (2019).

[4] Duran L.B., Duran E. The 5E Instructional Model: A Learning Cycle Approach for Inquiry-Based Science Teaching. *Science Education Review*, 3(2), 49–58 (2004).

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ НЕГІЗІНДЕ МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ МЕН МҮМКІНДІКТЕРІ

Ш.Б. ИСМАЙЛОВА

Қазақ ұлттық аграрлық зерттеу университеті, Алматы, Қазақстан

Shakhmira2000@gmail.com

Қазіргі таңда білім беру жүйесінде цифрлық технологиялардың қарқынды дамуы оқыту әдістерін жаңартуды талап етеді. Әсіресе жасанды интеллект білім алушылардың жеке ерекшеліктерін ескере отырып, оқу процесін ұйымдастыруға мүмкіндік береді. Жасанды интеллект жүйелері оқушылардың білім деңгейін талдап, олардың қателерін анықтап, дербестендірілген оқу траекториясын қалыптастырады. Бұл оқыту сапасын арттыруға және білім алушының танымдық белсенділігін күшейтуге жағдай жасайды.

Математика пәні логикалық және аналитикалық ойлауды дамытатын негізгі пәндердің бірі болғандықтан, оны оқытуда заманауи цифрлық құралдарды қолдану ерекше маңызды. Қазіргі жағдайда математиканы оқыту тек теориялық білім берумен шектелмей, оны визуализациялау, модельдеу және деректермен жұмыс істеу дағдыларымен ұштастыруды қажет етеді. Осы тұрғыдан алғанда, цифрлық платформалар мен жасанды интеллект технологиялары математикалық білімді меңгерудің тиімді құралдарына айналып отыр.

Мысал ретінде GeoGebra платформасы мен жасанды интеллект жүйелерін біріктіре отырып оқытуды қарастырайық. Берілген функция:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

GeoGebra көмегімен функцияның графигі салынып, оның түбірлері визуалды түрде анықталады. Оқушы график арқылы функцияның нөлдерін $x = 1$ және $x = 3$ екенін байқай алады. Алайда кейбір оқушылар теңдеуді аналитикалық жолмен шешуде қателік жіберуі мүмкін. Мысалы,

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

теңдеуін шешу барысында оқушы жіктеу тәсілін дұрыс қолданбауы ықтимал.

Осындай жағдайда жасанды интеллект жүйесі оқушының шешу жолын талдап, қатенің қай кезеңде кеткенін көрсетіп, дұрыс бағыт ұсынады:

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1, x = 3$$

Сонымен қатар, жүйе оқушының жіберген қатесіне сәйкес қосымша ұқсас тапсырмалар ұсына алады. Яғни, GeoGebra визуализацияны қамтамасыз етсе, жасанды интеллект оқушының білім алу әрекетін талдап, оқытуды дараландырады. Бұл цифрлық технологиялар мен жасанды интеллекттің өзара үйлесімді қолданылуы математиканы оқытудың тиімділігін арттыратынын көрсетеді.

Сонымен қатар, жасанды интеллектті білім беру үдерісіне енгізуде бірқатар өзекті мәселелер де бар. Олардың қатарына мұғалімдердің цифрлық құзыреттілігінің жеткіліксіздігі, оқу мазмұнының толық жаңартылмауы, техникалық ресурстардың біркелкі болмауы және технологияға шамадан тыс тәуелділік жатады. Егер оқыту процесінде жасанды интеллект тек дайын жауап ұсынушы құрал ретінде ғана қолданылса, бұл оқушының өз бетінше ойлау қабілетінің әлсіреуіне әкелуі мүмкін. Сондықтан ЖИ-ды қолдану педагогикалық мақсатқа бағындырылып, мұғалімнің кәсіби басшылығымен жүзеге асырылуы тиіс.

Қорыта айтқанда, жасанды интеллект математиканы оқытуда жаңа мүмкіндіктер ашады. Ол оқыту процесін дараландырып, білім сапасын арттыруға ықпал етеді, ал GeoGebra сияқты цифрлық құралдар математикалық ұғымдарды көрнекі түрде түсіндіруге мүмкіндік береді. Алайда бұл технологияларды тиімді пайдалану үшін педагогтердің кәсіби дайындығын жетілдіру, оқу мазмұнын жаңарту және цифрлық құралдарды орынды интеграциялау қажет.

Кілтті сөздер: жасанды интеллект, математиканы оқыту, цифрлық білім беру, GeoGebra.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97U50

ӘДЕБИЕТ

- [1] Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson, 2021.
- [2] Selwyn N. *Education and Technology: Key Issues and Debates*. Bloomsbury, 2016.
- [3] Hohenwarter M. GeoGebra as a Tool for Teaching and Learning Mathematics, *International Journal for Technology in Mathematics Education*, vol. 15, no. 2, pp. 63–66, 2008.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПРЕОДОЛЕНИЯ КОГНИТИВНЫХ БАРЬЕРОВ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

А.М. ШИНТЕМИРОВ

*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы,
Казахстан*

2571186@abaiuniversity.edu.kz

Нарушение межпредметных связей между школьными курсами математики и физики формирует серьезные когнитивные барьеры у старшеклассников профильных школ при решении нестандартных задач. На практике возникает ситуация: одаренные учащиеся часто хорошо понимают физическую суть явлений интуитивно, но при попытке их математического описания сталкиваются с острым дефицитом математического аппарата. Как показывают современные исследования, способность объединять формальный математический расчет и качественное физическое осмысление критически важна для надежного и безошибочного решения олимпиадных задач по физике [2]. Поскольку специфика олимпиадных задач объективно опережает базовые требования школьной программы, требуя применения производной и интеграла на более ранних этапах, возникает необходимость в дополнительном расширении математического аппарата учащихся [3]. Это расширение является важнейшим шагом к обеспечению преемственности образования между профильной школой и высшими учебными заведениями [1].

Материалом для нашего исследования послужил анализ 180 реальных письменных работ, выполненных участниками заключительных этапов республиканских и областных олимпиад (РНПЦ «Дарын», 2021-2025 гг.) среди 9–11 классов. Нашей главной целью было выявить истинную природу аналитических ошибок старшеклассников при анализе нелинейных и динамических процессов, где основы математического анализа выступают главным инструментом. Собранная эмпирическая статистика показала четкую возрастную градацию когнитивных математических барьеров, которые не позволяют школьникам решать задачи высокого уровня.

В 9 классе при столкновении с пространственной нелинейностью (например, в гравитационных полях) у 49,1% участников доминирует «линейная ловушка» — попытка заменить расчет непрерывно меняющихся величин обычным умножением школьных формул (например, расчет работы переменной силы тяготения ведется через алгебраическое произведение $A = F \cdot S$ вместо интегрирования). Ученики мыслят шаблонами линейных функций, так как аппарат работы с криволинейными зависимостями у них еще не сформирован. Еще 13,2% пытаются выкрутиться с помощью метода алгебраического усреднения, что приводит к грубым погрешностям в вычислениях.

В 10 классе главным препятствием становится барьер дифференцирования. При анализе динамических электромагнитных процессов 27,9% выборки пытаются применять статические законы школьной алгебры, игнорируя, например, тот факт, что сила тока в контуре есть производная заряда по времени $I = q'$, и неправомерно используя статические формулы постоянного тока. Они не владеют навыком вычисления скорости изменения величины через производную по времени, что фундаментально блокирует возможность составить верное аналитическое описание.

В 11 классе эта проблема не исчезает, а усугубляется тем, что большинство учеников не могут самостоятельно составить дифференциальные уравнения (базового вида $x'' + \omega^2 x = 0$) для непрерывных колебательных процессов. Успешность решения задач здесь напрямую связана с внепрограммными знаниями: 64% успешных решений базируются на уверенном применении дифференциальных уравнений, а 24% — на методе комплексных чисел, недоступном в рамках стандартного школьного курса алгебры.

Результаты проведенного анализа подтверждают актуальность дополнительной углубленной работы с одаренными учащимися в профильных классах. Для преодоления выявленных когнитивных барьеров требуется внедрение в рамках индивидуальной или олимпиадной подготовки элементов опережающего изучения основ математического анализа. Методика такого опережающего изучения должна выстраиваться поэтапно: от интуитивного введения понятия бесконечно малых величин для преодоления «линейной ловушки» в 9 классе до строгого определения производной в 10 классе и обучения основам составления дифференциальных уравнений в 11 классе. Чтобы решить проблему нарушения межпредметных связей, эти основы (производная и интеграл) должны раскрываться в неразрывной связи: и как строгая фундаментальная абстрактная теория, и как мощный аналитический инструмент для описания реальных физических процессов, обеспечивающий надежный структурный каркас для логического мышления. Если мы своевременно начнем обучать школьников работе с бесконечно малыми величинами, математика перестанет быть для них когнитивным барьером, став реальным ресурсом для успешного решения междисциплинарных задач.

Ключевые слова: когнитивные барьеры, межпредметные связи, опережающее изучение, математический анализ, нелинейные и динамические процессы, олимпиадные задачи.

2020 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97M50, 97I40, 97I50

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абылкасымова А. Е., Семенов А. Л. О проблеме преемственности обучения математике в школе и в педагогическом вузе // *Continuum. Математика. Информатика. Образование*. — 2024. — № 2. — С. 31–41.
- [2] Kuo E., Hull M. M., Elby A., Gupta A. Assessing mathematical sensemaking in physics through calculation-concept crossover // *Physical Review Physics Education Research*. — 2020. — Vol. 16, No. 2. — P. 020109.
- [3] Palmgren E., Kokkonen T., Bruun J. Roles of mathematics in physics education: A systematic review // *Physical Review Physics Education Research*. — 2025. — Vol. 21, No. 2. — P. 020602.

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОБУЧЕНИЯ СТОХАСТИКЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Н.Т. ТАШТЕМИРОВА

¹Гулистанский государственный педагогический институт
tnargiz1976@gmail.com

Цифровая трансформация общества существенно изменяет требования к математическому образованию. Особое значение приобретает развитие стохастического мышления учащихся, включающего понимание случайности, вероятностных закономерностей и методов анализа данных. В статье рассматриваются современные проблемы обучения стохастике в школьном курсе математики, анализируется роль вероятностно-статистической линии в формировании математической грамотности учащихся и развитии навыков анализа данных. Особое внимание уделяется использованию цифровых образовательных технологий, компьютерного моделирования и интерактивных симуляций. Показано, что интеграция цифровых инструментов в образовательный процесс способствует развитию исследовательских навыков, критического мышления и компетенций XXI века.

Введение. В XXI веке данные становятся ключевым ресурсом развития общества. Практически все сферы деятельности — экономика, медицина, инженерия, экология и социальные науки — активно используют статистические методы и вероятностные модели.

В связи с этим возрастает значение стохастической подготовки учащихся в школьном курсе математики. Стохастика объединяет комбинаторику, теорию вероятностей и математическую статистику и позволяет описывать процессы, связанные со случайностью и неопределённостью.

Международные исследования качества образования, такие как PISA, подчеркивают важность формирования у учащихся навыков интерпретации данных, оценки вероятностей и критического анализа статистической информации.

Цель настоящего исследования заключается в анализе актуальных проблем обучения стохастике в школе в условиях цифровой трансформации образования и определении перспективных направлений совершенствования методики преподавания.

Теоретические основы обучения стохастике. Стохастическое мышление представляет собой способность анализировать случайные процессы, понимать вероятностные закономерности и интерпретировать статистические данные.

Формирование стохастической культуры учащихся предполагает развитие:

- вероятностного мышления;
- статистической грамотности;
- навыков анализа данных;
- способности принимать решения в условиях неопределённости.

Согласно современным образовательным стандартам, изучение стохастики должно быть направлено не только на усвоение формальных математических моделей, но и на развитие практических навыков работы с реальными данными.

Роль цифровых технологий в обучении стохастике. Цифровизация образования открывает новые возможности для визуализации и исследования случайных процессов.

Использование цифровых инструментов позволяет:

- моделировать случайные эксперименты;
- визуализировать распределения вероятностей;
- анализировать статистические данные;
- проводить виртуальные исследования.

Например, динамические математические среды позволяют моделировать случайные эксперименты, такие как подбрасывание монеты или моделирование распределения случайных величин.

Рассмотрим пример вероятностной модели.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

где m — число благоприятных исходов, n — общее число возможных исходов эксперимента.

Использование компьютерного моделирования позволяет учащимся проводить многократные виртуальные эксперименты и наблюдать закономерности распределения вероятностей.

Методические проблемы обучения стохастике. Несмотря на важность стохастических знаний, в практике школьного обучения существует ряд методических проблем.

Абстрактность вероятностных понятий

Понятия случайности и вероятности являются абстрактными и часто вызывают трудности у учащихся.

Недостаточная практическая направленность

Задачи по теории вероятностей нередко имеют формальный характер и недостаточно связаны с реальными ситуациями.

Недостаточное использование цифровых ресурсов

Многие школы пока не используют возможности цифровых технологий для моделирования вероятностных процессов.

Перспективные направления развития методики

Для повышения эффективности обучения стохастике можно выделить следующие направления развития методики:

- 1) интеграция цифровых образовательных технологий;
- 2) использование исследовательских методов обучения;
- 3) применение задач на основе анализа реальных данных;
- 4) развитие математической и статистической грамотности.

Особое значение имеет использование исследовательских задач, позволяющих учащимся самостоятельно анализировать данные и строить вероятностные модели.

Заключение. Стохастика занимает важное место в современном школьном математическом образовании. Её изучение способствует развитию вероятностного мышления, формированию навыков анализа данных и подготовке учащихся к решению практических задач.

Цифровая трансформация образования создаёт новые возможности для совершенствования методики обучения стохастике. Использование цифровых технологий, компьютерного моделирования и интерактивных образовательных ресурсов позволяет повысить эффективность обучения и сформировать у учащихся компетенции XXI века.

Ключевые слова: стохастика, теория вероятностей, статистика, школьная математика, цифровая трансформация, математическая грамотность, анализ данных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Polya G. *How to Solve It*. Princeton University Press.
- [2] OECD. PISA 2022 Mathematics Framework. OECD Publishing.
- [3] Batanero C., Chernoff E., Engel J. Teaching and Learning Probability and Statistics.
- [4] Batanero C., Chernoff E., Engel J. Teaching and Learning Probability and Statistics. Shaughnessy J. Research on Probability and Statistics Education.

О ПРОЕКТИРОВАНИИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО СВОЙСТВА» НА ОСНОВЕ ТЕЗАУРУСНОГО ПОДХОДА

Р.М. ТУРГУНБАЕВ

Ташкентский международный университет Кимё, Ташкент, Узбекистан

musamat1@yandex.ru

В последние годы актуализируется задача систематизации содержания образования на основе семантического подхода, то есть проектирования учебного материала в виде сети понятий и связей между ними. В этом направлении “тезаурус” трактуется как упорядоченная совокупность понятий, правил и соответствующих им схем практических действий, формирующихся в сознании учащегося (студента) [4,5]. Однако в теоретически насыщенных дисциплинах, таких как математический анализ, тезаурус зачастую ограничивается составлением списка опорных терминов (дескрипторов). В результате внутренние связи учебного материала становятся для студента “невидимыми”, а процесс усвоения превращается не в последовательную цепочку, а в набор разрозненных фрагментов.

Последовательное (целостное) усвоение материала студентом особенно ярко проявляется в теме “Множество действительных чисел и его свойства”: здесь понятия, правила и процедуры очень тесно взаимосвязаны. Если студент не может четко различать, какое понятие является опорным для другого, какая связь выполняет роль “моста”, когда применяется правило и какому математическому объекту соответствует процедура решения, то перенос знаний при переходе к последующим разделам затрудняется. Поэтому возникает необходимость построения учебного тезауруса как модели преемственности, управляющей процессом усвоения знаний студентом.

В данной работе в качестве основного примера взят подход к введению понятия действительного числа через сечение Дедекинда в множестве рациональных чисел в рамках темы

“Множество действительных чисел и его свойства” курса математического анализа. Тезаурус по этой теме формализуется не просто как набор дескрипторов, а как семантическая сеть, объединяющая в единую систему компоненты “понятие–правило–процедура–задача”. При этом в качестве базового слоя определяются четыре основных типа семантических отношений [1–3]: ВТ/НТ (широкое–узкое; род–вид) — раскрывает иерархическое расположение понятий и путь “опора → расширение”; РТ (связанное/мостиковое) — обеспечивает последовательный переход внутри темы и между темами; “условие–следствие” (IF–THEN) — уточняет условие применения и результат правил и свойств (“когда это работает?”); “процедура–объект” ($P \rightarrow O$) — разграничивает, к какому объекту применяются процедуры решения (“что я делаю и к чему применяю?”). Кроме того, в качестве вспомогательного слоя вводятся отношения эквивалентности и синонимии–антонимии.

Цель исследования — формализовать процесс введения действительных чисел через дедекиндово сечение в виде учебного тезауруса на основе сети семантических отношений и, связав его с системой задач и процедурами их решения, обосновать методическое решение, способствующее органичному усвоению материала студентом. Для достижения цели поставлены задачи: выделение опорных дескрипторов по теме и их размещение в иерархии ВТ/НТ; формирование реестра семантических связей путем установления между дескрипторами отношений РТ, “условие–следствие” и $P \rightarrow O$; составление системы основных задач по теме с привязкой каждой задачи к соответствующим дескрипторам и семантическим отношениям; стандартизация решений выбранных основных задач в виде последовательности шагов $P \rightarrow O$ и анализ типичных ошибок с точки зрения “какое отношение было нарушено?”; определение минимальных индикаторов органичного усвоения.

Объект исследования — процесс преподавания темы “Множество действительных чисел и его свойства” в курсе математического анализа. Предмет исследования — спроектированная на основе семантических отношений (ВТ/НТ, РТ, “условие–следствие”, $P \rightarrow O$, а также эквивалентность и синонимии–антонимии) структура учебного тезауруса при введении действительных чисел на основе дедекиндова сечения и механизм его связи с задачами и процедурами.

Новизна исследования заключается в том, что процесс введения понятия действительного числа через дедекиндово сечение формализуется как сеть семантических отношений в рамках учебного тезауруса, и эта сеть напрямую связывается с типичными разрывами в усвоении: путаница с классами A и B сечения, игнорирование условий упорядоченности, отсутствие проверки условий применимости правил и свойств, применение процедуры к несоответствующему объекту. В предлагаемой модели учебные действия (“построение сечения”, “сравнение на основе сечений”, получение $x < z < y$ из $x < y$ (идея плотности), “различение рационального/иррационального случая”) представлены в преемственной связи через отношения ВТ/НТ, РТ, “условие–следствие” и $P \rightarrow O$; отношения эквивалентности и синонимии–антонимии обеспечивают устойчивое распознавание понятия в различных представлениях.

Ключевые слова: математический анализ, действительные числа, учебный тезаурус, семантические связи, преемственность.

2020 Mathematics Subject Classification: 97B50, 97C30, 97C70

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Alexiev V. On the composition of ISO 25964 hierarchical relations, *International Journal on Digital Libraries* (2016).
- [2] Bechhofer S., Goble C. Thesaurus construction through knowledge representation, *Data & Knowledge Engineering*, **37**:1 (2001), 25–45.
- [3] Will L. The ISO 25964 data model for the structure of an information retrieval thesaurus, *Bulletin of the American Society for Information Science and Technology* (2012).
- [4] Турбович Л.Т. Информационно-семантическая модель обучения, Л. (1970).
- [5] Тургунбаев Р.М., Жаров В.К. Проблема преемственности в методике преподавания математики и её интерпретации в современных образовательных школах, *Вестник РГГУ. Серия Информатика. Информационная безопасность. Математика*, **2** (2019), 52–74.

ПОДДЕРЖКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОСВОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕКСТА СТУДЕНТАМИ ПЕРВОГО КУРСА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ВОПРОСОВ: ЦИФРОВАЯ И АИ-ОСНОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПРИМЕНЕНИЯ

Д.У. УМАРАЛИЕВА

Национальный педагогический университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

khaldibekova96@gmail.com

На первом курсе высшего образования при работе с математическим текстом (определение, свойство, доказательство, пример, задача) студенты часто сталкиваются с проблемой поверхностного чтения и неспособности выделять смысловые связи. В условиях широкого распространения инструментов искусственного интеллекта (чат-ботов) получение «быстрого ответа» упрощается, однако это может усиливать иллюзию понимания без глубокой проработки текста. В связи с этим актуальна управляемая интеграция ИИ не как поставщика готовых решений, а как инструмента, стимулирующего постановку вопросов и самопроверку.

Цель: изложить цифровую и АИ-основанную модель применения, поддерживающую последовательное освоение математического текста студентами 1-го курса на основе метода вопросов.

Задачи:

- систематизировать метод вопросов на основе понятия “скрытый вопрос”;
- классифицировать вопросы по 4 типам (Т1: на уточнение; Т2: условие–следствие; Т3: обосновывающее “почему?”; Т4: выходящий за рамки текста);
- разработать сценарий генерации вопросов с помощью ИИ и предоставления обратной связи на основе рубрики;
- предложить рубрику с уровнями 0–1–2 и индикаторы для отслеживания последовательного освоения.

Новизна: метод вопросов формализован в виде микроцикла “вопрос → ответ → рубрика → обратная связь → переработка ответа”; при этом ИИ применяется только во вспомогательной роли генератора вопросов и указателя критериев проверки (не предоставляя готового решения).

Практическая значимость: модель может быть внедрена даже в простых цифровых средах, таких как Moodle, Google Classroom или Google Docs, предоставляя преподавателю инструмент для быстрого мониторинга, а студенту — механизм для активного чтения и самопроверки.

Методическая модель Ядро модели — работа со “скрытыми вопросами”. Вопросы Т1 уточняют содержание определений и терминов; вопросы Т2 активизируют понимание того, когда работает правило (условие–следствие); вопросы Т3 восстанавливают ключевые шаги доказательства; вопросы Т4 указывают на отсутствие ответа в тексте, требуя обращения к дополнительным источникам, примерам или методам доказательства.

Сценарий генерации вопросов с помощью ИИ (масштабирование) Сценарий: 1–2 абзаца исходного текста вводятся в систему; система предлагает 10 скрытых вопросов (Т1–Т4); студент выбирает 4 вопроса и отвечает на каждый из них, приводя (i) доказательство из текста, (ii) краткий ответ, (iii) проверку; система предоставляет только обратную связь по рубрике 0–1–2 (указывает на недостатки, даёт рекомендации по переработке, называет критерии проверки); студент заново редактирует свои ответы. Мера предосторожности: ИИ не даёт готовых решений; его роль ограничена постановкой вопросов, подсказками и критериями проверки.

Оценка: рубрика 0–1–2 и индикаторы Каждый “вопрос–ответ” оценивается по 4 критериям на уровне 0–1–2: (1) выделение условия, (2) приведение доказательства из текста, (3) логическая последовательность (“условие → преобразование → вывод”), (4) самопроверка. Эта

рубрика служит для быстрого выявления “точек разрыва” в последовательном освоении (вывод без условия, ответ без доказательства, отсутствие проверки).

Пример (упорядоченность и плотность рациональных чисел) На основе текста о свойствах упорядоченности и плотности рациональных чисел система предлагает 10 вопросов; студент выбирает, например, вопросы, касающиеся смысла утверждения “выполняется только одно из”, доказательства транзитивности, нахождения промежуточного числа через среднее арифметическое и вывода “бесконечно много” из свойства плотности. После получения обратной связи ответы переписываются: условия чётко выделяются, доказательство приводится из текста, добавляется этап проверки; а для вопроса Т4 формализуется не полное решение, а направление поиска и критерии проверки.

Заключение Цифровая и AI-основанная модель применения метода вопросов поддерживает последовательное освоение математического текста студентами 1-го курса: она системно формирует навыки активного чтения, выделения условия и следствия, восстановления структуры доказательства, самопроверки и переработки ответа. В этом процессе ИИ позволяет масштабировать метод через постановку вопросов и предоставление критериев проверки, не предлагая готовых решений. Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: математический текст, метод вопросов, скрытый вопрос, последовательное освоение, цифровая трансформация, искусственный интеллект, рубрика, обратная связь.

2020 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97B50, 97C70.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Anderson T., Shattuck J. Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research, *Educational Researcher*, 41:1 (2012), 16–25.
- [2] Moskal B.M., Leydens J.A. Scoring Rubric Development: Validity and Reliability, *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 7:1 (2000).

ӘЛ-ФАРАБИДІҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ САЛУ ЕСЕПТЕРІН ОҚЫТУДА ВЕБ-ПОРТАЛ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫН ҚОЛДАНУ

М.С. УРАЗЫМБЕТОВ¹, Е.Ы. БИДАЙБЕКОВ², К.У. УМБЕТБАЕВ³

^{1,2,3} Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

¹3155580@gmail.com, ²kairatkairat52@gmail.com

Кіріспе. Қазіргі білім беру жүйесінде ақпараттық-коммуникациялық технологияларды оқу үдерісіне кеңінен енгізу өзекті мәселе болып отыр. Ұлы ойшыл, ғалым Әбу Насыр әл-Фарабидің математика, атап айтқанда геометрия саласындағы мұрасы — бүгінгі математика білімімен терең сабақтастықта. Осы мұраны заманауи веб-технологиялар арқылы оқытуға ұсыну — білімнің тарихи тамырын жаңа ұрпаққа жеткізудің тиімді жолы болып табылады.

Зерттеудің өзектілігі. Әл-Фарабидің геометриялық салу есептері — циркуль мен сызғыш арқылы дұрыс көпбұрыштарды салу алгоритмдері — математикалық ойлауды дамытудың баға жетпес құралы. Дегенмен, бұл мұраны мектеп пен жоғары оқу орындарының оқу бағдарламасына кіріктіру әлі де жеткіліксіз деңгейде. al-farabi.kaznu.kz ғылыми-білімдік порталы дәл осы олқылықты жою мақсатында құрылып, әл-Фарабидің математикалық мұраларын цифрлық форматта ұсынады.

Мақсаты мен міндеттері. Зерттеудің мақсаты — al-farabi.kaznu.kz веб-порталы негізінде әл-Фарабидің геометриялық салу есептерін оқытудың тиімді моделін ұсыну. Осы мақсатқа жету үшін келесі міндеттер анықталды: порталдың мазмұнын педагогикалық тұрғыдан талдау; геометриялық салу алгоритмдерін веб-ортада ұсынудың тиімділігін бағалау; порталды оқу үдерісіне кіріктірудің әдістемелік ұсыныстарын жасау.

Веб-порталдың мазмұны мен мүмкіндіктері. al-farabi.kaznpu.kz порталы Абай атындағы ҚазҰПУ ұжымы тарапынан жасалған ғылыми-білімдік ресурс болып табылады. Портал үш тілде (қазақша, орысша, ағылшынша) жұмыс істейді және келесі бөлімдерден тұрады: Геометриялық мұралар, Тригонометриялық мұралар, Музыка теориясының арифметикалық негіздері. Геометриялық бөлімде әл-Фарабидің циркуль мен сызғыш арқылы дұрыс үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш және тоғызбұрыш салу алгоритмдері интерактивті түрде ұсынылған. Әрбір алгоритм қадам-қадамымен анимация арқылы көрсетіліп, оқушының өз бетімен жаттығуына мүмкіндік береді.

Әдістемелік аспект. Веб-портал технологияларын геометрияны оқытуда қолданудың бірқатар педагогикалық артықшылықтары бар. Біріншіден, визуалды интерактивті анимациялар абстрактілі геометриялық ұғымдарды нақтылы және түсінікті етеді. Екіншіден, оқушы өз қарқынымен жеке оқу траекториясын жасай алады. Үшіншіден, портал материалдары үй тапсырмасы мен өзіндік жұмысқа пайдаланылуы мүмкін. Зерттеу нәтижелері бойынша порталды сабақ үдерісіне кіріктіру оқушылардың геометриялық ойлауы мен алгоритмдік дағдыларының дамуына оң ықпал ететіні анықталды.

Нәтижелер мен талқылау. Зерттеу барысында al-farabi.kaznpu.kz порталын математика сабақтарында қолданған оқушылар тобында геометриялық салу есептерін орындау сапасы айтарлықтай жоғарылағаны байқалды. Оқушылар әл-Фарабидің алгоритмдерін дәстүрлі оқулықтан гөрі веб-портал форматында оңай меңгеретінін атап өтті. Порталдың үш тілде қолжетімділігі оны ұлттық мектептер мен орыс тілді мектептердің оқу үдерісіне бірдей кіріктіруге мүмкіндік береді. Бұдан бөлек, портал әл-Фараби мұрасына деген оқушылардың қызығушылығы мен ұлттық рухани мұраға сүйіспеншілігін арттырудың тиімді құралына айналды.

Қорытынды. Әл-Фарабидің геометриялық салу есептерін оқытуда al-farabi.kaznpu.kz веб-порталын қолдану — дәстүрлі педагогикалық тәсілдерді цифрлық технологиялармен ұштастырудың нәтижелі үлгісі. Бұл тәжірибе Қазақстан мектептерінде математиканы ұлттық мұрамен сабақтастыра оқытуға арналған басқа цифрлық ресурстарды жасаудың бастамасы бола алады. Болашақта порталды мобильді қосымшамен толықтыру және оқу бағдарламасына ресми кіріктіру ұсынылады.

Кілтті сөздер: әл-Фараби, геометриялық салу есептері, веб-портал, ақпараттық технологиялар, математиканы оқыту, цифрлық білім беру.

ӘДЕБИЕТ

- [1] al-farabi.kaznpu.kz — Әл-Фарабидің математикалық мұралары. Ғылыми-білім беру порталы., Абай атындағы ҚазҰПУ, 2016–2022.
- [2] Бидайбеков Е.Ы., Гриншкун В.В. Математиканы оқытуда ақпараттық технологияларды пайдалану. — Алматы: ҚазҰПУ, 2018. — 210 б.
- [3] Аль-Фараби. Математические трактаты / Пер. с арабского. — Алма-Ата: Наука, 1972. — 312 с.
- [4] Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании. — М.: Школа-Пресс, 2010. — 272 с.

9-СЫНЫП АЛГЕБРА КУРСЫНДА «ТІЗБЕКТЕР» ТАРАУЫН ОҚЫТУДА ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ТИІМДІ ҚОЛДАНУ

Д.Б. ХАМИТ

Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

dilyara.khamit@bk.ru

Қазіргі білім беру жағдайында цифрлық технологияларды қолдану мектеп математикасын оқытудың тиімділігін арттырудың маңызды құралы болып табылады. 9-сынып алгебра

курсындағы «Тізбектер» тарауын оқыту барысында оқушылар жиі формулаларды жаттаумен шектеліп, олардың мағынасын толық түсінбей қалады. Сондықтан бұл тарауды оқытуда көрнекілік пен интерактивтілікті арттыру қажеттілігі туындайды.

Цифрлық құралдар (мысалы, GeoGebra, Desmos) тізбектерді график арқылы көрсетуге мүмкіндік береді, бұл оқушыларға тізбекті n -ге тәуелді функция ретінде түсінуге көмектеседі. Сонымен қатар, параметрлерді өзгерту арқылы оқушылар арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың қасиеттерін өз бетімен зерттей алады. Бұл олардың логикалық және зерттеушілік дағдыларын дамытады [1].

GeoGebra бағдарламасында Sequence командасын қолдану арқылы тізбекті координаталар жиыны ретінде визуализациялау оқушыларға оның функционалдық табиғатын түсінуге мүмкіндік береді.

Мысал 1. Арифметикалық прогрессияда үшінші және жетінші мүшелердің қосындысы 40-қа тең, ал алғашқы бес мүшесінің қосындысы 70-ке тең. Прогрессияның бірінші мүшесін және айырмасын табыңдар [2].

1. GeoGebra бағдарламасында a_1 және d параметрлерін енгізіп, тізбекті модельдеп, параметрлерді өзгерте отырып берілген шарттарға сәйкес мәндерді табыңдар.
2. Нәтижені аналитикалық жолмен тексеріңдер.

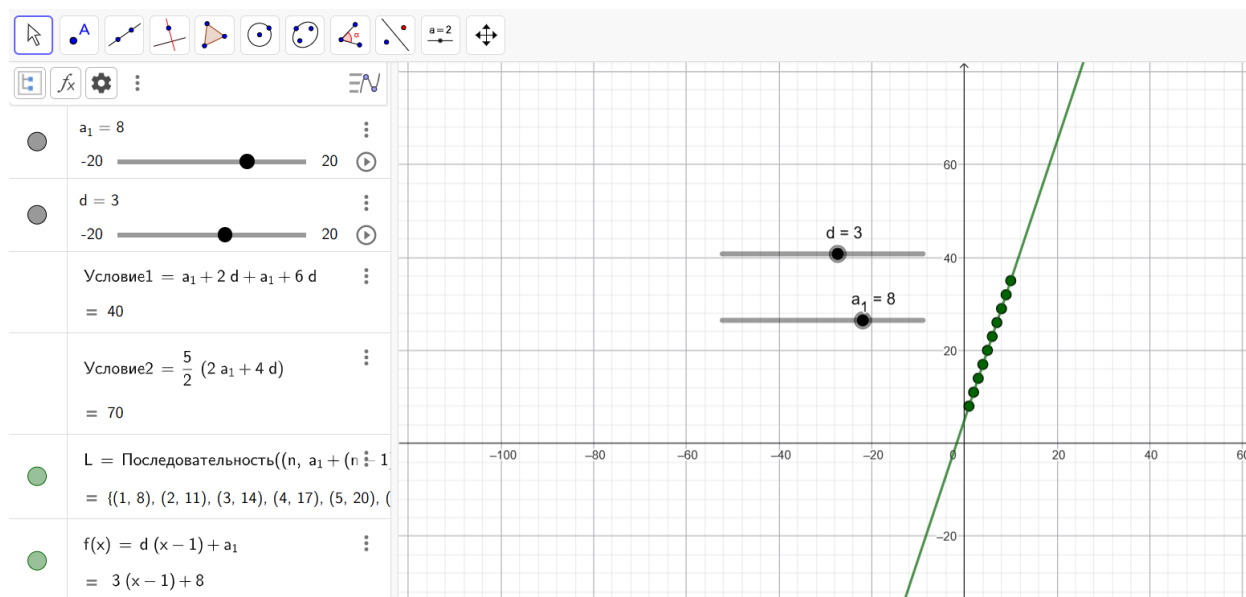
Есептің берілгені:

$$a_3 + a_7 = 40, \quad S_5 = 70.$$

Табу керек: a_1 және d .

Шешуі:

1. GeoGebra бағдарламасында a_1 және d параметрлерін енгізіп, тізбекті модельдеп, параметрлерді өзгерте отырып берілген шарттарға сәйкес мәндерді табамыз:



Сурет 1: GeoGebra бағдарламасында алынған нәтиже

2. Нәтижені аналитикалық жолмен тексереміз:

Формула:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Онда 3-ші және 7-ші мүшелер:

$$a_3 = a_1 + 2d, \quad a_7 = a_1 + 6d.$$

Қосындысы:

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d = 40, \quad a_1 + 4d = 20. \quad (1)$$

Алғашқы 5 мүшесінің қосындысы:

$$S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 70, \quad a_1 + 2d = 14. \quad (2)$$

(2) – (1):

$$a_1 + 4d - (a_1 + 2d) = 20 - 14, \quad 2d = 6, \quad d = 3.$$

(2)-ге қоямыз:

$$a_1 + 2 \cdot 3 = 14, \quad a_1 = 8.$$

Жауабы: $a_1 = 8$, $d = 3$.

Қорытынды. Цифрлық технологияларды пайдалану 9-сынып алгебра курсындағы «Тізбектер» тарауын түсінуді арттырады. GeoGebra сияқты динамикалық орта тізбектің заңдылықтарын визуалды зерттеуге, параметрлерді өзгертіп нәтижені бақылауға мүмкіндік береді. Бұл оқушыларға прогрессияларды тек формула ретінде емес, функционалдық және зерттеушілік тұрғыдан меңгеруге жағдай жасайды. Сонымен қатар, аналитикалық тексеру мен параметрлік модельдеудің комбинациясы білімді тереңдетіп, логикалық ойлауды дамытады және оқу сапасын жақсартады.

Кілтті сөздер: арифметикалық прогрессия, геометриялық прогрессия, цифрлық технологиялар, GeoGebra, зерттеушілік оқыту, функционалдық тәсіл.

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97U50, 97I20

ӘДЕБИЕТ

[1] Orazalieva L.T., Mekebaev N.O. Digitalization of Mathematics Education: Teaching Methods Based on Online Platforms and Tools in Schools, 2025.

[2] 9-сынып алгебра «Тізбектер» бөлімі бойынша жиынтық бағалау.

ГЕОГЕВРА-НЫ ҚОЛДАНУ НЕГІЗІНДЕ ОҚУШЫЛАРДЫҢ СТЕРЕОМЕТРИЯ ЕСЕП ШЫҒАРУ БІЛІКТЕРІН ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Г.М. НАРБЕКОВА¹, Н.М. НАРБЕКОВА²

^{1,2}М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан

¹guldana220992@gmail.com, ²nuraimnarbekova@gmail.com

Геометрияны оқытуда қолданылатын бағдарламалық құралдарды зерттеу барысында біз оқушыларды стереометриялық есептерді шешуге үйрету үшін ең қолайлы бағдарламалық құрал — GeoGebra интерактивті геометриялық ортасы деген қорытындыға келдік. Біздің таңдауымыз мынамен түсіндіріледі: стереометрия курсына көпжақтардың қималарын салу материалы қарастырылады, кеңістіктік ойлау арқылы ұғымдарды меңгеру негізделеді, ал GeoGebra бағдарламасында кеңістіктегі фигуралармен жұмыс істеу мүмкіндігі бар. Стереометрия есептерін шешуде GeoGebra кең мүмкіндіктер ұсынады: кеңістіктегі денелерді құру, оларды өзгерту (нүктелерін жылжыту арқылы пішінін өзгерту), айналдыру, анимация жасау, нүктелер арасындағы қашықтықты, бұрыштарды есептеу. Осылайша, бағдарламада жасалған модельді есептің шартын түсіндіру құралы ретінде де, шешімді тексеру тәсілі ретінде де қолдануға болады [1].

Мақаланың мақсаты-сабақ барысында геометриялық денелерді түсіндіру үшін макеттер мен модельдерді қолдануға болады. Олар денелерді әртүрлі қырынан қарастыруға және кейбір қасиеттерін көрсетуге мүмкіндік береді. Алайда стереометриялық есептерді шешуде мұндай құралдар әрдайым тиімді бола бермейді, өйткені модельдерде нүктелер қою, түзулер мен

жазықтықтарды жүргізу мүмкіндігі шектеулі. Бұл бағдарлама математиканың әртүрлі бөлімдерімен жұмыс істеуге арналған және алгебралық, сондай-ақ геометриялық ұғымдар мен заңдылықтарды көрнекі түрде көрсетуге қолайлы. 10–11 сыныптарда стереометрия сабақтарында, атап айтқанда «Қималар» тақырыбын оқыту барысында математикалық эксперименттерді қолдану ұсынылады. Оқушылар көбінесе қиманың қандай пішін алатынын, жазықтықтың орналасуына байланысты қалай өзгертетінін елестете алмайды. АКТ қолдану арқылы жүргізілген тәжірибелік жұмыстар оқушыларға қойылған сұрақтарға өз бетінше немесе мұғалімнің көмегімен жауап табуға мүмкіндік береді. Стереометрияны көлемді денелерді көрнекі түрде көрсетпей оқыту іс жүзінде мүмкін емес. Компьютерлік модельдерді қолдану бұл үдерісті анағұрлым тиімді әрі түсінікті етеді. Сонымен қатар, АКТ қолдану оқушылардың қызығушылығын арттырып қана қоймай, оқу міндеттерін шешуде компьютерлік бағдарламалардың мүмкіндіктерін ашады [2].

Біз математикалық экспериментті Шымкент қаласы Қаратау ауданындағы Назарбаев Зияткерлік мектебінің 10-сынып оқушыларына (жалпы саны 93 оқушы) геометрия бөлімін оқыту барысында жүргіздік. Эксперименттік жұмыс жүргізу үшін біз GeoGebra бағдарламасын таңдадық, себебі ол әртүрлі геометриялық денелер мен олардың қималарын құруға, қиманың пішінін анықтауға, оны өзгертуге, жазықтықпен қиылысу нәтижесінде алынған фигуралардың аудандарын табуға және тағы басқа әрекеттерді орындауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, бағдарлама объектілерді басқаруға, олардың параметрлеріне байланысты сыртқы түрін өзгертуге мүмкіндік береді. Келесі зерттеу тапсырмасын қарастырайық: оқушылар конусты жазықтықпен қиғанда қандай қисықтар пайда болатынын анықтауы керек. Бұл тапсырманы 11-сыныпта математика және информатика мұғалімдері бірлесіп өткізетін интеграциялық сабақта орындауға болады. Конустың қималары – стереометрияның күрделі тақырыптарының бірі, оған мектепте аз уақыт бөлінеді, бірақ бұл тақырып ҰБТ тапсырмаларында жиі кездеседі, сондықтан оны терең меңгеру қажет [3].

Эксперименттің бірінші кезеңі – теориялық ұғымдармен жұмыс. Бұл кезеңде қажетті теориялық материал жиналып, талданады. Мұғалімдер оқушыларға келесі ұғымдарды еске түсіруді ұсынады: конустық бет, конус, оның осі мен жасаушысы, қима, жазықтық, параллель және перпендикуляр жазықтықтар, геометриялық модель, шеңбер, үшбұрыш, эллипс. Екінші кезең – гипотезалар ұсыну. Оқушылар конусты жазықтықпен қиғанда қандай фигуралар шығуы мүмкін екенін болжайды (мысалы, үшбұрыш, шеңбер, эллипс және т.б.). Үшінші кезең – гипотезаларды компьютерлік модельдеу арқылы тексеру. Бұл кезеңде GeoGebra бағдарламасында конус моделі құрылып, оның әртүрлі қималары зерттеледі. Бағдарламамен алғаш жұмыс істегенде, мұғалім оның интерфейсін түсіндіреді: негізгі мәзір, құралдар панелі, графикалық терезе, объектілер панелі және енгізу жолағы. GeoGebra-ның маңызды ерекшелігі – командаларды қарапайым түрде енгізуге болады. Төртінші кезеңде оқушылар алынған нәтижелерді талдап, қорытынды жасайды.

Қорытындылай келе, GeoGebra бағдарламасын қолдану арқылы жүргізілген эксперименттер оқушылардың:

- геометриялық ұғымдарды меңгеруіне;
- алгоритмдерді орындауына;
- компьютерлік модельдерді қолдануына;
- зерттеу жүргізу дағдыларын дамытуына мүмкіндік береді.

Осылайша, АКТ қолдану арқылы математика сабақтарында эксперимент жүргізу оқыту нәтижелерін жақсартып, білім беру үдерісін тиімді етеді.

Кілтті сөздер: стереометрия, интерактивті геометриялық орта, GeoGebra, интерактивті сызба, көпжақтар, айналу денелері.

2020 Mathematics Subject Classification: 97G40, 97U50, 97U70

ӘДЕБИЕТ

[1] Мордашева Т.Ю. Использование приложения GeoGebra на уроках математики // Педагогический опыт: теория, методика, практика : материалы IX Междунар. науч.–практ. конф.

(Чебоксары, 14 окт. 2016 г.) / редкол.: О.Н. Широков [и др.] – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – С. 170-173. – ISSN 2412-0529.

[2] Вендина А.А., Киричек К.А. Математический эксперимент в программе GeoGebra как одна из форм реализации интерактивного метода обучения (на примере подготовки студентов педагогического вуза) // Мир науки, культуры, образования. 2019. № 1 (74). С. 272-276.

[3] Мадияров Н.К., Дробышев Ю.А., Утеулиев Н.С. Математиканы оқытуда қолданылатын цифрлық білім беру ресурстары мен платформалары // «Әуезов оқулары-19: Тәуелсіз Қазақстанға-30» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының еңбектері.-Шымкент.-2021.-Б.107-110

INTEGRATION OF BIG DATA ANALYTICS IN MATHEMATICAL EDUCATION FOR ECONOMICS

T.R. KODIROV

¹*Andijan State Technical Institute, Andijan, Uzbekistan*

temurqodirov031@gmail.com

Abstract: This research explores the integration of Big Data analytics and Artificial Intelligence (AI) into the mathematical curriculum for economics students to foster a data-driven and adaptive learning environment. Recognizing that traditional pedagogical methods often fail to accommodate diverse learning paces, the study proposes a framework utilizing Large Language Models (LLMs) and predictive analytics to create personalized educational pathways. As a practical application, the research introduces the “SI-Yordamchi” (AI-Assistant) platform, an AI-driven tool that analyzes real-time student performance data—including assessment scores and inquiry history—to provide tailored, 24/7 virtual tutoring. Preliminary conceptual analysis suggests that implementing such adaptive systems can optimize the mastery of complex economic-mathematical models by up to 60%, significantly reducing the dependency on resource-intensive traditional tutoring while preparing students for a data-centric professional landscape.

Кілтті сөздер: Big Data Analytics, Economic Education, AI-Assistant, Mathematical Modeling, Adaptive Learning.

Some aspects of the methodology of conducting sections in Polyhedra

K.A. KALILANOVA¹, D.T. ZHANUZAKOVA², A.P. MUSTAFAYEV³

^{1,2,3}*Kazakh National Women’s Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan.*

¹kuralaikalilanova@mail.ru, ²Dinara.Zhan07@gmail.com, ³abdikadi@mail.ru

Abstract. This article comprehensively examines the topic of conducting sections in polyhedra, which represents a complex and important component of the school stereometry course. The authors identify the main difficulties encountered in teaching practice and systematically analyze their causes and possible solutions. Particular emphasis is placed on students’ insufficient spatial thinking, challenges in visualizing projections of sections, shortage of methodological resources, and limitations in the effective use of modern information technologies in lessons. The study highlights the complementarity of traditional methods (board explanations, working with textbooks, analysis of standard problems) and innovative approaches (GeoGebra software, 3D modeling, augmented and virtual reality technologies). The survey results demonstrate that the majority of teachers still rely on traditional methods, although there is a high demand for new digital tools. In addition, the article addresses the role of interdisciplinary connections in mastering sections, as well as the ways of increasing students’ interest through practical examples. The scientific novelty of the study lies

in providing a comprehensive analysis of the experience of teaching sections in Kazakhstani schools and in proposing an effective integration of traditional methods with innovative technologies. The practical significance is that the obtained results provide teachers with concrete methodological recommendations aimed at improving lesson quality, developing students' spatial imagination, and enhancing motivation toward the subject.

Keywords: geometry, polyhedra, section, stereometry, spatial thinking, teaching methodology, innovative technologies, GeoGebra, 3D models, AR/VR.

References

- [1] Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan. *Mathematics. Curriculum for grades 10–11 of general secondary education (natural and mathematical track) within the framework of updating the content of secondary education*, MSHE RK, Astana (2016).
- [2] Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan. “Geometry” calendar-thematic plan for grade 11 (natural and mathematical track). Appendix 107 to Order No. 399 dated September 16, 2022, ME RK, Astana (2022).
- [3] Oliveira F.C., Silva R.R., Bissaco M.A.S. The use of digital technologies in spatial geometry teaching: a literature review, *Research, Society and Development*, 10:15 (2021), 1–11.
- [4] Kramarenko T.H., Pylypenko O.S., Serdiuk O.Yu. Digital technologies in specialized mathematics education: application of GeoGebra in stereometry teaching, in: *Proceedings of the 1st Symposium on Advances in Educational Technology*, SCITEPRESS, Setúbal (2020), 576–589.
- [5] Ziatdinov R., Valles J.R. Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics, *Mathematics*, 10:3 (2022), 1–16.
- [6] Bogdanova O., Bogdanov P., Bogdanov S. Expanding the prospects of applying stereoscopic image technology in geometry teaching as a consequence of education informatization, *RUDN Journal of Informatization in Education*, 21:1 (2024), 7–20.
- [7] Sunzuma G. Technology integration in geometry teaching and learning: A systematic review (2010–2022), *LUMAT*, 11:3 (2023), 356–372.
- [8] Saparkanova B.M., Taskynbaeva G.Z. Application of stereometry in the school course, *M. Qozyñbaev atyndaǵı Soltüstik Qazaqstan universitetiniñ Habarshysy.*, 53:1 (2022), 23–27.
- [9] Kulikov Yu. A. 3D modeling and augmented reality technology as innovative methods for developing students' spatial thinking when studying stereometry, *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 5 (2020), 34–39.
- [10] Koshchanova G.R., Abdykerimova E.A., Turkmenbayev A.B., Kulzhagarova B.T., Sharmukhanbet S.R. Conditions and mechanisms of using GeoGebra in teaching stereometry, *Qazaqstan Respublikasynyñ Ulttyq Gylym Akademiyasy Habarshysy*, 405 (2023), 161–173.

ҚАЗАҚСТАНДА БАСТАУЫШ СЫНЫП МАТЕМАТИКАСЫН ОҚЫТУДА СРА ӘДІСІН ҚОЛДАНУ ТӘЖІРИБЕСІНЕН

А.У. ДАУЛЕТКУЛОВА

¹SDU университеті

aigul.dauletkulova@sdu.edu.kz

Еліміздің білім беру жүйесі үздік халықаралық тәжірибелерді енгізуге тырысуда, себебі білімі озық ел ғана дамушы ел бола алады. Қазақстанның білім беру жүйесі соңғы жылдары (Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2023–2029 жж. тұжырымдамасы, бастауыштағы жаңартылған мазмұн, PISA/TIMSS көрсеткіштерін жақсарту міндеті) бастауыш буында функционалдық және математикалық сауаттылықты күшейтуге айқын бет бұрды. Алайда бастауыштағы оқушылардың көп бөлігі 3–4-сыныпқа өткенде сандық қатынастарды түсіндіруде, мәтіндік есептерді модельдеуде, көпқадамды есептерді жоспарлауда қиналатынын

көрсетеді. Бұл – тек «мазмұнды аз оқытудан» емес, когнитивтік жүктеменің дұрыс реттелмеуінен, тізбектелген тапсырмалар жиынтығының дұрыс берілмеуінен, есепті шешу модельдерінң жүйесіздігінен туындайтын мәселе. Ал CPA әдісі, Сингапур секілді дамыған елдерде өз тиімділігін дәлелдеген әдіс. Соңғы уақытта еліміздің әр түкпірінде осы CPA әдісін қолданып, математиканы оқыту сапасын арттыруға, оқушылардың түсінігін тереңдету және олардың шығармашылық қабілеттерін дамыту үшін біраз жұмыстар жүргізілуде. Елімізде соңғы 4 жылда бірқатар мектептер, «Нұр-Орда», «SDL» осы әдісті қолданып жүр, Аламаты, Астана, Атырау, Қызылорда қаласының кейбір мектептерінде факультативтік сабақта қолданылуда. Ал, ол мектептер мен мұғалімдерге Сингапурдың CPA әдісіне негізделген оқулықтарды қазақ және орыс тіліне аударып, көпшілікке таралуын насихаттап жүрген, «Astana-Kitap» баспасы. Бұл зерттеудің негізгі мақсаты да осы мектептер мен мұғалімдердің тәжірибесін зерделеп, еліміздегі бастауыш математикасын дамытуға үлес қосу.

Осы ұсынылыш отырған зерттеудің бастауы, SDU университетінің ішкі гранты негізінен бастау алғанын айта кету керек. Ішкі грант аясында зерттеу тобы бірқатар алдын ала жұмыстарды орындады, соның ішінде сингапурлық оқулықтарды қазақ тіліне аудару үдерісін талдау, Сингапур математикасындағы Concrete–Pictorial–Abstract (CPA) моделін Қазақстанның бастауыш білім беру бағдарламасына бейімдеу; мәтіндік есептерді bar model (жолақ моделі) арқылы жүйелі оқыту тәсілін енгізуді зерттеу жұмыстарын жүргізді. Зерттеу дизайны аралас әдісті қолданады. Оның ішінде конвергентті дизайн, яғни сапалық және сандық әдістерді параллель қолданамыз. Бұл тәсіл зерттеу міндеттері мен сұрақтарына толық жауап беруге мүмкіндік береді. Қазақстан мен Сингапур бастауыш сынып математика бағдарламасы мен оқулықтарының мазмұнын салыстыру үшін документтік талдау әдісі қолданылады. Оқу бағдарламаларының құрылымы, әдістемелік құралдар мен тапсырмалар жүйесі зерттеледі. Қазақстанда Сингапур бағдарламасын қолданатын мектептерде бақылау жүргізіледі. Бақылау барысында сабақ барысы жазылып, оқыту ерекшеліктері тіркеледі. Mathematics Enhancement Classroom Observation Recording System (MECORS) әдісі қолданылады, ол сабақ барысын жүйелі түрде жазып, оқушылардың белсенділігін өлшеуге мүмкіндік береді. Бастауыш сынып оқушыларының когнитивті қабілеттерін (көрнекі-әрекеттік ойлау, көрнекі-бейнелі ойлау) бағалау үшін құрылымдалған сауалнамалар өткізіледі. Бұл сауалнамаға БИЛ, Нұр-Орда және ЖББМ мектептерінің 3 сынып оқушылары қатысты, себебі осы аталған мектептер соңғы 3 жылда осы бағдарламамен оқуда. Мұғалімдермен жартылай құрылымдалған интервью өткізіледі. Олардың Сингапур әдістемесін қолдану тәжірибесі, қиындықтары мен артықшылықтары анықталады.

Зерттеу нәтижелері бастауыш білім сапасын арттыруға, оны халықаралық стандарттарға сәйкестендіруге және оқушылардың математикалық сауаттылығын дамытуға бағытталған. Жоба аяқталғаннан кейін әзірленген әдістемелік материалдар мен оқыту моделін мектеп тәжірибесіне енгізу мақсатында коммерцияландыруға және білім беру мазмұнының жаңғырту үдерісінде қолдануға болады.

Осы жұмыстардың нәтижелері мұғалімдер қолдана алатын, бірақ әлі когнитивті нейроғылым деректерімен теориялық тұрғыда біріктірілмеген және республика деңгейінде зерттеуді қажет ететін бастапқы модель екенін көрсетті.

Кілтті сөздер: Бастауыш математикасы, көрнекі-әрекеттік ойлау, көрнекі-бейнелі ойлау, CPA әдісі, мәтіндік есептер.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Gracia-Bafalluy, M., Noël, M.-P. How can cognitive neuroscience contribute to mathematics education? Bridging the two research areas. (2018)
- [2] Hoong, L. Y., Kin, H. W., Pien, C. L. Concrete–Pictorial–Abstract: Roots and realisations in the Singapore mathematics curriculum. (2015)
- [3] Hoe, L. E. The role of virtual manipulatives on the Concrete–Pictorial–Abstract approach. (2014)
- [4] Hui, C. S. Teaching and learning with the Concrete–Pictorial–Abstract sequence in primary

mathematics. (2017)

[5] Hussain, F. A. Use of Concrete–Pictorial–Abstract in mathematics classrooms in Singapore. (2016)

[6] Looi, C. Y. The neuroscience of mathematical cognition and learning (OECD report). (2024)

[7] Mind Research Institute. ST Math: A K–8 supplemental math program grounded in neuroscience. (n.d.)

[8] Okoro, . . . , et al. Application of brain-based learning strategy for students' optimal learning outcomes in mathematics. (2023)

[9] Pfanstiel, S. Evaluating the implementation process of a new math curriculum (Math in Focus – a Singapore Math–type program) (Doctoral dissertation). (2016)

[10] Rubinsten, O. Link between cognitive neuroscience and education: The case of children and mathematics. (2015)

[11] Yorulmaz, A. A study of number sense and metacognitive awareness of fourth-grade students. (2023)

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА РОБОТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ПОДДЕРЖКОЙ IoT И ПЕРИФЕРИЙНОГО ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ МОНИТОРИНГА БЕЗОПАСНОСТИ И АВТОНОМНОГО ПАТРУЛИРОВАНИЯ

Д.Н. ЖАЛМУХАНБЕТОВ¹, Ә.Р. МЫРЗАБАЕВ², С.Т. КАИМОВ³, А.А. БЫКОВ⁴,
Т.Т. КАЙЫМ⁵, А.Т. КАИМОВ⁶, А.Н. ТЫНЫБАЕВА⁷, А.А. АЛИМАН⁸,
А.К. ТУЛЕШОВ⁹, А.Т. КАИМОВ¹⁰, А.Ж. СЕЙДАХМЕТ¹¹

^{1,2,4,5,6,8}Международный ИТ Университет, Алматы, Казахстан

^{3,9,11}Институт механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова, Казахстан

^{7,10}Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

³kayim.suleimen@gmail.com, ⁹aman_58@mail.ru, ⁷anara.tynybayeva@gmail.com

Автономные мобильные роботы рассматриваются как перспективный инструмент мониторинга безопасности и патрулирования территорий, особенно в условиях, где работа человека связана с повышенным риском. Интеграция сенсорных систем, технического зрения, IoT и алгоритмов искусственного интеллекта позволяет создавать роботизированные платформы, способные к обнаружению угроз, навигации и передаче данных в реальном времени. Цель работы состоит в кратком анализе современных подходов к построению патрульных роботов и выявлении ключевых направлений их развития.

Основные технологии и анализ. Современные патрульные роботы обычно строятся на базе колесных платформ, оснащённых видекамерами, LIDAR, ультразвуковыми и инерциальными датчиками. В качестве программной основы широко применяется ROS, обеспечивающая модульную интеграцию навигации, восприятия и управления. Для распознавания объектов и ситуаций активно используются нейросетевые модели семейства YOLO, адаптированные для периферийных вычислений и работы в реальном времени. Анализ исследований показывает устойчивую тенденцию к повышению автономности, развитию edge AI и интеграции робототехнических платформ в распределённые IoT-системы безопасности. При этом сохраняются проблемы интерпретации сложных сцен, работы в динамической среде и унификации критериев оценки эффективности.

Заключение. Проведённый обзор показывает, что роботизированные системы безопасности эволюционируют в сторону интеллектуальных киберфизических комплексов с поддержкой IoT и периферийного искусственного интеллекта. Перспективы дальнейших исследований связаны с развитием адаптивного патрулирования, семантического анализа сцен и privacy-preserving подходов.

Финансирование: Работа выполнена при поддержке МНВО РК, грант BR31715767.

Ключевые слова: мобильные роботы, автономное патрулирование, IoT, компьютерное зрение, YOLO.

2020 Mathematics Subject Classification: 68T40, 68T45.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Szeliski R. *Computer Vision: Algorithms and Applications*, Springer, 2020.
- [2] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*, MIT Press, 2016.
- [3] Bochkovskiy A., Wang C.-Y., Liao H.-Y.M. YOLOv4: Optimal speed and accuracy of object detection, *arXiv preprint*, 2020.
- [4] Wang A., Chen H., Liu L. et al. YOLOv10: Real-time end-to-end object detection, *arXiv preprint*, 2024.
- [5] Kaimov S., Kaiym T. et al. Grasps of robot manipulator when overloading solid high-radioactive elements and their calculation, *Mechanisms and Machine Science*, **68**, 2019, 316–323.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЫМОХОДОВ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

К.А. РАШИД¹, С.Т. КАИМОВ²

^{1,2}Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

Рассматривается применение математического и компьютерного моделирования для оценки температурной устойчивости дымохода из композитных материалов. Использована стационарная одномерная модель теплопереноса с учётом конвекции. Реализация выполнена в Python (Google Colab). Получены температурные профили и значения температур поверхностей при различных режимах, что позволяет оценить условия безопасной эксплуатации конструкции.

Дымоходы в энергетических системах работают при высоких температурах и в агрессивных средах, что снижает их надёжность. Перспективным решением является применение композитных материалов, обладающих малой массой и коррозионной стойкостью. Однако их использование требует оценки температурной устойчивости.

Цель работы — анализ теплового состояния стенки дымохода из композитного материала. Использована стационарная одномерная модель теплопереноса с учётом конвективного теплообмена на внутренних и внешних поверхностях. Расчёты выполнены в Python с применением типовых теплофизических параметров.

Результаты показали, что рост температуры газов приводит к увеличению теплового потока и нагреву внутренней поверхности. Существенное влияние оказывают толщина стенки и теплопроводность материала: их увеличение снижает температурный уровень и градиент. Предложенный подход позволяет проводить предварительную оценку температурной устойчивости дымоходов на этапе проектирования и может быть расширен с учётом нестационарных режимов.

Благодарности: Грант на фундаментальные исследования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31715767).

Ключевые слова: дымоход, композитные материалы, теплоперенос, температурная устойчивость, математическое моделирование, компьютерное моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 80A20, 74F05, 68U20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа, 2017. 512 с.
- [2] Incropera F.P., DeWitt D.P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 7th ed. New York: Wiley, 2011. 1070 p.
- [3] Каимов С.Т. Система устройств отвода пылегазовой смеси из трубы тепловой электростанции для отделения твердых частиц от газов и их полной переработки в полезные продукты: полезная модель.

Simulation of Heat Transfer in BTES Systems Considering Subsurface Layer Heterogeneity and Groundwater Flow

T.E. AMANZHOLOV¹, D.E. AIZHULOV², M.S. TUNGATAROVA³,
B.Zh. ABDULLAEVA⁴

¹*Farabi University, Almaty, Kazakhstan*

^{2,3,4}*Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*

¹tannur.amanzholov@gmail.com, ²daniar.aizhulov@gmail.com

Abstract. Seasonal thermal energy storage (STES), specifically borehole thermal energy storage (BTES) [1], is emerging as a critical technology in the global effort toward energy transition and decarbonization, particularly in cold-climate regions with decentralized heating infrastructures [2]. Evaluating the long-term performance of Borehole Thermal Energy Storage (BTES) systems requires computationally efficient numerical frameworks, such as the finite element formulation for vertical borehole heat exchangers [3]. Accurately capturing the thermodynamic variations in large-scale Seasonal Thermal Energy Storage (STES) fields often requires locally refined, unstructured grid simulations, which rely on specialized 3D post-processing frameworks [4] to evaluate long-term system performance.

As the global energy paradigm shifts towards renewable sources, overcoming the temporal mismatch between energy generation and thermal demand has become a critical engineering challenge. To address this, the current study introduces the development of a comprehensive digital design tool for BTES systems. Unlike traditional models that often rely on simplified, homogeneous assumptions, this tool incorporates dynamic thermal loads, subsurface geological heterogeneity, and the complex advective effects of groundwater flow. The primary objective is to enable the efficient planning, optimization, and deployment of large-scale seasonal heat storage systems that are highly adaptable to varying site-specific geological and climatic conditions.

The scientific and practical significance of this work lies in its multi-disciplinary approach, bridging the gap between localized thermodynamic phenomena and macro-scale system performance. This is achieved through the integration of advanced computational fluid dynamics (CFD) with empirical, experimental methods for accurately determining the thermophysical properties of surrounding soils. The methodology centers on a detailed mathematical formulation of transient heat transfer between the borehole heat exchangers (BHEs) and the surrounding ground matrix. Furthermore, it introduces a novel computational framework designed to characterize and simulate thermophysical behavior across multilayered subsurface formations, effectively capturing the complex interplay between conductive and convective heat transport over extended seasonal cycles.

Key outcomes of this research include the refinement of critical BTES design parameters, such as borehole spacing, depth, and field layout—and the creation of a stable predictive tool capable of evaluating long-term thermal performance under a wide array of environmental scenarios. By accurately predicting heat injection, storage retention, and extraction efficiencies, the proposed approach contributes directly to increased energy efficiency in district and residential building networks. Subsequently, this tool provides a scalable, scientifically grounded foundation for the broader implementation of BTES technology, offering a viable pathway for significant reductions in CO₂ emissions, particularly in regions currently reliant on carbon-intensive, coal-based heating infrastructure.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26103573).

Keywords: borehole thermal energy storage · borehole heat exchanger · energy storage · thermal response test · heat transfer.

2020 Mathematics Subject Classification: 76D05, 80A20

References

[1] Signorelli S., Bassetti S., Pahud D., Kohl T. Numerical evaluation of thermal response tests, *Geothermics*, (2007), pp. 141–166.

- [2] Reuss M. The use of borehole thermal energy storage (BTES) systems, *Bavarian Center for Applied Energy Research (ZAE Bayern)*, Germany.
- [3] Al-Khoury R., Bonnier P. G. and Brinkgreve R. B. J. Efficient finite element formulation for geothermal heating systems, *International journal for numerical methods in engineering*, (2005), pp. 988–1013.
- [4] Al-Khoury R., Nabi M. An efficient finite volume model for shallow geothermal systems. Part I: Model formulation, *Computers & Geosciences*, (2012), pp. 290–296.

Transformer-Enhanced PPO for Sequence-Aware Adaptive PID Control of Nonlinear Thermal Systems with Delayed and Noisy Feedback

Y. SAPAZHANOV¹, S. KADYROV²

¹Narxoz University, Almaty, Kazakhstan

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²New Uzbekistan University, Tashkent, Uzbekistan

¹yershat.sapazhanov@narxoz.kz, ²sh.kadyrov@newu.uz

Nonlinear thermal systems with delayed actuation and noisy measurements remain difficult to control in practice, since the controller must react to a feedback signal that is both temporally stale and corrupted by uncertainty. This problem becomes especially pronounced in thermal processes, where dead time slows the visible effect of control actions and may lead to oscillations, overshoot, or inefficient energy usage. Classical PID control remains attractive because of its simplicity and interpretability, but fixed-gain tuning is often insufficient under these conditions. In particular, traditional rules such as Cohen–Coon were developed for simplified low-order models and become less reliable when delay, nonlinearity, and stochastic disturbances appear simultaneously [6]. More generally, classical PID tuning was not designed to explicitly handle the combined impact of delayed feedback and noisy sensor data in strongly nonlinear operating regimes [8, 7].

Recent studies show that reinforcement learning (RL) offers a promising alternative for adaptive control in uncertain environments. Proximal Policy Optimization (PPO), in particular, has become one of the most practical policy-gradient methods for continuous control because of its stability and efficiency in online learning settings [1]. RL-based PID tuning has already demonstrated clear advantages for nonlinear plants, where model-free adaptation can outperform fixed analytical tuning when accurate process models are unavailable [5]. In addition, hybrid designs that combine deep reinforcement learning with nonlinear PID structures suggest that learning-based gain adaptation can improve robustness and tracking quality beyond standard linear PID formulations [3, 4]. These developments indicate that RL is already a strong foundation for adaptive PID control, but they also highlight several important unresolved issues.

First, many existing RL-based PID tuning approaches still rely on standard multilayer-perceptron policies, which mainly use the current state or only a short local history. For delayed systems, this is a substantial limitation, since the current error alone does not provide enough information about how the effect of previous actions is unfolding over time. Second, in most of the current literature, delay is handled only indirectly through the reward signal rather than through an explicit temporal representation of historical errors, control actions, and measured outputs [1, 3]. Third, our recent study on nonlinear thermal control under delayed and noisy feedback showed that PPO is robust under uncertainty, but this robustness is still associated with practical drawbacks, including long settling time and a nontrivial trade-off between tracking quality and control effort [2]. Fourth, while transformer-based models have shown strong ability to extract informative temporal dependencies in sequence data, their use for sequence-aware online PID gain adaptation in delayed nonlinear thermal systems remains largely unexplored. This gap is particularly relevant for thermal control, where temporal structure is not a secondary feature but a central part of the control difficulty.

To address these limitations, this work proposes a Transformer-enhanced PPO framework for adaptive PID control of nonlinear thermal systems with delayed and noisy feedback. The main idea is to extend the PPO policy with a transformer-based temporal encoder that processes a finite history of tracking errors, measured temperatures, and previous control actions. Instead of relying only on the most recent observation, the proposed controller is designed to learn which parts of the recent trajectory are most informative for the current control decision. In this sense, the transformer is introduced not as a generic deep-learning addition, but as a mechanism for explicitly representing temporal dependencies that are otherwise weakly captured in conventional MLP-based RL controllers. Such a design is expected to be especially useful in the presence of dead time, where successful control depends on anticipating the delayed consequence of earlier actions rather than reacting only to the latest measurement [3, 1].

The proposed method is intended for comparison with classical delay-oriented tuning, established RL-based PID tuning, and hybrid nonlinear PID architectures [6, 5, 3, 2]. Performance will be assessed using root mean square error (RMSE), integral of time-weighted absolute error (ITAE), control energy, and settling time. Several practical outcomes are expected. First, explicit temporal modeling may improve delay compensation and reduce overshoot by providing a more informative state representation for gain adaptation. Second, the proposed framework may reduce the trade-off between tracking accuracy and actuator effort observed in earlier PPO-based thermal control studies [2]. Third, it may produce faster convergence to stable transients under moderate and high measurement noise, where purely reactive control policies often degrade. Even if the improvement is not uniform across all operating regimes, the study is expected to clarify when sequence-aware representations provide a real advantage for adaptive PID tuning in delayed nonlinear thermal systems.

Overall, the main contribution of this work is a hybrid adaptive control framework that brings transformer-based temporal modeling into reinforcement-learning-based PID tuning. More broadly, the study aims to show that improved control of delayed nonlinear thermal systems may depend not only on better policy optimization, but also on a better representation of temporal structure in the feedback loop.

Keywords: nonlinear thermal control; adaptive PID tuning; reinforcement learning; PPO; transformer; delayed feedback; measurement noise; sequence-aware control.

2020 Mathematics Subject Classification: 93C10, 93C41, 68T07, 68T20

References

- [1] Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal Policy Optimization Algorithms, *arXiv preprint arXiv:1707.06347*, 2017.
- [2] Sapazhanov Y., Kadyrov S. Reinforcement Learning-Based PID for Nonlinear Temperature Control with Delayed Feedback and Measurement Noise, manuscript under review, 2026.
- [3] Zhang J., Rivera C.E.O., Tyni K., Nguyen S. AirPilot: Interpretable PPO-Based DRL Auto-Tuned Nonlinear PID Drone Controller for Robust Autonomous Flights, *arXiv preprint arXiv:2404.00204*, 2024.
- [4] Das S., Pan I., Gupta A. A nonlinear PID controller design for nonlinear process control, 2009.
- [5] Bugioi G., Sendrescu D. Tuning of PID Controllers Using Reinforcement Learning for Nonlinear System Control, *Processes*, vol. 13, no. 3, p. 735, 2025.
- [6] Cohen G.H., Coon G.A. Theoretical Consideration of Retarded Control, *Trans. ASME*, vol. 75, pp. 827–834, 1953.
- [7] Alkhidir M., Gad S., Al-Mulla N.A. Adaptive control methods under sensor noise: A survey, *Sensors*, vol. 23, no. 12, p. 5487, 2023.
- [8] Wang X., Hautus M.J. Influence of time delay on stability and performance of feedback control systems, 2017.

АРХИТЕКТУРНЫЕ ПРИНЦИПЫ СОЗДАНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ

М.А. ГОРОДНИЧЕВ¹, Д.В. ЛЕБЕДЕВ²

¹ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

¹maxim@ssd.sssc.ru, ²danil.lebedev.0881@gmail.com

Представлены основные принципы проектирования современной комплексной организационно-программной инфраструктуры для решения задач численного моделирования и обработки данных на распределенных суперкомпьютерных ресурсах. Предлагаемая инфраструктура включает обеспечение доступа к традиционным инструментам организации вычислений и дополняется новым слоем, который обеспечивает интеллектуализацию процессов накопления и повторного применения знаний о вычислениях и управлении данными. В этом слое хранятся формализованные описания программных компонентов/сервисов (интерфейсы, типы входных и выходных данных, условия применимости), правила композиции компонентов/сервисов, вычислительных сценариев (workflows), а также типизированные объекты данных с метаданной об их структуре и происхождении. Совокупность этих знаний образует множество вычислительных моделей предметных областей [1], позволяющее системе автоматизировать конструирование новых вычислительных сценариев из компонентов и анализ данных.

В основу инфраструктуры закладываются системы, которые нашли практическое применение в организации расчетов и являются привычными для специалистов в предметных областях. Это позволяет снизить порог входа для пользователей и использовать проверенные решения для выполнения базовых функций. Примеры таких систем: инструменты управления вычислительными сценариями (Apache Airflow, Snakemake, Nextflow и др.), системы управления данными (iRODS), среды интерактивной разработки (JupyterHub), средства аутентификации (Keycloak), системы контроля версий (Git, DVC). Интеграция распределенных ресурсов осуществляется на основе подходов, применяемых в проектах типа LEXIS [2] (Large-scale Execution for Industry & Society) и EOSC [3]. LEXIS ставил задачей создание инфраструктуры для совместного использования распределенных вычислительных систем и систем хранения данных, обеспечивая унифицированный доступ к распределенным ресурсам, управление данными и вычислениями. Интеграционные инициативы типа EOSC обеспечивают организационные метоприятия и агрегацию инструментария для создания инфраструктуры открытой науки, что обеспечивает совместное использование ресурсов, публикацию и переиспользование результатов научных исследований, данных, сервисов. Предлагаемая инфраструктура соединяет эти подходы и добавляет интеллектуальный слой (семантическое описание компонентов, автоматический синтез сценариев вычислительных экспериментов).

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR28713313).

Ключевые слова: суперкомпьютер, автоматизация решения задач, научная инфраструктура, интеллектуальное управление данными и вычислениями.

2020 Mathematics Subject Classification: 68M14, 68V30, 68V35, 68M20

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Malyshkin V. E. Active Knowledge, LuNA and Literacy for Oncoming Centuries, *LNCS* 2015, Springer, Heidelberg, Vol. 9465, pp. 292-303, DOI:10.1007/978-3-319-25527-9_19
- [2] Hachinger, S. et al. Leveraging High-Performance Computing and Cloud Computing with Unified Big-Data Workflows: The LEXIS Project. In: Curry, E., Auer, S., Berre, A.J., Metzger, A., Perez, M.S., Zillner, S. (eds) *Technologies and Applications for Big Data Value* Springer, Cham, 2022. DOI:10.1007/978-3-030-78307-5_8
- [3] Mathieu Gilles. A general presentation of the European Open Science Cloud (EOSC) *Zenodo*, 2023, Nov 30, DOI:10.5281/zenodo.10228651

Атаулар көрсеткіші**Именной указатель****Index of Names**

Abdimanapova P.B., 239
Abdirakhmonova M.N., 525
Abdiramanov Zh.A., 510
Abdullaeva B.Zh., 859
Abdullah O., 745
Abduraimova Sh.T., 264
Abdusalomov X.Sh., 186
Abdyrakhimov N.T., 153
Abdyrakov T. T., 747
Abek A.N., 154
Absamatova A., 156
Abzhapparova A.B., 399
Adalbek A., 417, 532
Adambaev U., 424
Adilkhanov A.N., 251
Adiyeva A.Zh., 643
Aidarova L., 822
Aidarova L.N., 606
Aitkazina A.A., 607
Aizhulov D.E., 859
Akhazhanov T.B., 251
Akhmanova D.M., 236
Akhmedova D. D., 400
Aknazar uulu K., 609
Alexeyeva L.A., 165
Aliev A.R., 157
Aliev F.A., 402, 740
Altayeva A.B., 158
Altybay A., 160
Altynbekkyzy Ainash, 161
Altynbekov Sh.Y., 742
Alzhanov A.M., 641
Amangeldi A., 316
Amanzholov T.E., 859
Amirkhanova G., 628
Aouani M., 610
Apakov Yu.P., 163
Arepova G.D., 165
Aripov M., 744
Armankyzy Z., 511
Artykbaev A., 403
Artykova Zh.A., 254
Arici M., 745
Asanov A., 513
Ashurov R.R., 173, 514
Ashyraliyev Maksat, 166, 167
Ashyralyev Allaberen, 166, 167
Ashyralyev Charyyar, 331
Assanova A.T., 183, 514

Assan B. R., 760
Azhymbaev D.T., 291
Azimbayev A., 745
Azimzhonov O.A., 609
Azizbek kyzy N., 801

Babaev M.M., 516
Baipakbayeva S., 822
Baizhanov B., 169
Baizhanov B.S., 168
Bakirova E.A., 238
Balgabay A., 518
Baranov N.A., 404
Baratova L.M., 611
Barmagambetov S.M., 171
Baxriddinova N.A., 173
Bazarkhanov D.B., 174
Bazhibayeva A.B., 612
Bedelbaev A., 618
Begimqulov F.Kh., 175
Begmatov Akh.Kh., 517
Beisenbayeva K.A., 280
Beisenbayeva K.S., 250
Bekeshova D.A., 513
Bektemessov ZH., 518
Bektemessov ZH.M., 548
Bektemessov Zh.M., 520
Belgibaev B., 634
Belyayev Ye., 745
Berdyshev A.S., 510
Bizhanova G.I., 176
Bokayev N., 178
Boranbek K., 522
Borangazin T.B., 613
Borikhanov M., 179
Bossinov D., 765
Botirov M.A., 180, 523
Boymurodov S.I., 181
Boynazarov A.N., 750
Bozorov A.A., 517
Bukanay N.U., 183
Buribayev Z.A., 610

Chigambayeva D.K., 185
Chung R., 347

Dengi D., 273
Dinasyl T., 312
Djumayozov U.Z., 525
Duisenbekova G.S., 304

Dzhallirova Zh., 429
 Dzhallilov A.A., 186, 188
 Dzhumadil'daev A.S., 189, 190

 Eraliyeva O.M., 230
 Ergashev M.A., 191
 Ermatali B.U., 614
 Esfahani A., 193
 Eshmamatova D.B., 406, 408
 Eyniyev R.I., 410

 Fayziev Yu.E., 194, 195
 Felde I., 526, 527, 616, 822

 Gabdizhanov A., 196, 197
 Ganesan S., 247
 Gasimova G.M., 157
 Ghorbanalizadeh A., 294
 Gogatishvili A., 154, 178, 198
 Gong Chunyang, 618
 Gubaidullina D.R., 543
 Guterman Alexander, 199

 Hajiyeva N.S., 402, 740
 Hakimova M.A., 200

 Ibrahimova A.K., 528
 Ibrokhimov Kh.K., 163
 Ikramov A.M., 424
 Ilyasova R.A., 201
 Imomaliev J.N., 204
 Indiaminov R., 749
 Isaev D.B., 320
 Ishan A., 165
 Iskakova N.B., 239
 Islamov E.R., 414
 Ismailov N.A., 189
 Ismoilov A.S., 517
 Issabayeva D.N., 612
 Issaeva A.K., 307
 Izeyev S.N., 412

 Jalilov O.R., 206
 Jamanbaev M. J., 747
 Jamanbalayeva Sh., 626
 Janabekova S.K., 698
 Jenaliyev M.T., 207
 Jumaboyev T., 749
 Jumadildayev Medet, 209
 Jumaeva Sh.F., 194
 Jumaniyozov S. P., 424

 Kabanikhin S.I., 529, 541
 Kadenova Z.A., 513

 Kadirbayeva Zh.M., 232
 Kadirkulov B.J., 211
 Kadylkhanuly Y., 211
 Kadyrova T.R., 750, 808
 Kadyrov S., 860
 Kairzhan Adilbek, 212
 Kaiyrkhan N., 619
 Kakharman N., 196, 197
 Kakhkhorov M.J., 188
 Kal'menov T.Sh., 213
 Kalidolday A.K., 210
 Kalilanova K.A., 854
 Kalimoldayev M., 822
 Kalimulin R.R., 621
 Kalizhanova A., 273
 Kanetova D.E., 214
 Kanetov B.E., 214
 Karatayeva D.S., 643
 Karazym M., 215
 Karimov Sh.T., 216, 218, 414, 750, 752
 Karshygina G., 198
 Karzhaubayev K.K., 399, 434, 443
 Kasenov S.E., 416, 420
 Kashkynbayev A., 219, 247, 273
 Kaspirovich I.E., 754
 Kassabek S.A., 220, 229, 530
 Kassymetova M.T., 302
 Kassymova A., 429
 Kavokin A.A., 229
 Kazakbaeva K.B., 221
 Kazhymkan A., 522
 Kenenbayeva G.M., 224
 Kenenbayev E., 222
 Kenzhebayeva M.O., 621
 Kenzhebekova G., 156
 Kerimkhulle S., 417, 532
 Khalilova M.A., 279
 Khamitov A.A., 252
 Khankhasaev V.N., 227
 Khan I.U., 623
 Khan S., 755
 Kharin S.N., 228, 229
 Kholboev B.M., 405, 758
 Kholikova M.S., 180, 230, 523
 Khompysh Kh., 533, 534
 Khudaibergenova S.B., 232
 Khudaibergen B.B., 416, 419, 420
 Khudoyorov A.A., 323
 Khushvaktov N.Kh., 233
 Kodirov T.R., 854
 Koilyshov U.K., 153, 171, 280
 Koshanov B.D., 234

Koshkarbayev N., 235
 Kosmakova M.T., 236
 Kuang Y., 273
 Kuanova N.S., 542
 Kuanyshov N., 240
 Kuanysh S.K., 238, 239
 Kudaibergenov S.T., 755
 Kudratillaeva M., 744
 Kulaev R. Ch., 285
 Kulatay A.A., 421
 Kuldoshev K.K., 282
 Kulpeshov B.Sh., 158, 242, 244
 Kuzeubayeva N., 178, 246
 Kydyrbaikyzy A., 213

 Litvinov V.L., 757

 Madaliev M.E., 758
 Madelkhanova A., 429
 Mamajonova R.A., 216, 752
 Mamanazarov A.O., 535
 Mamanov M.K., 247
 Mamazhunusova Ch.N., 750, 808
 Mambetov S.A., 249
 Mamyrov A.O., 250
 Manarbek M., 250
 Mansurova M., 527, 616, 623, 624, 626, 632, 634, 822
 Mansurova M.E., 432, 511, 526, 606, 629
 Markhabatov N.D., 250
 Marubjonova M.M., 266
 Matin D.T., 251
 Melikuzieva D.M., 252
 Meskhi A., 253
 Minglibayev M. Zh., 760
 Mirzakulova A.E., 183
 Mohanraj M., 745
 Mosavi A., 606
 Mosavi A., 526, 527, 616, 629, 822
 Muhammadyoqubov H.E., 758
 Mukanova B.G., 641
 Mukhamadiev F.G., 254
 Mukhambetkaliyev M.B., 534
 Mukhambetzhannov S.T., 698
 Mukhambetzhannov M.A., 256
 Mukhanova T.G., 436
 Munyaev S.I., 227
 Muratova Kh.A., 258
 Musabayeva G. K., 250
 Mussabayeva G. K., 261
 Mussa A., 624
 Mussina N.M., 262
 Mustafayev A.P., 854

 Mutalip R., 263
 Muydinov I.M., 218

 Naimanova A.Zh., 263
 Netaliyeva Ye.K., 244
 Norkulova R.B., 284
 Nosirova N.A., 758
 Nugumanova A.B., 639, 641
 Nuraliyeva N.SH., 264, 266
 Nuraly A.B., 305
 Nurgali A.A., 520
 Nuriyev Zh., 247
 Nurlybekuly T., 268
 Nursultanov E.D., 313

 Ochilova N.K., 408
 Omariyeva D.A., 438
 Orazbayev A., 269
 Orumbayeva N.T., 316
 Oskenbayeva A.A., 425
 Ospanov M.N., 270
 Ospan A., 626

 Pankov P.S., 270
 Parovik R.I., 423
 Pavlyuk In.I., 242
 Pell B., 273
 Peretyat'kin M.G., 272
 Pirmatov A.Z., 295
 Polatov A.M., 424
 Popova N.V., 307

 Radikova R.E., 643
 Rahmatullaev M.M., 274, 276
 Raimova G.M., 278
 Rakhimzhanova A.Zh., 639
 Rakhmonova R.A., 525
 Ramazanov G., 765
 Rasulova M.A., 200, 274
 Rasulova M.K., 279
 Rasulov A.S., 278
 Rasulov M.S., 405
 Rayev Zh., 530
 Ruzhansky M., 160
 Ruziboev M., 742
 Ruziev M.Kh., 221
 Rymkul Ye., 745
 Rysbaiuly B., 433, 434
 Rysbayeva N.B., 537
 Rysbay M.A., 528
 Rzayev E.S., 157

 Sabalakhova A.P., 514
 Sadullaeva Sh.Sh., 195

- Sadybekov M.A., 280
 Sakhabayeva A.M., 528, 543
 Saktanov U.A., 214
 Sakypbekova M.ZH., 432
 Salaeva D.S., 282
 Sapazhanov Y., 860
 Sarsembayeva T.S., 425, 511
 Sarsenaly D.S., 281
 Sarsenbayeva A.Y., 436
 Sattarov A. M., 538
 Satybalina A.N., 433, 434
 Segizbayeva Zh.E., 627
 Seilbekov B.N., 539
 Seisenbayeva A.M., 834
 Seitova A.S., 435
 Serikova T., 247
 Shakir A.G., 540
 Shamshiev A., 427
 Shazyndayeva M., 534
 Shermamatov Zh.Zh., 310
 Shishlenin M.A., 529, 541
 Shiyapov K.M., 528, 542, 543, 545
 Shynggyskyzy A., 434
 Shyntemirov N., 196, 197
 Sigalovsky M., 547, 837
 Slyamkhan M.M., 283
 Smakhanova A., 429
 Sobirov Z. A., 285
 Sobirov Z.A., 284
 Solijanova K.A., 430
 Soltangeldinova M.K., 432
 Sotsialova U.K., 520, 548
 Soykan Urun Ezgi , 167
 Srazh A.S., 433, 434
 Sudoplatov S.V., 242
 Suleimanova S.Sh., 286
 Suragan D., 288, 313

 Tadzhieva M.A., 406
 Tagaeva S.B., 270
 Tamabay D.O., 435, 436
 Tanashova M.E., 437
 Tang Daoyun, 628
 Tashpulatov S.M., 289
 Tazabekova N., 169
 Temirbekov A.N., 416, 419, 420
 Temirbekov N.M., 420, 438
 Temirkhanova A.M., 281, 315
 Temirlan I., 256
 Teshebayev N., 822
 Teshebayev N.M., 629
 Tleubergenov M.I., 291
 Tleukhanova N.T. Ussentay A.B., 299
 Tleukhanova N. T., 250
 Tobakhanov N.N., 293
 Tokmagambetov N.S., 161
 Torebek B.T., 294
 Tukeyev U.A., 627
 Tulendinova A., 294
 Tuleutaeva Zh.M., 236
 Tungatarova M.S., 859
 Tungushbayeva I.O., 262, 295
 Turaev R.K., 295
 Turalina D., 762
 Turarbek A.T., 520
 Turdieva N.R., 297
 Turemuratova A. A., 285
 Turganbek K.Zh., 545
 Tursynkozha A., 273

 Umbetbayev O.A., 168
 Urolov Sh., 749
 Usmonaliyev D.I., 276
 Usmonov D.A., 549
 Ussipbayev A., 631
 Uzaqbaeva D.E., 211

 Vassilina G.K., 291
 Verbovskiy V.V., 300, 301

 Wei G., 424

 Xakimova D.A., 440
 Xamrakulov B.X., 442

 Yamamoto M., 514
 Yang C., 632, 634
 Yergaliyev M., 550
 Yerkos A., 635
 Yershigeshova A.D., 301
 Yesbol Zh., 762, 765
 Yeshkeyev A.R., 262, 302, 304, 305, 307
 Yeskermessuly A., 309
 Yessirkegenov N.A., 310
 Yuldashev T.K., 247, 254, 295, 310
 Yussupova A.E., 545

 Zafarli I.Z., 444
 Zahir Z., 312
 Zaighum M.A., 269
 Zaighum M.A., 294, 313
 Zakiryanova G.K., 763
 Zambarnaya T., 169
 Zambarnaya T.S., 168
 Zarpullayev U., 749
 Zhailybayev R.E., 313

Zhaisanova D.S., 421
 Zhakebayev D.B., 412, 443
 Zhakhayev B., 315
 Zhakieva S.A., 801
 Zhaksylyk A., 316
 Zhakypova A.A., 319
 Zhanabay Zh., 626
 Zhangabergenova N.S., 315
 Zhantassova B.B., 316
 Zhanuzakova D.T., 854
 Zhao B., 632, 634
 Zhapbasbayev U., 765
 Zhapparova S.D., 318
 Zhappar A., 626
 Zheentaeva Zh.K., 319
 Zheng D., 632, 634
 Zhetpisbay Z.E., 635
 Zhilkibayeva S., 745
 Zhoraev A.H., 320
 Zhoroeva N., 614
 Zhumabekova G.E., 302, 304, 305
 Zhumagulova Sh.P., 636
 Zhumagulov B.T., 438
 Zhumali A.S., 443
 Zhumatov S.S., 321
 Zunnunov R.T., 323

Ünver T., 178

Абдакимова Г.К., 112
 Абдиев К.С., 333
 Абдираманов Ж.А., 447, 448
 Абдрашова Э.Т., 777
 Абдурахитова Г.Е., 138
 Абдугулова Г.С., 783
 Абдураимов А., 685
 Абдураимов А.Е., 676
 Абдусалиев Н.А., 666
 Абдыкадыров А.А., 645
 Абдылдаева Э. Ф., 51
 Абдықадыров А.А., 661
 Абжанов Е.А., 675
 Абишова Г.Б., 335
 Абсоатова Х.Г., 84
 Абугалиева К.С., 336
 Абылкасымова А.Е., 768, 774
 Адиева А.Ж., 814, 828
 Адібай А.Т., 776
 Ажибекова А.С., 148
 Азатбекулы Н., 571
 Азиз Г.Н., 665
 Азиз К., 685
 Азизбеков Э.И., 450

Айбагаров Серик, 593
 Айдаулет Б.Е., 666
 Айнакеева Н.Ж., 664
 Айтбаев Е.Е., 662
 Айтенова Г.М., 136
 Айтжанов С.Е., 460
 Айтуганова Ж., 726
 Акаев А.М., 337
 Акишев Г., 52
 Алдашев С.А., 452
 Алексеева Л.А., 664
 Алексеева Л.А., 55, 665
 Аликулов Ё.К., 56
 Алиман А.А., 857
 Алимкулов М.М., 723, 725
 Аллаков И., 58
 Алпысбаева А.А., 333
 Алпысова А.С., 337
 Алтынбек Д.Н., 60, 143
 Аманбаев Т.Р., 666
 Амандык А., 730
 Амандыков Н., 717
 Аманжолов Т.Е., 667, 668
 Амиранова Г.А., 569, 637
 Амонов Б.Б., 454
 Амреева А., 386
 Амреева А.М., 475
 Анваржонов Б.Б., 387
 Анетбаев А.А., 572
 Анищенко Ю.В., 499
 Аппикур Б., 723, 725
 Аркабаев Н.К., 62, 783
 Арынова Г.С., 343
 Арысбекова Э.С., 780
 Асанов А., 463
 Асанова Р.А., 483
 Асил А.А., 785
 Атаниязова А., 568
 Атаниязова А.С., 552
 Аттаев А.Х., 64
 Аттокурова А.Дж., 786
 Аубакирова Г.А., 64
 Ахаева Ж.Б., 351, 581
 Ахажанов С.Б., 646
 Ахмед-Заки Д., 583, 587
 Ахмедов Д.Ш., 572
 Ахметжанов М.А., 359
 Ахметова С.Т., 100
 Ахметова Э.Б., 574, 591
 Ахметшин А.Д., 65
 Аширбаева А.Ж., 456, 457, 576
 Ашурова Г.Р., 96

Аязбай Е., 667, 668
 Ақжолтай А.Д., 658
 Ақжолтай Е.Д., 646
 Базарбаева Ү.Қ., 342, 343
 Байкен Ж., 460
 Байшоланова Қ.С., 561
 Баканов Г.Б., 461
 Бакирова Ю.И., 670
 Бакытбекова Б.Д., 482
 Балгимбаева Ш.А., 67
 Балтабай Д.С., 68
 Баракаев М., 787
 Баротов Б.Х., 69
 Басаров С.Ж., 70
 Батенов А.Б., 682
 Батенов А.Б., 693
 Бейсебаева А.Ж., 73
 Бейсенқали А., 81
 Бекеле С.Д., 577, 583, 587
 Бекетаева А.О., 382, 670
 Бекешов Т.О., 461, 463
 Бекқұл А.С., 785
 Бекова В.Г., 604
 Бексариева Ж.Ж., 105
 Бектал Ж.А., 72
 Бектемесов Ж.М., 464, 489
 Бектемесов М.А., 452
 Бекқұл Н.Г., 831
 Берденова Б.А., 381
 Бердышев А.С., 466
 Берикканов Р. Е., 94
 Берикканов Р.Е., 329
 Беркімбаев К.М., 811
 Бжеумихова О.И., 97
 Бидайбеков Е.Ы., 345, 354, 364, 384, 849
 Бименов М.А., 74
 Бисембаев К., 672
 Болат А.Б., 788
 Борисов А.В., 701
 Быков А.А., 857
 Васиева Х.Г., 467
 Верко Е.А., 774
 Гавриленко О.Д., 391, 394
 Гадзова Л.Х., 75
 Гайназаров С.М., 113
 Гайназаров С.М., 691
 Городничев М.А., 862
 Данабекова М., 76
 Дарибаев А.А., 789
 Дарибаев Б.С., 571
 Даркенбаев Д.К., 363
 Дарманова Ж.К., 790
 Даубаев З.Н., 396
 Даулетбай М.Н., 469
 Даулеткулова А.У., 855
 Джалбиров Ж.Т., 675
 Джамалов С.З., 471
 Джанмулдаев Б.Д., 675
 Джанмулдаева А.Б., 675
 Джомартов А.А., 676
 Джумагулов Н.Н., 472
 Джураев А.М., 77
 Диарова Д.М., 674
 Дикамбай Т., 672
 Диханбаева Д.Ж., 448
 Досбаев Ж.М., 645, 661
 Досмаханбет С.М., 792
 Досмухамбетов Н.К., 730
 Доцанова М.Ж., 794
 Доцанова М.К., 473
 Дузбаев Т.Т., 559
 Дыйканов Д.Д., 457
 Дюсембин Е.А., 678
 Дәруіш С.З., 578
 Дәуітбаева А.О., 338
 Егоров И.Е., 330
 Елубаева Д.Д., 348
 Енсебаева Г.М., 795
 Ергешбаев С.Х., 797
 Ерланбек Ә.Е., 398
 Ерхан А.Ж., 102
 Ерқос А., 553
 Есенәлі А.Б., 458
 Есхожаева С.М., 771
 Есіркепова А.У., 338
 Жабаев Е.Х., 350, 384
 Жадраева Л.У., 798
 Жайдакбаева Д.К., 325
 Жайдақбаева Л.Қ., 840
 Жайсанбаев А.С., 680
 Жаксылыков А.Е., 379
 Жаксылыкова Ж.Р., 370
 Жакыпбекова А.Т., 800, 802
 Жалгасова К.А., 485
 Жалмуханбетов Д.Н., 857
 Жанабилова А.К., 67
 Жанахметова Д.Ж., 836
 Жапсарбаева Л.К., 107, 324, 660
 Жахина Р.У., 134
 Жилкибаева С.К., 580
 Жолдас Н.А., 474
 Жолдасов С.А., 651
 Жолдошова Ч.Б., 111
 Жумабекова Н.Н., 682, 693

Жунисбекова Д.А., 580
 Жусипов И., 353
 Жусупова Э.М., 820
 Жээнбаев Н.А., 502
 Жұмабай Н., 771
 Жұмабек Е.Б., 475
 Жұмағалиева М.Ж., 553
 Жұмағұл А.С., 652
 Жұмағұлова З.А., 769, 804
 Жәңгір Н.Б., 817
 Закиров А.Х., 684
 Закирова А.Б., 351, 581
 Заурбеков Н.С., 335
 Звонарева Т.А., 476
 Земцов В.И., 710
 Зикиров О.С., 79
 Зулпуев А.М., 105
 Зулпукарова Д.И., 800, 802
 Ибашова А.Б., 341
 Ибраев С.М., 732
 Ившин М.С., 83
 Икрамов А.З., 705
 Имамов О.Ш., 58
 Иманбаев Н.С., 80
 Иманбаева А.Б., 100
 Иманбаева Н.С., 706
 Иманкулов Т., 577, 583, 587
 Иманкулов Т.С., 571
 Иманқұл Т.Ш., 81
 Иовбак А.С., 805
 Искаков Ж., 685
 Исломов Б.И., 84, 686
 Исмаилов Б.Р., 585
 Исмаилов Х.Б., 585
 Исмайлова Ш.Б., 841
 Исова А.Т., 718
 Ихсанов Е.В., 674
 Кабанихин С.И., 452
 Кабулова А.А., 356
 Кабулова А.Р., 790
 Кагазбаева А.К., 806
 Кадирбек А., 85, 88
 Кадыр А.М., 716
 Казимова Д.А., 809
 Каимов А.Т., 857
 Каимов С.Т., 857, 858
 Кайдасов Ж., 806
 Кайым Т.Т., 857
 Кайырбек Ж.А., 90
 Кайыров Р.А., 652
 Калдарбек Е., 386
 Калимбетов Б.Т., 325, 327

Калтаев А., 667, 668
 Калыбаев У.С., 688
 Кальменов Т.Ш., 87, 88
 Кальпеева Ж.Б., 338
 Камал А.Н., 676
 Камалова Г.Б., 373
 Камбаров Д.Б., 554
 Канапия М.О., 736, 737
 Кангужин Б.Е., 89, 90
 Канымгазиева И.А., 55
 Каппасова С.Е., 804
 Карабаева Ж.А., 811
 Каракозов С.Д., 812
 Карасаев Б.А., 735
 Каратаева Д.С., 68
 Каржаубаев К.К., 362
 Каримов К.Т., 92, 478
 Каримова Г.А., 456
 Касенов С.Е., 356, 383, 469, 473, 480, 482, 483, 489, 500
 Каспирович И.Е., 701, 702
 Кастро Кастилья А.К., 324, 660
 Касымбек Н.М., 589
 Кемелбек М.Н., 377
 Кемелбеков Н.К., 586
 Кемельбекова Ж.С., 360
 Кемельбекова Ж.С., 777
 Кенес А.К., 359
 Кенесариева Г.Ж., 814
 Кенжебек Е., 577, 583, 587
 Керимакын А., 389, 597
 Керимбеков А., 94, 329
 Керимкулов Д.Б., 689, 728
 Керімақын А., 398
 Ким И.М., 816
 Киргизбаев Ж.К., 702
 Кобланов С.Р., 657
 Кожабаяв С.Е., 703
 Кожанов А. И., 490
 Кожанов А. И., 98
 Кожанов А.И., 69, 95–97, 485
 Кожобеков К.Г., 486
 Кожобекова П.Ж., 145, 488, 497
 Козыбаев Д.Х., 99
 Кокозова А.К., 499
 Конисбаева К.Т., 99
 Копбалина С.С., 809
 Копжасарова А.А., 100
 Копжасарова Ж.Б., 360
 Коротких А.А., 701
 Косанов Б.М., 773
 Кошанов Б.Д., 102

Криворотько О.И., 151, 367, 476
 Куатова М.Ж., 728, 730
 Кудайберген М., 386
 Кудайбергенов А.К., 358
 Кулпешов Б.Ш., 103
 Култаев Т.Ч., 105
 Култаева Д.Ч., 786
 Курина Г.А., 365
 Курманалиева Г.С., 499
 Куттыбаева А.Е., 657
 Күрішбай Н.А., 555
 Көкеш А.Н., 817
 Латинов Н.К., 368, 371
 Лебедев Д.В., 862
 Лезин А.Н., 730
 Лес А.К., 109
 Луценко Я.Г., 482
 Маатов К.М., 588, 819
 Мадалиева С., 127
 Маделханова А.Ж., 675
 Мадияров Н.К., 816, 817
 Мадрахимова З.С., 495
 Мазаков Т.Ж., 559
 Максумова Ж.К., 489
 Малгаждаров Е.А., 336, 337, 370
 Малышев С.Б., 110
 Мамазиева Э.А., 111
 Мамазаров Д.С., 98
 Маматкасымова А.Т., 105, 820
 Маматмуминов Д.Т., 491
 Маматов Ж. А., 490
 Мамбетов Ж.И., 588, 819
 Мамбетов Ж.И., 112
 Мамырбаев Ө.Ж., 556
 Мамытов А.О., 145
 Мансурова М.Е., 474, 564
 Марат А.Е., 466
 Марксұлы С., 645, 661
 Мартыненко А.С., 367
 Масанов А.Ж., 717
 Маслова К.С., 701
 Махаров Т.А., 368, 371
 Мегралиев Я.Т., 450
 Мелдебекова С.К., 461
 Менлихожаева С.Қ., 823
 Мирзаев И., 113, 691
 Мирзаев Ф.С., 493
 Мирсабуров М., 491, 493
 Мирсабурова Д.Т., 494
 Мисилов В.Е., 504
 Молдабеков М.М., 682, 693
 Молдашев А., 706
 Момынкулов З.З., 695
 Муқанбетқалиева А.А., 447
 Муканов А.Б., 115
 Мурат А., 825
 Муратбекова У.А., 116
 Муратова А.К., 390
 Муродова М.Р., 92
 Мусагулова Г.Ш., 561
 Мустафин М.Б., 589, 598
 Мута А., 718
 Мухаммеджанова Д.М., 590
 Муханбет А.А., 571, 589
 Муханбет Аксултан, 593
 Мухарлямов Р.Г., 696, 701, 702
 Мырзабаев Ә.Р., 857
 Мінсізбаева Г.Б., 823
 Мұсират Е., 373
 Мұханова Т.Г., 374
 Мәдібайұлы Ж., 654
 Мәткерім Б., 560
 Назарова К.Ж., 146
 Накибаева М.Т., 560
 Накипбек Ж.Е., 712
 Нарбекова Г.М., 852
 Нарбекова Н.М., 118, 852
 Нағи Б.Ө., 795
 Нурбаева Д.М., 798
 Нурбекова А.Ж., 375, 826
 Нурбекова Ж.К., 377, 379
 Нургозиева А.Ж., 658
 Нурмухамедова Ж.М., 790
 Нысанов Е.А., 703
 Олжаев О.М., 705
 Олимова Д.С., 478
 Омар Ж., 828
 Омаров Б.С., 695
 Омаров М.Т., 119
 Омархалиева Н.Г., 563
 Омирбекова Ж.Ж., 706
 Оразалы Д.Е., 381
 Орантайұлы М., 652
 Оспан Ә.Г., 564
 Оспанов К.Н., 120
 Отаров Х.Т., 395
 Ошанова Н.Т., 373
 Папышев А.А., 458, 830
 Псху А.В., 120
 Пірімжанов Н.А., 383
 Разақ Ж.Н., 831
 Рамазанов М.И., 122
 Расулов А.Б., 123
 Рахимова А.Т., 650

- Рахимова Д.Р., 586
 Рахматулина А.Б., 706
 Рашид К.А., 858
 Ревшенова М.И., 364
 Роговой А.В., 124
 Роспай А.М., 832
 Рустамова М.Р., 495
 Сабиржанов М.Т., 488, 497
 Сабраев Қ.Ж., 384
 Сагимбаева А.Е., 379
 Сагынбай уулу Эламан С.Э., 820
 Садыбеков М., 88
 Садыбеков М.А., 64, 76, 125
 Садыкова Г.К., 576
 Сайбеков Н., 386
 Сайлау А.Ж., 564
 Сайрам Н.Н., 125
 Сайфуллаева Б.А., 126
 Сакабеков А., 127
 Самбетбаева А.К., 566
 Сапаков Д.А., 327
 Сапаргали Алмаз, 593
 Сапармуратов А., 709
 Сапиев Ж.Э., 576
 Сарбасова А.Ә., 594
 Сарсенов Б.Т., 504
 Сартабанов Ж.А., 129
 Сатыбаев А.Дж., 499
 Сафаров Р.Ч., 137
 Сафонов В.Ф., 325, 327
 Сафонов С.В., 330
 Саханова Ж.А., 480
 Сеитова С.М., 825
 Сеитова С.М., 836
 Сейдахмет А., 728
 Сейдахмет А.Ж., 710, 857
 Сейтмуратов А.Ж., 712
 Сейтмуратова З.И., 391
 Сейтов А.Н., 667, 668
 Секенов Б., 657
 Серовайский С.Я., 131
 Сирожиддинов З.Ш., 604
 Слямқанова А.М., 324, 660
 Смагулов Д.К., 706
 Смайлов Н.К., 645
 Смайлов Н.Қ., 661
 Сманова Н.Т., 800, 802
 Смирнов В.А., 812
 Солдатов А.П., 132
 Солтанбекова Қ.Қ., 500
 Сопуев А., 502
 Сопуев А.А., 486
 Сулеймен О.М., 585
 Сулейменова А.К., 601
 Сулейменова Мадина, 596
 Султан Б.Б., 464
 Султанов М.А., 504
 Сыдығалы А., 568
 Сырлыбаева Л.А., 838
 Сүлейменов К.М., 649
 Сәлғожа И.Т., 373
 Сәрсенбі Ә.М., 116
 Таласбаева Ж.Т., 133
 Тамабай Д.О., 340, 374
 Танин А.О., 122
 Тасмамбетов Ж.Н., 134, 136
 Тахиров Ж.О., 132, 387
 Ташев А., 714
 Таштемирова Н.Т., 844
 Телтаев Б., 718
 Телтаев Б.Б., 716, 717, 719, 721
 Темирбеков Е.С., 735
 Темирбеков Н.М., 336, 370, 383, 389–391, 394, 597
 Темирбекова Л.Н., 391, 394
 Терсенов. А.С., 137
 Тилеуов Г.Е., 666
 Тлётай Ш.Т., 569, 637
 Тлеулесова А.М., 392, 469, 473, 482, 483, 489
 Тлеуханова Н.Т., 70
 Токенов Н.М., 730
 Токибетов Ж.А., 138
 Токтомуратова Ж.Э., 722
 Токторбаев А.М., 461, 722
 Токушева А.Д., 723, 725
 Толеуов Т.Ж., 139
 Тоқтағұлов Н.Е., 505
 Тугенбаева Ж.С., 489
 Туйгунов Ж.Р., 739
 Тукеев У.А., 563
 Туленбаев К.М., 141
 Туленбаев К.С., 141
 Туленбаева Р.А., 457
 Тулешов А.К., 676, 689, 710, 726, 728, 730, 857
 Тураев Р.Н., 493
 Турганбек У., 102
 Тургумбаев М., 142
 Тургунбаев Р.М., 846
 Туребекова А., 657
 Турлугулова Н.А., 338
 Турметов Б.Х., 60, 126, 143
 Турсунов Д.А., 145
 Турсынова А.Т., 732
 Туткушева Ж.С., 395

Тыныбаева А.Н., 857
Тілектес Н.Ж., 682, 693
Тұрар О.Н., 598
Тұрашова Ш.П., 396
Тұрғынбаева А.А., 398
Тұяқов Е.А., 831, 838
Төлеуов Б.И., 649, 650
Уалиев З.Г., 734
Убаева Ж.К., 134
Убайдуллаев У.Ш., 84
Узакбаева Г.А., 136
Умаралиева Д.У., 848
Умбетбаев К.У., 849
Умирхан Ж.Н., 603
Уразымбетов М.С., 354, 849
Уринов Х.Х., 787
Урстемова Г.К., 798
Ускенбаева Р.К., 338
Усманов К.И., 146
Утегенова А.У., 578
Утенов М.У., 580, 735
Фармонов Ш.Р., 506
Фаязов К.С., 507
Хабиев А.Т., 736, 737
Хайдаров Б.К., 818
Хайруллин Е.М., 148
Хакимов М.Х., 604
Халимбетов Б.Я., 773
Хамит Д.Б., 850
Ханжарова Б.С., 830
Хубиев К.У., 150
Худайберганов Я.К., 507
Худайберген Б.Б., 391
Хужаёров Б.Х., 739
Шайхиева Ж., 600
Шакирова С.Б., 350
Шалкар К.А., 719, 721
Шалхар А.Ә., 128
Шаршекеев У., 94
Шаяхметов Н.М., 601
Шаяхметова А.С., 555
Шаяхметова Б.К., 119
Шекербекова Ш.Т., 343
Шеримова Р.Б., 840
Шинтемиров А.М., 843
Шишов С.Е., 774
Шияпов Қ.М., 472
Шпади Ю.Р., 509
Шуакаев М.К., 780
Юлусов С.Б., 736, 737
Якунин С.А., 151

Ғаббасов М.Б., 649, 650
Қабдығалиев Н.Қ., 560
Қайратқызы А., 107
Қайырбекова А.Ж., 552
Қалданов Б.Б., 342, 354
Қалиев М.Ж., 710
Қалила А.Ә., 358
Қаныбек Ө.К., 475
Қасымбек Н.М., 560
Қуанов Т.Ж., 649
Қуанова А., 364
Құдайбергенова А.Қ., 363
Құлданбаева А.Ж., 362
Құмарбек Н.Е., 710
Құрманбай Қ., 652
Құрметқан Т., 556

Әбілдаева Ж.Т., 338
Әбілқасымова А.Е., 769, 771, 773
Әкімова Н.Н., 779
Әліұлы А., 601, 667, 668
Әлімғазы А.С., 340
Әмірбеков А.А., 341
Әмірбеков Н.Ж., 646
Әмірбекұлы А., 341
Өксікбаев Е.Е., 574, 591
Өміртай Қ.А., 382

Первый Конгресс математиков Казахстана

Шымкент, 3–7 апреля 2026 года

Тезисы докладов

Подписано в печать 15.03.2026г.
Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная
Тираж 150 экз.

Отпечатано в типографии ИМММ МНВО РК
050010, г. Алматы, ул Шевченко, 28

ISBN 978-601-08-6034-6

